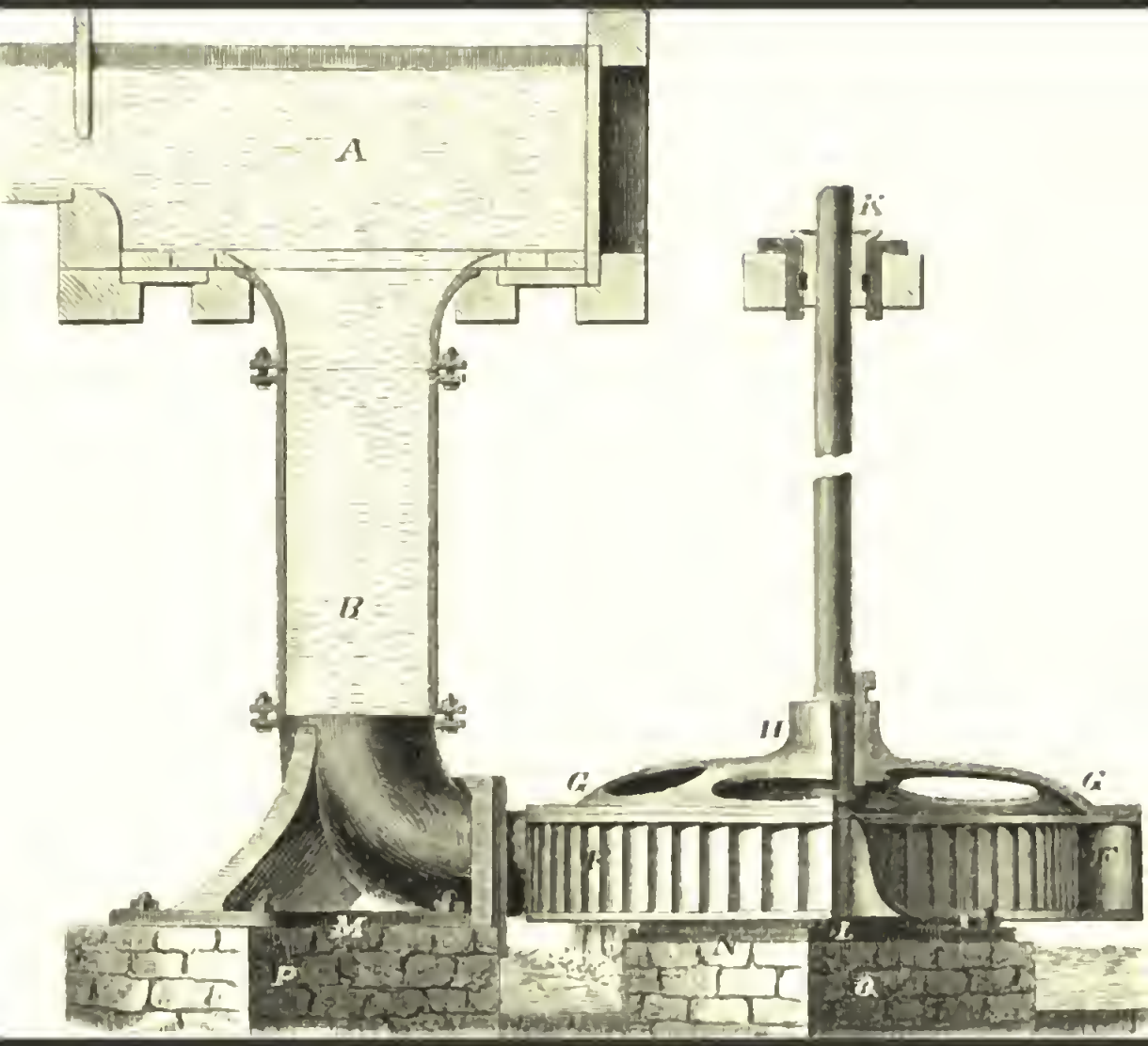


Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinen-mechanik

Julius Ludwig Weisbach

Vol. 3

Lehrbuch

der

Statik der Bauwerke

und der

Mechanik

der

Umtriebsmaschinen.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1865.

Eng 258.63
JUN 19 192.
Engineering Library
Gift of
Almon Danforth Hodges
H.C.1889
JUN 20 1917
TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY

Die Herausgabe einer Ueberſetzung in engliſcher und franzöſiſcher Sprache, ſowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung dieses zweiten Bandes meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik bin ich den schon in der Vorrede des ersten Bandes ausgesprochenen und in diesem Bande befolgten Ansichten möglichst nachgegangen. Ich weiß zwar, daß diese Ansichten nicht von Allen getheilt werden, daß zumal von Manchen eine allgemeinere Darstellung und gelehrtere Behandlung in diesem Werke vermißt wird, allein ich habe auch die Erfahrung zur Seite, daß der in diesem Buche eingeschlagene elementare und mehr populäre Weg leicht von Jedem verfolgt werden kann, welcher nicht im Besitze ausgedehnter analytisch-mathematischer Kenntnisse ist, und deshalb auch dahin führt, der Mechanik mehr Eingang und Anwendung und dadurch wieder mehr Werth und Geltung in der Technik zu verschaffen, als es bis jetzt der Fall gewesen ist.

Man findet noch immer sehr häufig, daß Praktiker bei ihren Ausführungen die Anwendung der wissenschaftlichen Mechanik verschmähen und es vorziehen, den Weg der Empirie einzuschlagen; entweder haben dieselben nicht das erforderliche Zutrauen zu den Regeln der Wissenschaft, oder sie finden die betreffenden Schriften nicht genügend, um sie als Rathgeber und Führer bei Anordnung und Berechnung ihrer Constructionen gebrauchen zu können. Wenn man nun weiß, wie viel in so vielen Hinsichten darauf ankommt, daß Maschinen und Bauwerke allen Anforderungen vollkommen entsprechend ausgeführt werden, und erwägt, daß dies nur durch richtige Anwendung richtig begründeter Regeln der Wissenschaft möglich ist, so wird

man auch das Bestreben des Verfassers, den ausgesprochenen Mängeln entgegenzuwirken, zu würdigen wissen.

Richtige Begründung und Einfachheit sind gewiß die Haupterfordernisse von einem Werke, welches Praktikern als Lehrer und Führer dienen soll. Mangel an beiden sind aber die vorzüglichsten Ursachen, welche der Anwendung der Mechanik auf die Praxis bis jetzt noch so viel Eintrag gethan haben. Wenn bei Entwickelung von Regeln unsichere oder unzulässige Voraussetzungen gemacht werden, wenn hierbei nicht das Wesentliche vom Unwesentlichen, das Ueberwiegende von dem Untergeordneten gehörig getrennt wird, wenn endlich wichtige Verhältnisse oder Einflüsse außer Acht gelassen, dagegen untergeordnete in Betracht gezogen werden, so können natürlich auch die Regeln selbst, so richtig auch deren Ableitungen sein mögen, nicht die für die Anwendung hinreichende Brauchbarkeit besitzen. Leider wird gerade auf diese Weise von Schriftstellern oft gefehlt, und es ist daher kein Wunder, wenn Praktiker sehr oft theoretische Regeln unrichtig oder wenigstens unzulänglich finden. Daher kommt es auch, daß Praktiker nicht selten von einer unrichtigen Theorie sprechen, während doch nur von einer unangemessenen Begründung und Anwendung derselben die Rede sein kann. Es ist allerdings nicht immer leicht, sachgemäße und richtige Regeln und Formeln zum Gebrauche der praktischen Mechanik aufzufinden; es gehört hierzu nicht nur eine genaue Bekanntschaft mit der Natur des Gegenstandes, die zuweilen nur durch besondere Beobachtungen oder Versuche verschafft wird, sondern auch eine besondere Aufmerksamkeit und selbst eine gewisse geistige Fähigkeit. Der Verfasser hat beim Aufsetzen des vorliegenden zweiten Bandes, wo es darauf ankam, praktisch brauchbare Theorien zu entwickeln, sein Augenmerk vorzüglich auf diesen Gegenstand gerichtet; er hat sich wenigstens nach Kräften bemüht, in dem vorliegenden Buche Praktikern den zur Sprache gebrachten Rathgeber und Führer zu verschaffen, ermißt aber recht wohl, daß ihm dies nicht vollkommen gelungen ist.

Auch der Mangel an Einfachheit und die große Allgemeinheit in der Behandlung der Wissenschaft und der von ihr entwickelten Formeln ist der allgemeineren Einführung der Mechanik in die Praxis sehr hinderlich. Nicht selten findet man, daß selbst mathematisch vorgebildete Praktiker in

ihrem Berufe die Hülfe der wiſſenſchaftlichen Mechanik vernachläſſigen, weil ihnen dieſelbe zu umſtändlich und beſchwerlich iſt, und daß Diejenigen, welche keine umfaſſende Kenntniß in der Mathematik oder wenig Fertigkeit in der Behandlung derſelben beſitzen, die Anwendung der wiſſenſchaftlichen Mechanik auf die Praxis aus demſelben Grunde ganz verſchmähen. Um einer allgemeineren Anwendung der wiſſenſchaftlichen Mechanik auf die Praxis Vorſchub zu leiſten, iſt es daher nöthig, den Vortrag dieſer Wiſſenſchaft zu populariſiren und die durch dieſe gewonnenen Regeln möglichſt zu vereinfachen. Man hat aus dieſem Grunde z. B. ſtatt einer großen allgemeinen Formel oft mehrere kleine und vereinfachte Specialformeln aufzuſtellen oder, nach Befinden, ſtatt derſelben vereinfachte Näherungsformeln zu entwickeln, ferner durch Einführung von Coefficienten eine größere Vereinfachung der Formeln zu erſtreben u. ſ. w.

Der vorliegende zweite Band meiner Mechanik zerfällt in zwei Abtheilungen, von denen die eine die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke, die zweite aber die auf Maſchinen, und zwar insbeſondere die Theorien und kurze Beſchreibungen der ſogenannten Kraft- oder Umtriebsmaſchinen enthält. Vielleicht finden Manche die erſte Abtheilung zu kurz, die zweite hingegen zu lang. In Betreff der erſten muß ich allerdings geſtehen, daß es mir jetzt ſelbſt leid thut, nicht tiefer in die Theorien der hölzernen und ſteinernen Brücken eingegangen zu ſein, namentlich auch Ardant's Abhandlung über die Sprengwerke nicht benutzt zu haben, da dieſer Gegenſtand durch die vielen Eiſenbahnanlagen jetzt eine beſondere Wichtigkeit erlangt hat. Was aber die zweite Abtheilung anlangt, ſo glaube ich, daß hier nur bei wenigen Artikeln eine größere Kürze möglich iſt, ohne den Werth des Buches zu beeinträchtigen. Es kann ſein, daß mancher Leſer das Capitel über Waſſerſäulenmaſchinen zu groß findet, weil die Anwendung dieſer Maſchinen faſt nur auf den Bergbau eingeſchränkt iſt. Ich habe allerdings bei Bearbeitung dieſes Gegenſtandes im Auge gehabt, daß hier eine Lücke in der Literatur auszufüllen ſei, da in allen Lehr- und Handbüchern über Mechanik wenig oder ſo viel wie nichts über dieſe Maſchinen geſagt wird, und zugleich gehofft, dadurch den Berg-Ingenieuren einen Dienſt zu erweiſen. Das Capitel über Turbinen wird vielleicht auch von einigen zu ausgedehnt

gefunden, zumal da dasselbe auch eine Monographie der älteren Stoß- und Druckturbinen enthält. Ich glaube jedoch, daß in diesem Capitel ein Weglassen oder Abkürzen nur von Nachtheil gewesen sein würde, aus dem Grunde, daß gerade zur Beurtheilung des Werthes einer vollkommenen Maschine es nöthig ist, die Theorie und also auch die Mängel anderer ähnlichen unvollkommenen Maschinen zu kennen. Uebrigens wird der Gebrauch unvollkommener Maschinen nie aufhören, da es immer Orte und Verhältnisse geben wird, wo auf eine Oekonomie der Arbeitskraft nichts, wohl aber auf die Wohlfeilheit der Maschine selbst sehr viel ankommt. In dem Capitel über das Messen der Arbeitskräfte u. s. w. hätte ich vielleicht etwas ausführlicher über die Dynamometer sprechen sollen; wäre zur Zeit der Bearbeitung Morin's Leçons de mécanique pratique in meinen Händen gewesen, so würde ich es vielleicht auch gethan haben. Am meisten Schwierigkeiten hat mir die Bearbeitung des zweiten Abschnittes, zumal aber die des Capitels über Dampfmaschinen, verursacht, und ich befürchte auch noch, daß dieser Abschnitt nicht allenthalben den Anforderungen des Lesers entsprechen werde. Vielleicht hätte ich das Capitel über Wärme kürzer fassen oder dasselbe ganz weglassen können, da es in der Regel dem Vortrage über Physik überlassen wird; wenn ich indessen bedenke, daß ich hierin nur das abgehandelt habe, was für die Baukunst und für die Maschinenlehre, zumal aber für die Dampfmaschinen von Wichtigkeit ist, so scheint mir allerdings dieser Gegenstand mit Recht eine Stelle in diesem Buche einzunehmen. Bei der Bearbeitung des Capitels über Dampfmaschinen habe ich sowohl von der Poncelet-Morin'schen Coefficiententheorie als auch von der neueren Pambour'schen Theorie Gebrauch gemacht; zugleich bin ich hierin auch meinen eigenen Ansichten gefolgt, und kann hoffen, daß meine Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht als eine bloße Compilation wird angesehen werden können.

Wesentliche Dienste haben mir bei Bearbeitung dieses Werkes die Ergebnisse meiner hydraulischen Versuche geleistet, da ich mit Hülfe der durch diese erlangten Widerstandscoefficienten in den Stand gesetzt worden bin, die Arbeitsverluste zu berechnen, welche aus den hydraulischen Hindernissen bei den Turbinen, Wassersäulen- und Dampfmaschinen entspringen. Ich kann

behaupten, daß dadurch der Entwickelung brauchbarer Theorien dieſer Maſchinen ein beſonderer Vorſchub geleiſtet wird.

Es bleibt mir nun noch übrig, dem geehrten Leſer darüber Rechenſchaft abzulegen, daß ich das ganze Werk mit dieſem zweiten Bande, wie anfänglich beabſichtigt wurde, nicht zum Schluſſe bringe, und daß ich noch einen dritten Band hinzuzufügen mich genöthigt ſehe. Allerdings iſt mir hier ein Irrthum untergelaufen, welcher darin beſteht, daß ich den Umfang des vorliegenden Materials zu klein geſchätzt habe. Nachdem ich aber einmal mit der Bearbeitung des Werkes weiter fortgeſchritten, und mir darüber von ſo vielen Seiten Beweiſe des Beifalls zu Theil geworden waren, ſo blieb mir nichts weiter übrig, als auf der betretenen Bahn fortzugehen, und nun entweder am Plane des Werkes abzuſchneiden oder am Umfange deſſelben zuzuſetzen. Das Erſtere zu thun, konnte ich mich aber deshalb nicht entſchließen, weil gerade die noch fehlenden Gegenſtände, nämlich die Zwiſchen- und Arbeitsmaſchinen, in den vorhandenen Werken über Mechanik ſehr ſtiefmütterlich behandelt ſind, und es an einem vollſtändigeren Werke über die letzteren Maſchinen ganz fehlt. So hoffe ich denn durch die Hinzufügung eines dritten Bandes einem Bedürfniſſe abzuhelfen.

Bei der Reviſion des Druckes haben mich die Herren Bornemann und Röting weſentlich unterſtützt, und gewiß hat die Correctheit des Buches dieſen Herren Vieles zu danken, was ich hier auszuſprechen nicht unterlaſſen darf.

Freiberg, den 1. December 1847.

Julius Weisbach.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Dieſer zweiten Auflage vom zweiten Bande der Ingenieur- und Maſchinen-Mechanik ſind mehrfache Verbeſſerungen und Ergänzungen zu Theil geworden. In der erſten Abtheilung, der Statik der Bauwerke, ſind beſonders die Brücken viel ausführlicher behandelt worden, als in der erſten Auflage, und es haben auch Röhrenbrücken aus Eiſenblech, welche in der neueſten Zeit von den Engländern conſtruirt worden ſind, in dieſer Auflage einen Platz gefunden. Es hat ferner der Verfaſſer in dem Capitel über die verticalen, und insbeſondere über die oberſchlägigen Waſſerräder mehrfache Ergänzungen und Berichtigungen angebracht, und es iſt auch das Capitel über Reactionsräder und Turbinen, zumal durch die Reſultate der an dieſen Maſchinen in der neueſten Zeit angeſtellten Verſuche, bereichert worden. Endlich hat noch die Lehre von der Wärme und von den Dämpfen einige weſentliche Ergänzungen erhalten, da bei der Reviſion derſelben die neueſten Verſuche von Regnault (ſ. Mémoire de l'académie royale des sciences de l'institut de France, T. XXI.) benutzt werden konnten. Durch die Hinzufügung guter Abbildungen von der Gölzſchthalbrücke und der Britanniabrücke, ſowie von einem Tangentialrade, von einer Sims'ſchen Dampfmaſchine u. ſ. w. hat dieſe neue Auflage ebenfalls an Werth gewonnen. Uebrigens ſtimmt ſowohl im Ganzen als auch in der Behandlungsweiſe dieſe zweite Auflage mit der erſten vollkommen überein.

Freiberg, den 24. Mai 1851.

Julius Weisbach.

Vorrede zur dritten Auflage.

Auch in der vorliegenden dritten Auflage vom zweiten Bande meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik sind die nöthig gewordenen Berichtigungen und Verbesserungen, sowie die den Fortschritten der Wissenschaft entsprechenden Ergänzungen angebracht, und, mit Beseitigung des Ueberflüssigen und Unbrauchbargewordenen, mehrfach vollständige Umarbeitungen vorgenommen worden. Ich kann versichern, daß ich auf die Bearbeitung dieser Auflage viel Mühe und Sorgfalt verwendet habe, und wenn ich trotzdem in derselben den Wünschen des geehrten Publicums nicht allenthalben entsprechen sollte, so bitte ich zu bedenken, daß die Auswahl, Zusammenstellung und Bearbeitung der wichtigsten Gegenstände aus dem kaum mehr zu übersehenden Gebiete der praktischen Mechanik eine schwierige, mühsame und zeitraubende ist.

In der ersten Abtheilung, welche die Statik der Bauwerke enthält, hat sowohl die Theorie des Erddruckes als auch die der Gewölbe einige wichtige Ergänzungen erhalten, und es ist die Theorie der Holz- und Eisenconstruction größtentheils ganz umgearbeitet worden. In der zweiten Abtheilung, welche die Mechanik der Umtriebsmaschinen behandelt, habe ich das Capitel über die Dynamometer ausführlicher behandelt als in der zweiten Auflage, ferner das Capitel über die verticalen Wasserräder zum Theil umgearbeitet und vervollständigt, sowie das Capitel über horizontale Wasserräder durch die Beschreibung und theoretische Betrachtung neuer Turbinen ergänzt. Auch das Capitel über die Wassersäulenmaschinen habe ich mit Weglassung einer

Maſchine nach älterem Principe, durch die Beſchreibung und Behandlung neuer Waſſerſäulenmaſchinen bereichert. Weſentliche Umänderungen und Vervollſtändigungen ſind im Abſchnitte über Dampfmaſchinen angebracht worden, wiewohl ich hier noch weiter gegangen wäre, wenn es der Raum geſtattet hätte. Auf die neueren Theorien der Wärme und ihre Anwendung auf die Dampfmaſchinen bin ich nicht ſpeciell eingegangen, da ſie wohl noch nicht dahin gelangt ſind, um ſie mit Sicherheit und Vortheil bei der Theorie der Dampfmaſchinen zu Grunde legen zu können.

Die Abbildungen dieſer neuen Auflage ſind größtentheils neu gezeichnet und neu geſtochen, auch iſt die Anzahl derſelben ſehr vermehrt worden. Die Güte und Richtigkeit derſelben möchte wohl nur in ſeltenen Fällen etwas zu wünſchen übrig laſſen.

Freiberg, den 24. April 1859.

Julius Weisbach.

Inhalt des zweiten Theiles.

Erste Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

Erstes Capitel.

Von dem Zusammenhange und Drucke lockerer Massen.

§.		Seite
1	Lockere oder halbflüssige Massen, natürliche Böschung u. s. w.	3
2	Erddruck, activer und passiver, Erdwiderstand, Hebekraft der Erde	4
3	Prisma des größten und kleinsten Erddruckes	7
4	Erddruck und Wasserdruck	9
5	Cohäsion lockerer Massen	10
6	Moment des Erddruckes	12
7—8	Belastete oder überschüttete Erdmasse	14
(9—10)	Allgemeinere Theorie des Erddruckes	18
11	Futtermauern	23
12	Widerstandslinie der Futtermauern	24
13	Gleiten der Futtermauern	26
14	Kippen der Futtermauern	28
15	Poncelet's Tabelle über die Stärke der Futtermauern	29
16	Geböschte Futtermauern	32
17	Geneigte Futtermauern, Literatur	34

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

18	Gewölbe, Gewölbsteine, Widerlager u. s. w.	37
19	Gleichgewicht der Gewölbsteine ohne Reibung	38
20	Gewölblinien	40
21—22	Gleichgewicht der Gewölbsteine mit Rücksicht auf Reibung	42
23—24	Gleichgewicht der Gewölbsteine in Hinsicht auf Kippen oder Drehung	45
25—26	Widerstandslinie der Gewölbe, Angriffspunkte des Gewölbschubes	49

§.		Seite
27	Stabilität der Widerlager und Pfeiler	54
28	Belastete Gewölbe	56
(29)	Allgemeine Theorie des Gewölbschubes	58
30	Gewölbstärke	61
31	Prüfung der Gewölbe, Specielle Berechnung eines Gewölbes	62
32	Tabellen des Gewölbschubes	66
33—35	Steinerne Brücken, Brückenpfeiler u. s. w.	71
36	Unsymmetrische Tonnengewölbe	78
37	Schiefe Tonnengewölbe, Kellerhalsgewölbe u. s. w.	79
38	Kloster-, Kreuz- und Kuppelgewölbe, Literatur	81

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

39—40	Holz- und Eisenconstructionen überhaupt	84
41—43	Unterstützung der Balken durch Säulen	87
(44)	Allgemeine Theorie der Biegung der Balken durch mehrere Kräfte	96
45	Balken mit Zwischensäulen	99
46—48	Unsymmetrische Unterstützung durch Säulen	102
49—50	Zusammendrückung der Säulen	109
51—55	Gleichgewicht und Schub der Sparren und Streben	113
56—59	Hänge- und Sprengwerke	124
60—61	Einseitig unterstützte Träger	132
62—65	Fachwerksträger	139
66—68	Uebereinanderliegende und gesprengte Balken	148
69—71	Eisenblechträger und Gitterträger	156
72—73	Bogenträger	164
(74—79)	Theorie der Tragbögen oder krummen Balken	168
(80)—82	Tragkraft der Tragbögen	178
83—85	Hängebögen, Hängewerke	189
86—93	Theorie der Hängebrücken	194
94	Charnierbrücken	212
95	Pfeiler und Widerlager der Hängebrücken	215
96—101	Dachgespärre, Sparrenschub	219
102—103	Lehrgerüste	234
104	Hölzerne Brücken	237
105	Gußeiserne Brücken	241
106	Schmiedeeiserne Brücken, Pauli'sche Brücken u. s. w.	243
107	Hängebrücken, Literatur	250

Zweite Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Kraftmaschinen.

Einleitung.

108—111	Maschinen, Kraft und Leistung, sowie Bewegungszustand derselben	257

Erſter Abſchnitt.

Von den bewegenden Kräften der Thiere, des Waſſers und Windes, ſowie von den Maſchinen zur Aufnahme dieſer Kräfte.

Erſtes Capitel.

Von dem Meſſen der bewegenden Kräfte und ihren Wirkungen.

§.		Seite
112	Dynamometer und Wagen	264
113—116	Einfache Gewichtswagen, gleicharmige und ungleicharmige	265
117—121	Zuſammengeſetzte Gewichtswagen, Brücken- und Taſelwagen	273
122	Zeigerwage	282
123—124	Federdynamometer, Federwagen	284
125—127	Federdynamometer mit Zeichnen- und Zähtapparaten	286
128	Dynamometriſche Schnellwage und dynamometriſche Zapfenlager	293
129—130	Differenzialdynamometer	296
131	Horizontaldynamometer	303
132—134	Bremsdynamometer	306
135	Planimeter	313

Zweites Capitel.

Von den Menſchen- und Thierkräften, ſowie von den Maſchinen zur Aufnahme derſelben.

136—140	Thieriſche Kräfte, Kraftformeln u. ſ. w.	316
141	Hebel, Arbeiten der thieriſchen Kräfte am Hebel	326
142	Liegende Radwelle, Haſpel	329
143	Stehende Radwelle oder Winde, Göpel	333
144	Tret- und Laufrad	336
145	Tretſcheibe und Tretbrücke	339

Drittes Capitel.

Vom Anſammeln, ſowie von dem Zu- und Abführen des Aufſchlagwaſſers.

146—147	Aufſchlagwaſſer, Waſſerleitungen, Wehre u. ſ. w.	341
148—149	Aufſtauung durch Ueberfall- und Schleuſenwehre	342
150—153	Stauhöhe und Stauweite	346
154—(155)	Staucurve, Waſſerſchwelle	357
156—159	Teiche, Teichdämme, Teichgerinne	365
160—163	Canäle, Gerinne und Röſchen	373
114—165	Röhrenleitungen, Regulirung der Bewegung des Waſſers	382
166—168	Zuſammengeſetzte Röhrenleitungen	388

Viertes Capitel.

Von den verticalen Wasserrädern.

§.		Seite
169	Die Wasserkraft, Arbeitsvermögen des Wassers	398
170	Hydraulische Umtriebsmaschinen, verticale und horizontale Wasserräder und Wassersäulenmaschinen	400
171—172	Zellenräder, oberschlägige Wasserräder	401
173—174	Radbimensionen, Radhalbmesser, Radtiefe, Radweite u. s. w.	404
175—176	Schaufelzahl und Schaufelungsmethoden	407
177—178	Schützen, Eintritt des Wassers in die Wasserräder	412
179—(180)	Schaufelwinkel, Schaufelanzahl	417
181—183	Einführung des Wassers in das Rad	421
184	Stoßwirkung des Wassers	427
185—186	Druckwirkung des Wassers, wasserhaltende Bogen	429
187—188	Einfluß der Centrifugalkraft	434
189—193	Stärke der Arme, Welle und Zapfen der Wasserräder	438
194	Construction und Lagerung der Wasserräder	451
195	Zapfenreibung und Gewicht der Wasserräder	455
196	Total- und Maximalleistung der Wasserräder	458
197	Effective Radleistungen	460
198—200	Rückenschlägige Wasserräder	462
201—205	Mittelschlägige Wasserräder, Kropfräder	468
206—209	Leistung der Wasserräder im Kropfgerinne	480
210—212	Unterschlägige Wasserräder	493
213—214	Wasserverlust bei unterschlägigen Wasserrädern	497
215—216	Leistung unterschlägiger Wasserräder	502
217	Theilung der Wasserkraft	506
218—220	Freihängende unterschlägige Wasserräder (Schiffmühlenräder)	508
221—225	Poncelet'sche Wasserräder	514
226—227	Leistungen der Poncelet'schen Wasserräder	525
228	Kleine Wasserräder von abweichenden Constructionen, Literatur	528

Fünftes Capitel.

Von den horizontalen Wasserrädern (Turbinen)

229	Horizontale Wasserräder, Turbinen u. s. w.	532
230—231	Stoßräder, Stoß- und Druckräder	533
232—234	Druckräder, Borda's und Burdin's Turbinen	538
235—237	Tangentialräder, Poncelet'sche und Zuppinger'sche Turbinen	543
238	Schwamkrug's liegende Turbinen	553
239	Strahlturbinen	555
240—241	Danaiden	558
242—244	Reactions- oder Segner'sche Wasserräder	562
245—247	Schottische, Combe'sche und Cadiat'sche Turbinen	570

§.		Seite
248	Fourneyron'sche Turbinen	576
249	Turbine von Francis, mit äußerer Beaufschlagung	577
250—254	Theorie der Reactionsturbinen mit Leitschaufeln	584
255	Theorie der Turbinen ohne Leitschaufeln	589
256	Allgemeine Theorie der Turbinen	592
257—258	Schützenstellung, Etagenräder u. s. w.	595
259	Druckturbinen	599
260—261	Berechnung der Leistung der Reactionsturbinen	601
262—264	Anordnung und Construction der Leitschaufelturbinen	606
265—267	Anordnung und Construction der Turbinen ohne Leitschaufeln	616
268	Theorie der Turbinen mit äußerer Beaufschlagung	625
269—270	Welle, Zapfen und Zapfenlager der Turbinen	629
271—273	Vergleichungen und erfahrungsmäßige Leistungen der Turbinen	635
274	Girard's Hydropneumatisation der Turbinen	640
275	Boyden's Diffuser der Turbinen	642
276—277	Turbinen von Fontaine, Henschel und Jonval	645
278—282	Theorie und Construction der Henschel'schen Turbinen u. s. w.	650
283	Regulirungsmittel der Turbinen von Fontaine, Heuschel u. s. w.	658
284—287	Erfahrungsmäßige Leistungen dieser Turbinen	661
288—290	Vergleichung der Turbinen mit einander u. mit anderen Wasserrädern	667
291	Hänel'sche Turbinen mit Rückenschaufeln	670
292	Schiele'sche Turbinen	673
293	Schraubenturbinen von Plataret	676
294	Thomson's Turbinen	681
295	Turbinen mit horizontaler Are	684
296	Girard's Schraubenrad, Literatur	687

Sechstes Capitel.

Von den Wassersäulenmaschinen.

297	Wassersäulenmaschinen	690
298—299	Einfallröhren, Treibcylinder	693
300—301	Treibkolben, Liderung, Treibkolbenstange	699
302	Steuerung, Kolbensteuerung u. s. w.	703
303—305	Steuerhahn, Steuerkolben, Steuerventile, Steuerschieber	705
306	Eigenthümlichkeit der Steuerung der Wassersäulenmaschinen	709
307—308	Hülfsmittel der regelmäßigen Steuerung, Steuerungsarten	711
309—310	Sperrhaken, Gewichtssteuerung	715
311—312	Hülfswassersäulenmaschine	721
313	Steuercylinder	725
314	Wassersäulenmaschine auf Alte Mordgrube	727
315	Wassersäulenmaschine in Huelgoat	730
316	Wassersäulenmaschine auf der Grube Centrum	733
317—318	Balancier, Stellhähne der Wassersäulenmaschinen	735
319—324	Berechnung der Leistung der Wassersäulenmaschinen	738
325—326	Berechnung der Steuerung derselben	753
327	Steuerwasserquantum	759

§.		Seite
328	Erfahrungsmäßige Leistung der Wassersäulenmaschinen	760
329	Vergleichung der Wassersäulenmaschinen mit Wasserrädern	763
330	Ketten- und Wassersäulenrad, Literatur	764

Siebentes Capitel.

Von den Windrädern.

331—333	Windräder, Flügelräder, Windflügel	768
334—335	Windmühlen, Bock- und Thurmmühlen	771
336—337	Kraftregulirung der Windmühlen	776
338—339	Windrichtung, Windgeschwindigkeit	779
340—342	Anemometer	781
343	Berechnung des Windstoßes	786
344	Vortheilhaftester Stoßwinkel	787
345	Berechnung der Leistung der Windräder	790
346	Reibung am Halse der Windräder	793
347	Erfahrungen über die Leistung der Windräder, Erfahrungsformel	795
348	Smeaton's Regeln, Literatur	796

Zweiter Abschnitt.

Von der Wärme, von den Dämpfen und von den Dampfmaschinen.

Erstes Capitel.

Von den Eigenschaften der Wärme.

349	Wärme, Aetherschwingungen	799
350	Thermometer und Pyrometer	801
351	Quecksilberthermometer	801
352	Pyrometer, Metallpyrometer	803
353	Metallthermometer	804
354	Luftpyrometer	805
355	Längenausdehnung durch die Wärme	807
356	Ausdehnungscoefficient, Ausdehnung der Maßstäbe	808
357	Compensationspendel	810
358	Ausdehnungskraft der Wärme	813
359	Veränderung der Festigkeit der Metalle durch die Wärme	815
360	Flächen- und Raumausdehnung durch die Wärme	816
361	Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten, insbesondere des Quecksilbers	818
362	Ausdehnung des Wassers	820
363	Ausdehnung der Luft	822
364	Absolute Nullpunkte, Absolute Temperatur	823
365—366	Ausstrahlung, Durchstrahlung, Reflexion der Wärme	825

§.		Seite
367	Wärmeleitung	827
368—370	Abkühlung, Abkühlungsgeschwindigkeit u. s. w.	828
371—372	Schmelzen, Verdampfen, Sieden	836
373—374	Wärmecapacität, Wärmeeinheit, specifische Wärme	840
375	Specifische Wärme der Gase	843
376	Das Poisson'sche Gesetz	844
377	Verhältniß der specifischen Wärme bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen	845
(378)—379	Arbeit der Wärme, mechanisches Aequivalent der Wärme	848
380	Latente Wärme	853

Zweites Capitel.

Von den Wasserdämpfen.

381—382	Dampf, Expansivkraft und Temperatur desselben	856
383—385	Versuche über die Expansivkraft der Wasserdämpfe	858
386	Ergebnisse dieser Versuche	862
387—388	Formeln und Tabellen zur Berechnung der Expansivkraft des Wasserdampfes	865
389	Dichtigkeit des Wasserdampfes	876
390—391	Specifisches Dampfvolumen	877
392	Expansivkraft und Dichtigkeit der Dämpfe überhaupt	881
393	Destillation und Condensation	883
394	Gas- und Dampfgemenge	884
395—396	Feuchte Luft, Hygrometer, Psychrometer	886
397—398	Verbrennung, die hieraus hervorgehende Wärmemenge	889
399	Brennstoffe, Verbrennungswärme derselben	893
400	Luftmenge zur Verbrennung	894
401	Brennstoff- und entsprechende Wärmemenge, Literatur	898

Drittes Capitel.

Von den Dampferzeugungsapparaten.

402—403	Dampfkessel, Dampfkesselformen	902
404	Heizfläche der Dampfkessel	906
405—406	Größe und Dimensionen der Dampfkessel	908
407—411	Dicke der Kesselwände	912
412—413	Ebene Kesselwände, Stehbolzen	921
414	Verbindung der Kesselbleche durch Nieten	925
415	Kesselöfen, Feuerraum derselben	925
416	Rauchfreie Verbrennung	927
417—418	Feuercanäle, Kesselanlagen	928
419	Gasheizung	932
420—422	Schornsteine oder Essen, Essenzug	934

§.		Seite
(423)	Wirkungsgrad einer Kesselanlage	942
424—425	Speiseapparate der Dampfkessel	945
426	Der Injecter, die Giffard'sche Speisepumpe	949
427	Schwimmer, Probirhähne, Wasserstandsröhren	952
428—432	Manometer, offene, Luft-, Differenzial- und Metallmanometer	955
433—436	Sicherheitsventile mit Gewichten und mit Federn	963
437	Oeffnen und Entleeren der Dampfkessel	972
438	Kesselproben, Literatur	973

Viertes Capitel.

Von den Dampfmaschinen.

439	Dampfmaschinen, Eintheilung derselben	976
440	Expansion und Condensation des Dampfes	977
441—444	Dampfcylinder, Kolben, Kolbenstange und Stopfbüchse	979
445	Dampfrohr, Regulirungsklappe u. s. w.	986
446—447	Steuerung, Schiebersteuerung	988
448—449	Ventilsteuerung, Dampfventile	992
450	Condensator, Einspritz- und Oberflächen-Condensator	997
451—453	Dampfmaschinensysteme	1000
454	Excentriksteuerung	1005
455	Watt'sche Dampfmaschine	1007
456—457	Bewegung des Dampfschiebers, Voreilen desselben	1009
458	Bewegungsgesetz der Kurbel und des Schiebers	1012
459	Schiebercurve	1013
460	Excentriksteuerung	1015
461	Doppelexcentriks mit Steuerrahmen	1017
462	Ventilsteuerung mit Excentriks	1018
463	Ventilsteuerung doppeltwirkender Dampfmaschinen	1021
464	Ventilsteuerung einfachwirkender Dampfmaschinen	1025
465	Regulirung der Kolbenspiele durch einen Katarakt	1028
466—467	Dampfschieber und Excentrik mit Stufen	1030
468—470	Expansionsschieber, Doppelschieber	1035
471	Die Meier'sche Steuerung der Dampfmaschinen	1041
472	Schiebersteuerung mit beweglichem Sitz	1045
473	Steuerung der Corliß-Dampfmaschinen	1047
474—475	Die Woolf'schen Dampfmaschinen	1049
476	Die Dampfmaschine von Sims	1055
477	Eine oscillirende Dampfmaschine von Alban	1057
478	Arbeit des Dampfes ohne Expansion	1060
479	Wirkung des Dampfes durch Expansion	1062
480	Leistung des Dampfes nach dem Mariotte'schen Gesetze	1063
481	Leistung des Dampfes nach Pambour (Navier)	1065
482	Leistung des Dampfes in zwei cylindrigen Maschinen	1067
483	Leistung des Dampfes nach dem Potenzialgesetze	1069
(484—485)	Anwendung der mechanischen Wärmetheorie	1072
(486)	Das adiabatische Pressungsgesetz	1076

§.		Seite
487	Leistung einer Dampfmaschine nach der mechanischen Wärmetheorie	1079
488—490	Leistung des Dampfes bei einer gegebenen Brennstoffmenge	1083
491	Dampfindicator von Watt	1089
492	Dampfindicator von Clair	1091
493—495	Indicatorcurven, Schieberdiagramme	1095
496	Die Arbeitsverluste der Dampfmaschinen	1100
497—498	Arbeitsverlust durch den schädlichen Raum	1101
499	Arbeitsverlust durch die Kolbenreibung	1104
500	Maximalleistung der Dampfmaschinen	1106
501—502	Wirkungsgrade der Dampfmaschinen	1108
503—504	Pambour's Theorie der Dampfmaschinen	1111
505—508	Anordnung und Dimensionsbestimmung der Dampfmaschinen	1117
509	Bestimmung der Injections- oder Kaltwassermenge	1127
510	Größe der Kaltwasserpumpe und der Speisepumpe	1128
311	Größe der Luft- und Warmwasserpumpe, sowie des Condensators	1129
512	Einige Hauptdimensionen und Verhältnisse der Dampfkessel- und Maschinenanlage	1131
513	Princip der calorischen Maschinen	1132
514	Calorische Maschinen	1134
515	Ericsson'sche calorische Maschine	1136
(516)	Leistungsfähigkeit der Ericsson'schen calorischen Maschinen	1139
517	Offene calorische Maschinen	1141
518	Gaskraftmaschinen	1143
519	Atmosphärische Gaskraftmaschine	1147
520	Dampfmaschinen mit überhitzten Dämpfen	1150
	Schlußanmerkung. Literatur	1153

Zweiter Theil.

Die

Anwendung der Mechanik auf Bauwerke

und

Umtriebsmaschinen.

Erste Abtheilung.

Die

Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

Erſte Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

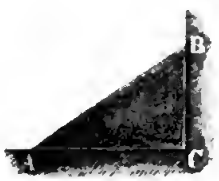
Erſtes Capitel.

Von dem Zuſammenhange und dem Drucke lockerer Maſſen.

Natürliche Böschung. Lockere oder halbflüſſige Maſſen §. 1
(franz. terres, demifluides; engl. earth-masses) ſind Anhäufungen kleiner Körper, wie Sand, Getreide, Schrot, Erde u. ſ. w. Sie ſind inſofern den Flüſſigkeiten ähnlich, als ſie, wie dieſe, einer Unterſtützung von außen bedürfen, um eine gewiſſe Form zu behalten. Doch iſt der Zuſammenhang der Theile einer lockeren Maſſe nicht ſo klein wie beim Waſſer; während das Waſſer in jedem Falle einer Einfaſſung bedarf, iſt dieſelbe bei den lockeren Maſſen nur in manchen Fällen nöthig, und während das Waſſer nur dann im Gleichgewichte iſt, wenn ſeine Oberfläche eine horizontale Lage hat, können lockere Maſſen auch bei einer geneigten Lage ihrer Oberfläche im Gleichgewichte beharren.

Wenn die Theile einer lockeren Maſſe nur durch die Reibung mit einander verbunden ſind, ſo iſt dieſelbe im Gleichgewichte, ſo lange ihre Oberfläche eine Neigung gegen den Horizont hat, welche den Reibungswinkel ϱ (ſ. I. §. 172) nicht übertrifft. Durch den Reibungswinkel wird die größte oder natürliche Böſchung (franz. talus naturel; engl. natural slope) einer lockeren Maſſe beſtimmt. Inſofern man unter Böſchung eines Abhanges AB, Fig. 1, das Verhältniß $\frac{b}{a}$ ſeiner horizontalen Länge $AC = b$ zur Höhe $BC = a$ verſteht, hat man dieſelbe $= cotang.\ \varrho$, oder, da $tang.\ \varrho$ dem Reibungscoefficienten φ gleich iſt, $\frac{b}{a} = cotang.\ \varrho = \frac{1}{\varphi}$.

Fig. 1.



Nach Martony de Köszegh iſt z. B. für möglichſt trockene Dammerde die natürliche Böſchung $\frac{b}{a} = 1{,}243$, für angefeuchtete Dammerde aber $\frac{b}{a} = 1{,}083$; hiernach beträgt der Böſchungswinkel im erſten Falle, $\varrho = 39^0$ und im zweiten, $\varrho = 43^0$.

Für ganz feinen Sand hat man die Böſchung $= {}^5/_3$, daher den Böſchungswinkel $= 31^0$ gefunden. Roggenkörner haben dem Verfaſſer $\varrho = 30^0$ gegeben, ſowie Erbſen, $\varrho = 27^0$, dagegen lockerer Haldenſturz, aus Gneisſtücken von 1 Cubikzoll bis 1 Cubikfuß beſtehend, ſowie Steinkohlenhaufen und Schlacken in Stücken von 3 bis 7 Cubikzoll im Mittel, $\varrho = 38$ Grad; für Schrotkörner hat man ferner $\varrho = 25^0$ und für Vogeldunſt $\varrho = 22^1/_2{}^0$ gefunden. Für Sägeſpäne iſt $\varrho = 44^0$.

Anmerkung. Verſuche über die natürliche Böſchung lockerer Maſſen werden durch Aufſchütten und Streichen dieſer Maſſen von unten nach oben angeſtellt.

§. 2 **Erddruck.** Wird eine lockere Maſſe Q, Fig. 2 und Fig. 3, von einer Seitenwand AB begrenzt, ſo übt ſie gegen dieſelbe einen gewiſſen, im Fol-

Fig. 2.

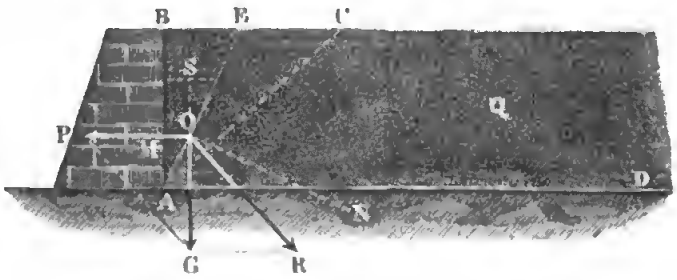
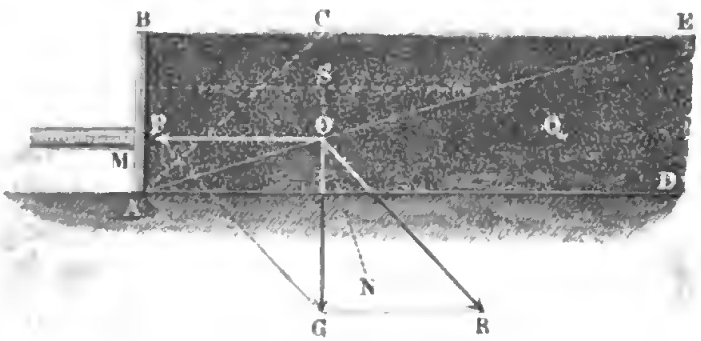


Fig. 3.



genden zu beſtimmenden Druck, den ſogenannten Erddruck (franz. poussée de terre; engl. pressure of earth), aus. Derſelbe iſt entweder ein activer oder ein paſſiver, je nachdem es darauf ankommt, durch dieſe Wand das

Herabrollen der Maſſe zu verhindern, oder das Hinaufſchieben derſelben zu bewirken. Der Druck der Maſſe auf dieſe Wand heißt im erſteren Falle gewöhnlich Erddruck ſchlecht weg, der Druck oder Widerſtand im zweiten Falle wird dagegen auch die Hebekraft der lockeren Maſſe (franz. butée de terre; engl. resistance of earth) genannt. Da die Reibung zwiſchen den Theilen der lockeren Maſſe unter einander, als paſſive Kraft, der Bewegung der Maſſe in jeder Richtung entgegenwirkt, ſo kommt ſie der Kraft, womit dem Herabgleiten der Maſſe entgegengewirkt wird, zu Hülfe, und wirkt dagegen der Kraft zum Hinaufſchieben der Maſſe entgegen, und es iſt folglich der Erddruck, im gewöhnlichen Sinne genommen, die kleinere, dagegen der Erdwiderſtand oder die ſogenannte Hebekraft der Erde die größere Kraft.

Der einfachſte und gewöhnlichſte Fall beſteht in der Begrenzung der lockeren Maſſe Q durch eine Verticalebene AB, welche von der Seitenfläche einer Mauer, der ſogenannten Futtermauer (franz. mur de revêtement; engl. retaining wall), wie Fig. 2, oder, nach Befinden, von der einer Holz- oder Bohlenwand (franz. palplanche; engl. walling-timber, sheet-piling), wie Fig. 3, gebildet wird.

Nehmen wir in einem ſolchen Falle an, daß die obere Fläche BC der lockeren Maſſe horizontal ſei und mit der verticalen Begrenzungsfläche einerlei Höhe $AB = h$ habe. Stellen wir uns vor, daß ſich von der ganzen Maſſe ein Keil ABE lostrenne und ſich nun auf der einen Seite gegen die Mauer und auf der anderen gegen die übrige Maſſe AEQ ſtütze; bezeichnen wir den noch unbeſtimmten Winkel AEB, welchen die Trennungsfläche AE mit der Horizontalebene BC einſchließt, durch α, die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikfußes der Maſſe durch γ, und ziehen wir nur ein Maſſenſtück von der Länge = Eins in Betracht, ſo haben wir für das Gewicht des gedachten Keiles ABE:

$$G = \frac{AB \,.\, BE}{2} \cdot 1 \,.\, \gamma = {}^1/_2\, h \,.\, h \cotg.\, \alpha \,.\, \gamma = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \cotg.\, \alpha.$$

Sieht man von der Reibung an der verticalen Bekleidungsfläche AB ab, ſo läßt ſich annehmen, daß dieſe Fläche nur den Druck $\overline{OP} = P$ aufnimmt, welcher gegen ſie rechtwinkelig, alſo horizontal gerichtet iſt, daß alſo auch eine gleich große entgegengeſetzt gerichtete Kraft $(-P)$ das Prisma ABE entweder auf der ſchiefen Ebene AE erhält oder auf derſelben hinaufſchiebt. Wir wiſſen aus Bd. I., §. 172 und §. 176, daß eine Kraft von einem Körper noch aufgenommen wird, wenn die Richtung derſelben nicht mehr als um den Reibungswinkel von der Normale der Bewegungsebene des Körpers abweicht, können daher auch hier vorausſetzen, daß die zweite Seitenkraft B des Gewichtes G von der Maſſe unterhalb AE aufgenommen werde, wenn

ihre Richtung OR um den Winkel $NOR = \varrho$ von der Normale ON zu AE abweicht. Da der Winkel:

$$NOG = EAD = AEB = \alpha$$

iſt, ſo hat man den Winkel ROG, um welchen die Seitenkraft R von den Verticalen abweicht entweder, wie in Fig. 4:

$$= NOG - NOR = \alpha - \varrho,$$

oder, wie in Fig. 5:

$$= NOG + NOR = \alpha + \varrho,$$

Fig. 4.

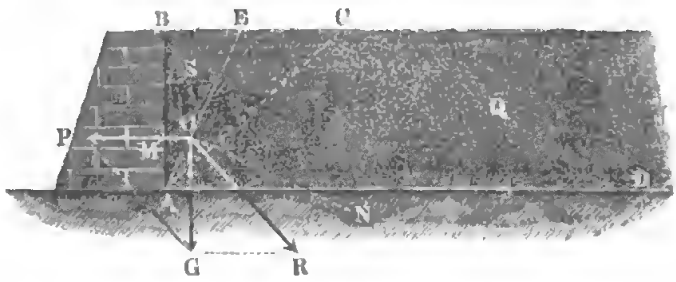
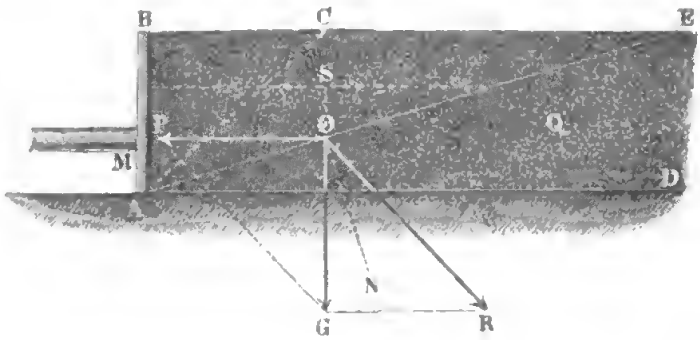


Fig. 5.



je nachdem man den Reibungswinkel ϱ auf der einen oder der anderen Seite von der Normale ON liegend annimmt, und es beſtimmt ſich hiernach der Druck gegen die verticale Wand AB,

$$P = G\ tang.\ OGP = G\ tang.\ ROG,$$

in dem einen Falle:

$$P = G\ tang.(\alpha - \varrho),$$

und im anderen:

$$P = G\ tang.(\alpha + \varrho),$$

alſo allgemein:

$$P = G\ tang.(\alpha \mp \varrho) = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma\ cotang.\ \alpha\ .\ tang.(\alpha \mp \varrho).$$

(Vergl. Bd. I., §. 176.)

Es iſt leicht zu ermeſſen, daß dieſer Ausdruck ſowohl den activen als den

paſſiven Erddruck angiebt, und zwar den erſteren bei Anwendung von *tang.* $(\alpha - \varrho)$, und den letzteren, wenn man *tang.* $(\alpha + \varrho)$ einführt.

Da bei Entwickelung dieſer Formel von der Reibung des Druckkeiles $A\,B\,C$ an einer Vorder- und Hinterfläche abgeſehen worden iſt, ſo giebt dieſelbe auch nur den Druck des laufenden Fußes auf eine ſehr lange Wand $A\,B$ an.

Prisma des grössten und kleinsten Erddruckes. Der im §. 3 vorſtehenden Paragraphen gefundenen Formel zufolge iſt der Erddruck noch von einem angenommenen Winkel α abhängig, und es muß daher dieſer Winkel erſt beſtimmt werden, um mittels dieſer Formel den Erddruck berechnen zu können. Da der Ausdruck

$$P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma\, cotang.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho)$$

nicht allein für $\alpha = 90$ Grad, ſondern auch für $\alpha = \varrho$ Grad Null und für zwiſchenliegende Werthe von α poſitiv ausfällt, ſo giebt es jedenfalls für α einen Werth zwiſchen ϱ und 90 Grad, welcher auf ein Maximum von P führt, und da nun das Herabrollen der lockeren Maſſe durch die Wand in jedem Falle verhindert werden ſoll, ſo iſt demnach auch die Größe des zu beſtimmenden activen Erddruckes dieſem Maximalwerthe gleichzuſetzen. Jedenfalls kommt es bei Ermittelung dieſes Maximalwerthes nur darauf an, daß man zuſieht, für welches α, das Product *cotang.* α . *tang.* $(\alpha - \varrho)$ ein Maximum wird.

Es iſt *cotang.* α . *tang.* $(\alpha - \varrho)$ auch

$$= \frac{sin.\,(2\,\alpha - \varrho) - sin.\,\varrho}{sin.\,(2\,\alpha - \varrho) + sin.\,\varrho} = 1 - \frac{2\,sin.\,\varrho}{sin.\,(2\,\alpha - \varrho) + sin.\,\varrho},$$

und dieſe Größe um ſo größer, je größer *sin.* $(2\,\alpha - \varrho)$ wird; es fällt daher auch der Druck desjenigen Erdkeiles $A\,B\,E$ am größten aus, welcher durch das Maximum von *sin.* $(2\,\alpha - \varrho)$ beſtimmt iſt.

Nun iſt aber der Maximalwerth eines Sinus = Eins, daher hat man auch:

$$sin.\,(2\,\alpha - \varrho) = 1, \text{ oder } 2\,\alpha - \varrho = 90 \text{ Grad},$$

alſo den geſuchten Winkel:

$$\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2},$$

ſowie die Größe des activen Erddruckes:

$$P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma\, cotang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) . tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

zu ſetzen, oder einfacher, da noch $cotang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) = tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$ iſt,

$$\text{I.}\quad P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2, \text{ wofür auch}$$

$$P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \cdot \frac{1 - sin.\, \varrho}{1 + sin.\, \varrho}$$ geſetzt werden kann.

Der Winkel BAE, Fig. 4, welcher $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ zu 90^0 ergänzt, iſt $= \frac{90^0 - \varrho}{2}$ = der halben Ergänzung des Reibungswinkels ϱ zu 90 Grad, und daher durch Halbiren des Winkels BAC leicht zu beſtimmen.

Da hingegen der Ausdruck

$$P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma\, cotang.\, \alpha\, .\, tang.\, (\alpha + \varrho)$$

für $\alpha = 0$ Grad, ſowie für $\alpha = 90^0 - \varrho$ auf einen unendlich großen Werth und dagegen für Winkelwerthe zwiſchen 0 und $(90 - \varrho)$ Grad auf poſitive endliche Werthe führt, ſo giebt es auch innerhalb dieſer Grenzen einen Minimalwerth von P, welchem alſo auch der paſſive Erddruck, bei welchem es nur darauf ankommt, ein Hinaufſchieben oder Zurückweichen der lockeren Maſſe überhaupt zu bewirken, gleichzuſetzen iſt. Nun iſt aber

$$cotang.\, \alpha\, .\, tang.\, (\alpha + \varrho)$$

auch

$$= \frac{sin.\,(2\,\alpha + \varrho) + sin.\, \varrho}{sin.\,(2\,\alpha + \varrho) - sin.\, \varrho} = 1 + \frac{2\, sin.\, \varrho}{sin.\,(2\,\alpha + \varrho) - sin.\, \varrho},$$

und der letztere Bruch um ſo kleiner, je größer $sin.\,(2\,\alpha + \varrho)$ ausfällt; es läßt ſich daher für dieſen Fall

$$sin.\,(2\,\alpha + \varrho) = 1, \text{ oder } 2\,\alpha + \varrho = 90 \text{ Grad},$$

d. i. $\alpha = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$ zu ſetzen.

Dieſer Werth giebt die Größe des paſſiven Erddruckes:

$$P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma\, cotang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right),$$

d. i.:

$$\text{II.}\quad P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Auch iſt $P = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \cdot \frac{1 + sin.\, \varrho}{1 - sin.\, \varrho}$.

Wenn alſo der Horizontaldruck der Wand AB, Fig. 5, gegen die Erdmaſſe die durch dieſe Formel beſtimmte Größe nicht erreicht, ſo weicht auch die lockere Maſſe noch nicht zurück; ſo wie aber derſelbe dieſer Größe gleich kommt, ſo ſchiebt ſich ein Maſſenkeil ABE zurück, deſſen Auflagerungsfläche AE den Winkel $EAD = \frac{90 - \varrho}{2} = {}^1/_2\, BAC$ mit der Baſis AD bildet.

Beiſpiel. Wenn das ſpecifiſche Gewicht einer 6 Fuß hoch aufgeſchütteten Getreidemaſſe 0,776 iſt (ſ. Band I., §. 372, Anmerk. 1), ſo übt dieſelbe gegen eine verticale Seitenwand auf den laufenden Fuß Länge den (activen) Druck

$$P = \tfrac{1}{2} . 6^2 . 0{,}776 . 61{,}75 \, [tang. (45^0 - 15^0)]^2 = 18 . 61{,}75 . 0{,}776 . (tang. 30^0)^2$$
$$= 862{,}5 . 0{,}577352 = 287{,}5 \text{ Pfund}$$

aus, und es ist dagegen die den passiven Druck zu überwindende Kraft:

$$= \tfrac{1}{2} . 6^2 . 0{,}776 . 61{,}75 \, [tang. (45^0 + 15^0)]^2 = 921{,}9 \, (tang. 60^0)^2$$
$$= 862{,}5 . 3 = 2587{,}5 \text{ Pfund}$$

nöthig, um diese Masse durch eine verticale Wand AB zurückzuschieben.

Erd- und Wasserdruck. Sowohl der active als auch der passive §. 4
Druck lockerer Massen läßt sich leicht mit dem Druck des Wassers vergleichen. Der Druck des Wassers gegen eine senkrechte Fläche von der Breite = Eins und Höhe = h ist, wenn die Dichtigkeit des Wassers = γ_1 gesetzt wird, nach Bd. I., §. 356:

$$P_1 = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma_1;$$

dagegen der Erddruck gegen diese Fläche:

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2} h^2 \varepsilon \gamma_1 \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

wenn ε noch das specifische Gewicht der lockeren oder Erdmasse bezeichnet; es ist folglich der Erddruck $\varepsilon \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ mal so groß als der des Wassers, oder es läßt sich dieser Druck $P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma_1$ gleichsetzen dem einer vollkommenen Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

oder deren Dichtigkeit

$$\gamma_1 = \gamma \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ ist.}$$

Es nimmt also auch der Druck lockerer Massen, wie der des Wassers, von oben nach unten gleichmäßig zu und ist überhaupt der Druckhöhe (s. Bd. I., §. 355), sowie der gedrückten Fläche proportional. Auch läßt sich hieraus folgern, daß für jede beliebige, dem Erddrucke ausgesetzte verticale Fläche die Druckhöhe von der Oberfläche der Masse senkrecht herab bis zum Schwerpunkte der gedrückten Fläche zu messen ist.

Endlich fällt, dem Vorstehenden zufolge, der Mittelpunkt des Erddruckes, d. i. der Angriffspunkt M des ganzen Erddruckes auf eine ebene Wand, mit dem Mittelpunkte des Wasserdruckes (s. Bd. I., §. 357) zusammen, steht also im vorliegenden Falle, wo die gedrückte Fläche ein Rechteck ist, um $AM = \tfrac{1}{3} AB = \tfrac{1}{3} h$, d. i. um ein Drittel der Höhe von der Basis, oder um $BM = \tfrac{2}{3} h$, d. i. um zwei Drittel derselben von der Oberfläche der lockeren Masse ab.

Cohäsion lockerer Massen. Wir haben bei der obigen Entwicke- §. 5
lung noch die Cohäsion, oder den mit der Berührungsfläche wachsenden

Zuſammenhang der Maſſentheile unter einander außer Acht gelaſſen; da dieſelbe aber bei weniger lockeren Maſſen, wie z. B. bei feſtgeſtampfter Erde, nicht unbedeutend iſt, ſo wollen wir ſie auch noch in die Formeln einführen. Setzen wir den Cohäſionsmodul, oder die Kraft des Zuſammenhanges für die Berührungsfläche Eins, $= \varkappa$, ſo haben wir für den in Fig. 6 und 7 repräſentirten Fall die Kraft zum Trennen des Prismas ABE in der Fläche AE:

$$K = 1 \,.\, AE \,.\, \varkappa = \frac{\varkappa h}{\sin.\, \alpha}.$$

Dieſe Kraft wirkt jeder Bewegung entgegen, und daher von unten nach oben, wenn das Herabgleiten zu verhindern iſt (Fig. 6), dagegen aber von oben nach unten, wenn das Hinaufſchieben des Keiles ABE hervorgebracht werden ſoll (Fig. 7); wenn es ſich folglich um die Beſtimmung des paſſiven Erddruckes handelt, ſo iſt anzunehmen, daß der verticale Component

$$V = K \sin.\, \alpha = \frac{\varkappa h}{\sin.\, \alpha} \cdot \sin.\, \alpha = \varkappa h$$

dem Gewichte, und der horizontale Component deſſelben,

Fig. 6.

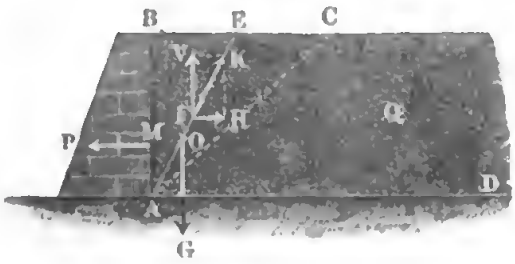
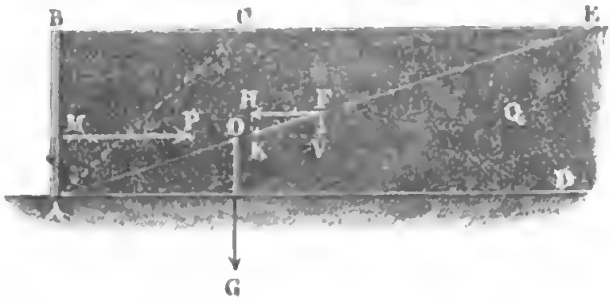


Fig. 7.



$$H = K \cos.\, \alpha = \frac{\varkappa h}{\sin.\, \alpha} \cos.\, \alpha = \varkappa h \, cotang.\, \alpha$$

dem Drucke P entgegenwirkt.

Führen wir daher in der Formel $P = G \, tang.\, (\alpha - \varrho)$, ſtatt P, $P + \varkappa h \, cotang.\, \alpha$ und ſtatt G, $G - \varkappa h$ ein, ſo erhalten wir für den activen Erddruck die Bedingungsgleichung:

$$P = (G - \varkappa h) \, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa h \, cotang.\, \alpha.$$

Subſtituiren wir nun noch $G = {}^1/_2 \, h^2 \gamma \, cotang.\, \alpha$, ſo ergiebt ſich:

$$P = ({}^1/_2 \, h^2 \gamma \, cotang.\, \alpha - \varkappa h) \, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa h \, cotang.\, \alpha.$$

Es iſt aber zweckmäßig, an dieſer Formel noch folgende Umformung vorzunehmen:

$$P = h \left[({}^1/_2 \, h \gamma + \varkappa \, cotang.\, \varrho) \, cotang.\, \alpha \, tang.\, (\alpha - \varrho) \right.$$
$$\left. - \varkappa \, cotang.\, \alpha - \varkappa \, (1 + cotang.\, \alpha \, cotang.\, \varrho) \, tang.\, (\alpha - \varrho) \right],$$

oder, da $tang.(\alpha-\varrho)=\frac{tang.\alpha-tang.\varrho}{1+tang.\alpha\,tang.\varrho}$

$$=\frac{tang.\alpha-tang.\varrho}{1+cotang.\alpha\,cotang.\varrho}\cdot cotang.\alpha\,cotang.\varrho \text{ iſt,}$$

$$P=h\left[(\tfrac{1}{2}h\gamma+\varkappa\,cotang.\varrho)\,cotang.\alpha\,tang.(\alpha-\varrho)-\varkappa(cotang.\alpha+cotang.\varrho-cotang.\alpha)\right],$$

d. i.:

$$P=h\left[(\tfrac{1}{2}h\gamma+\varkappa\,cotang.\varrho)\,cotang.\alpha\,tang.(\alpha-\varrho)-\varkappa\,cotang.\varrho\right].$$

Dieſe Kraft wird ein Maximum mit dem Producte $cotang.\alpha\,tang.(\alpha-\varrho)$. Das letztere aber iſt nach dem Obigen ein ſolches für $\alpha=45^0+\frac{\varrho}{2}$; es iſt daher der vollſtändige Horizontaldruck der Erdmaſſe gegen ihre verticale Bekleidung:

$$P=h\left((\tfrac{1}{2}h\gamma+\varkappa\,cotang.\varrho)\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2-\varkappa\,cotang.\varrho\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}h^2\gamma\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2-\varkappa h\,cotang.\varrho\left(1-\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2\right);$$

oder, da ſich $cotang.\varrho=\frac{2}{tang.\left(45^0+\frac{\varrho}{2}\right)-tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)}$, und

$$1-tang.\left[\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

$$=\left[tang.\left(45^0+\frac{\varrho}{2}\right)-tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)$$ ſetzen läßt,

$$P=\tfrac{1}{2}h^2\gamma\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2-2h\varkappa\,tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)$$

$$=h\,tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\left[\frac{h\gamma}{2}tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)-2\varkappa\right].$$

Dieſe Kraft iſt Null für $\tfrac{1}{2}h\gamma\,tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)=2\varkappa$, d. i. für

$$h=h_1=\frac{4\varkappa}{\gamma\,tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)}.$$

Auf dieſe Höhe h, läßt ſich alſo eine cohärente Maſſe ſenkrecht abſchneiden, ohne daß ein Nachrollen erfolgt. Umgekehrt, läßt ſich aus der Höhe h_1, auf welche man eine ſolche Maſſe ſenkrecht abſchneiden kann, der Cohäſionsmodul finden, indem man ſetzt:

$$\varkappa = {}^1/_4\, h_1\, \gamma\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right).$$

Es fällt alſo auch die Cohäſion einer Maſſe um ſo größer oder kleiner aus, je größer oder kleiner die Höhe h_1 iſt, auf welche ſie ſich ſenkrecht abſchneiden läßt.

Führen wir die Höhe h_1 in die Formel P ein, ſo erhalten wir die Größe des activen Erddruckes:

$$\text{I.}\quad P = \frac{h\gamma}{2}(h - h_1)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Bei Sand, Getreide, Schrot, ſowie bei aufgelöſter und friſch gegrabener Erde iſt h_1 ziemlich Null. Bei zuſammengedrückter oder feucht geweſener Erde iſt dieſelbe oft beträchtlich, und zwar weniger bei Gartenerde und mehr bei thoniger oder lehmiger Erde. Bei lockerer etwas feuchter Dammerde fand z. B. Martony $h_1 = 0{,}9$ Fuß, dagegen bei ganz mit Waſſer durchweichter Erde, $h_1 = 0$. Dichte Pflanzenerde läßt ſich höchſtens 3 bis 6 Fuß, thonige Erde aber höchſtens 10 bis 12 Fuß hoch ſenkrecht abgraben.

In den meiſten Fällen der Anwendung iſt es rathſam, die Cohäſionskraft unbeachtet zu laſſen.

Bei Beſtimmung des paſſiven Erddruckes wirkt die Cohäſionskraft $K = \varkappa h$ entgegengeſetzt; es iſt daher auch in der letzten Formel für P, nicht allein ſtatt ϱ, $-\varrho$, auch ſtatt $\varkappa$, $-\varkappa$ einzuführen, um den negativen Druck oder den Widerſtand der Erdmaſſe gegen das Fortſchieben zu beſtimmen. Hiernach iſt alſo der letztere, d. i. die Größe des paſſiven Erddruckes:

$$P = h\, tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\left[\frac{h\gamma}{2}\, tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) + 2\varkappa\right] \text{ oder}$$

$$\text{II.}\quad P = \frac{h\gamma}{2}(h + h_2)\left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

wenn man noch

$$\frac{4\varkappa}{\gamma\, tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{h_1\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = h_1\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

durch h_2 bezeichnet.

§. 6 **Moment des Erddruckes.** Durch die Cohäſion der Erdmaſſe wird nicht allein die Größe, ſondern auch der Angriffspunkt der Kraft verändert; um den letzteren angeben zu können, iſt es noch nöthig, das Moment der Kraft zu beſtimmen. Der Ausdruck

$$P = \frac{h\,(h - h_1)\,\gamma}{2}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

für den activen Erddruck beſteht aus zwei Theilen, nämlich aus dem Theile

$$P_1 = {}^1/_2\, h^2\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

deſſen Angriffspunkt M um die ſenkrechte Höhe $BM = {}^2/_3\, h$ unter der Oberfläche BC der Maſſe liegt, welcher alſo in Hinſicht auf den Fuß A der Wand AB das Moment

$$P_1 \,.\, {}^1/_3\, h = {}^1/_6\, h^3\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

hat, und aus dem Theile:

$$P_2 = - {}^1/_2\, h\, h_1\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

welcher der in der Mitte F der Fläche AE angreifenden Cohäſionskraft der Maſſe entſpricht, daher um ${}^1/_2\, h$ unter B angreift, und das Moment

$$P_2 \,.\, {}^1/_2\, h = - {}^1/_4\, h^2\, h_1\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ beſitzt.}$$

Es iſt folglich das Moment des ganzen Erddruckes hinſichtlich A:

$$Pa = {}^1/_6\, h^3\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - {}^1/_4\, h^2\, h_1\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{h^2\, \gamma}{2} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 ({}^1/_3\, h - {}^1/_2\, h_1),$$

und daher der Hebelarm deſſelben oder der Abſtand AM ſeines Angriffspunktes M von dem Fuße A:

$$a = \frac{{}^1/_2\, h^2\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 ({}^1/_3\, h - {}^1/_2\, h_1)}{{}^1/_2\, h\, \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 (h - h_1)} = \frac{2\,h - 3\,h_1}{h - h_1} \cdot \frac{h}{6}$$

oder annähernd, wenn h_1 klein gegen h iſt,

$$a = \left(1 - {}^1/_2\, \frac{h_1}{h}\right) \frac{h}{3}.$$

Für den Angriffspunkt M des paſſiven Erddruckes erhält man den Abſtand $AM = a$, wenn man in den obigen Formeln $45^0 + \frac{\varrho}{2}$ ſtatt $45^0 - \frac{\varrho}{2}$, ſowie $(-x)$ ſtatt $+x$ einführt, und

$$\frac{4\,x}{\gamma\, tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = h_1 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

durch h_1 bezeichnet.

Es ist daher hier:

$$Pa = {}^1/_6\, h^3 \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + {}^1/_4\, h^2 h_2 \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

$$= {}^1/_2\, h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 ({}^1/_3\, h + {}^1/_2\, h_2),$$

und

$$a = \frac{2h + 3h_2}{h + h_2} \cdot \frac{h}{6}, \quad \text{annähernd} = \left(1 + {}^1/_2 \frac{h_2}{h}\right) \cdot \frac{h}{3}.$$

Beispiel. Man soll für eine Höhe von 16 Fuß die Größe und den Angriffspunkt des Druckes einer Erdmasse bestimmen, deren Reibungswinkel $\varrho = 40$ Grad, und Dichtigkeit $\gamma = 120$ Pfund beträgt, und welche sich, ohne nachzurollen, 4 Fuß hoch senkrecht abschneiden läßt.

Ohne Rücksicht auf die Cohäsion ist der active Erddruck:

$$P = {}^1/_2\, h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = {}^1/_2 \,.\, 16^2 \,.\, 120 \,.\, [tang.\,(45^0 - 20^0)]^2$$

$$= 15360\ (tang.\, 25^0)^2 = 3340 \text{ Pfund},$$

und der passive Erddruck:

$$P = {}^1/_2\, h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 15360\,(tang.\, 65^0)^2 = 70639 \text{ Pfund},$$

dagegen beträgt der erstere mit Rücksicht auf die Cohäsion, da $h_1 = 4$ ist,

$$P = {}^1/_2\, h\,(h - h_1)\,\gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 8 \,.\, (16 - 4) \,.\, 120\,(tang.\, 25^0)^2$$

$$= 11520\,.\,(tang.\, 25^0)^2 = 2505 \text{ Pfund},$$

und der letztere, da $h_2 = h_1 \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 4\,(tang.\, 25^0)^2 = 0{,}87$ Fuß ist,

$$P = {}^1/_2\, h\,(h + h_2)\,\gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 8(16 + 0{,}87) \,.\, 120\,(tang.\, 65^0)^2$$

$$= 16195\,(tang.\, 65^0)^2 = 74480 \text{ Pfund}.$$

Wenn man von der Cohäsion absieht, so kann man den Angriffspunkt des activen und passiven Erddruckes um ${}^2/_3\, h = {}^2/_3 \,.\, 16 = {}^{32}/_3 = 10^2/_3$ Fuß unter der Oberfläche, oder $5^1/_3$ Fuß über der Grundfläche befindlich annehmen. Mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang ist dagegen für den activen Erddruck

$$a = \frac{2h - 3h_1}{h - h_1} \cdot \frac{h}{6} = \frac{32 - 12}{16 - 4} \cdot \frac{16}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} = 4{,}44 \text{ Fuß},$$

und für den passiven Erddruck:

$$a = \frac{2h + 3h_2}{h + h_2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{32 + 2{,}61}{16{,}87} \cdot \frac{8}{3} = \frac{34{,}61}{16{,}87} \cdot \frac{8}{3} = 5{,}47 \text{ Fuß}.$$

§. 7 **Belastete Erdmasse.** Wenn die Erdmasse M, Fig. 8, auf ihrer horizontalen Oberfläche noch belastet ist, z. B. durch ein Gebäude, durch ein Pflaster BLE u. s. w., so erleidet die Bekleidung einen größeren Druck, als wenn die Erdmasse oben ganz frei bleibt. Setzen wir, um denselben zu ermitteln, den Druck auf jede Einheit (auf den Quadratfuß) der horizontalen Oberfläche, $= q$, so erhalten wir denselben auf die Oberfläche des ganzen Druckkeiles ABE:

$$= q \,.\, BE = q\,h\ cotang.\,\alpha,$$

und daher die Horizontalkraft, ohne Rückſicht auf die Cohäſion:

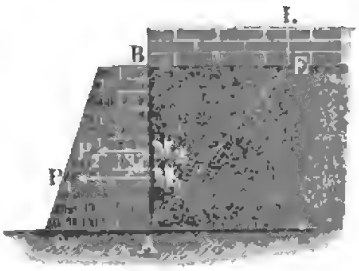
$$P = (G + q\,h\ cotang.\,\alpha)\ tang.\,(\alpha - \varrho)$$
$$= (\tfrac{1}{2}\,h^2\gamma + q\,h)\ cotang.\,\alpha\ tang.\,(\alpha - \varrho),$$

oder, $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ ſubſtituirt,

$$P = (\tfrac{1}{2}\,h^2\gamma + q\,h)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Angriffspunkt dieſes Druckes zu finden, zerlegen wir denſelben wieder in ſeine zwei Theile

Fig. 8.



$$P_1 = \tfrac{1}{2}\,h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

und:

$$P_2 = q\,h\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Der erſte Theil P_1 hat ſeinen Angriffspunkt M_1 um ein Drittel der Höhe h über dem Fußpunkte A, es iſt alſo ſein ſtatiſches Moment in Hinſicht auf dieſen Punkt

$$P_1\frac{h}{3} = \frac{h}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\,h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{h^3\gamma}{6}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

wegen des zweiten Theiles P_2 aber werden gleiche Theile der verticalen Wand gleich ſtark gedrückt, es geht folglich auch die entſprechende Mittelkraft, d. i. dieſer Theil des Druckes, durch den Schwerpunkt M_2 der Wand, ſteht alſo um die halbe Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)$ von A ab, und es iſt ſonach das ſtatiſche Moment dieſer zweiten Kraft

$$P_2\frac{h}{2} = \frac{h}{2}\cdot q\,h\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{q\,h^2}{2}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right].$$

Nun folgt das Moment des vollſtändigen Druckes:

$$Pa = (\tfrac{1}{6}\,h^3\gamma + \tfrac{1}{2}\,q\,h^2)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

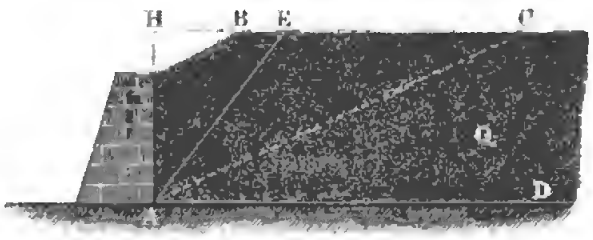
und daher der Hebelarm deſſelben oder der Abſtand $AM = a$ ſeines Angriffspunktes M von der Baſis:

$$a = \frac{(\tfrac{1}{6}\,h^3\gamma + \tfrac{1}{2}\,h^2 q)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2}{(\tfrac{1}{2}\,h^2\gamma + h\,q)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2} = \frac{\tfrac{1}{6}\,h^2\gamma + \tfrac{1}{2}\,h\,q}{\tfrac{1}{2}\,h\gamma + q}$$

$$= \left(\frac{h\gamma + 3\,q}{h\gamma + 2\,q}\right).\,\tfrac{1}{3}\,h.$$

(§. 8) **Druck der überſchütteten Erde.** Steht die Oberfläche BC der lockeren Maſſe Q, Fig. 9, über der Mauerkappe L und bildet ſie in der Nähe der Mauer den natürlichen Anhang, ſo läßt ſich der Druck dieſer Maſſe gegen die ſenkrechte Bekleidung mit Hülfe des höheren Calcüls wie folgt ermitteln. Es ſei h die Höhe AL der Bekleidung, und h_0 die Höhe LH der lockeren Maſſe über dem Kopfe L der Bekleidung; behalten dann die übrigen Bezeichnungen ihre früheren Bedeutungen, ſo iſt das Volumen der drückenden Maſſe $ALBE$:

Fig. 9.



$$V = {}^1/_2\,(\overline{AH^2}.\,cotang.\,AEH - \overline{LH^2}.\,cotang.\,LBH)$$
$$= {}^1/_2\,[(h+h_0)^2\,cotang.\,\alpha - h_0^2\,cotang.\,\varrho].$$

folglich das Gewicht derſelben:

$$G = {}^1/_2\,[(h+h_0)^2\,cotang.\,\alpha - h_0^2\,cotang.\,\varrho]\,\gamma$$

und ihr activer Druck gegen AL:

$$P = {}^1/_2\,[(h+h_0)^2\,cotang.\,\alpha - h_0^2\,cotang.\,\varrho]\,tang.\,(\alpha-\varrho)\,\gamma$$

oder, da $tang.\,(\alpha-\varrho) = \dfrac{tang.\,\alpha - tang.\,\varrho}{1 + tang.\,\alpha\,tang.\,\varrho} = \dfrac{cotang.\,\varrho - cotang.\,\alpha}{cotang.\,\varrho\,cotang.\,\alpha + 1}$ iſt,

$$P = {}^1/_2\,[(h+h_0)^2\,cotang.\,\alpha - h_0^2\,cotang.\,\varrho]\cdot\frac{cotang.\,\varrho - cotang.\,\alpha}{cotang.\,\varrho\,cotang.\,\alpha + 1}\,\gamma$$

$$= {}^1/_2(h+h_0)^2\left[cotang.\,\alpha - \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 cotang.\,\varrho\right]\cdot\frac{cotang.\,\varrho - cotang.\,\alpha}{cotang.\,\varrho\,cotang.\,\alpha + 1}\,\gamma.$$

Setzen wir nun:

$$cotang.\,\alpha = u,\quad cotang.\,\varrho = b \quad \text{und} \quad \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 cotang.\,\varrho = c,$$

ſo erhalten wir:

$$P = {}^1/_2\,(h+h_0)^2\,\frac{(u-c)\,(b-u)}{bu+1}\,\gamma,$$

und es iſt das Maximum von $\dfrac{(u-c)\,(b-u)}{bu+1}$ auszumitteln, um den Druck der lockeren Maſſe gegen AL zu finden, und daher $(bu+1)$mal Differenzial von $(u-c)\,(b-u)$ gleich $(u-c)\,(b-u)$mal Differenzial von $(bu+1)$, d. i.:

$$(bu+1)\,(b+c-2u) = (bu - bc + cu - u^2)\,b$$

zu ſetzen. (S. Bd. I., Art. 8. V.)

Hiernach folgt die Beſtimmungsgleichung:

$$bu^2 + 2u = (1+b^2)\,c + b,$$

deren Auflöſung:

$$u = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 + \frac{(1+b^2)c}{b}}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+bc}}{b} \text{ giebt.}$$

Führen wir die erſten Bezeichnungen wieder ein, ſo folgt:

$$\text{cotang. } \alpha = -\text{tang. } \varrho + \sqrt{\frac{1}{\text{cos. } \varrho^2} + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 \frac{1}{\text{sin. } \varrho^2}}$$

$$= -\text{tang. } \varrho + \sqrt{(\text{sec. } \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 (\text{cosec. } \varrho)^2}.$$

Nun iſt aber:

$$\frac{(u-c)(b-u)}{bu+1} = \frac{\partial (u-c)(b-u)}{\partial (bu+1)} = \frac{b+c-2u}{b}$$

$$= \frac{b^2+bc+2-2\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+bc}}{b^2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+bc}}{b}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{\text{cos. } \varrho} - \sqrt{(\text{tang. } \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2}\right]^2$$

es folgt daher der geſuchte active Erddruck:

$$P = {}^1/_2 (h+h_0)^2 \gamma . \left[\frac{1}{\text{cos. } \varrho} - \sqrt{(\text{tang. } \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2}\right]^2,$$

oder:

$$P = \left[\frac{h+h_0}{\text{cos. } \varrho} - \sqrt{(h+h_0)^2 \text{ tang. } \varrho^2 + h_0^2}\right]^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Meiſt iſt die Höhe h_0 der Ueberſchüttung klein gegen die Höhe h der Bekleidung, und daher annähernd:

$$P = \left[\frac{h+h_0}{\text{cos. } \varrho} - \left((h+h_0)\text{ tang. } \varrho + \frac{h_0^2}{2(h+h_0)\text{ tang. } \varrho}\right)\right]^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \left(\frac{(h+h_0)^2(1-\text{sin. } \varrho)^2}{\text{cos. } \varrho^2} - \frac{h_0^2(1-\text{sin. } \varrho)}{\text{sin. } \varrho}\right)\frac{\gamma}{2}$$

$$= \left((h+h_0)^2\left[\text{tang. }\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(1-\text{sin. } \varrho)}{\text{sin. } \varrho}\right)\frac{\gamma}{2}.$$

In vielen Fällen kann man ſogar das letzte Glied ganz vernachläſſigen und, wie oben (§. 3),

$$P = {}^1/_2 (h+h_0)^2 \gamma \left[\text{tang. }\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ ſetzen.}$$

Das Moment des activen Erddruckes:

$$P = \left((h+h_0)^2\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(1-sin.\varrho)}{sin.\varrho}\right)\frac{\gamma}{2}$$

läßt ſich wie dieſe Kraft ſelbſt als die Differenz zweier Theile anſehen, und fällt, dem Obigen entſprechend, in Hinſicht auf den Fußpunkt A,

$$Pa = \left((h+h_0)^3\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(3h+h_0)(1-sin.\varrho)}{sin.\varrho}\right)\frac{\gamma}{6}$$

aus.

Für den paſſiven Erddruck hat man:

$$Pa = \left((h+h_0)^3\left[tang.\left(45^0+\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(3h+h_0)(1+sin.\varrho)}{sin.\varrho}\right)\frac{\gamma}{6}$$

zu ſetzen.

Beiſpiel. Wäre im obigen Beiſpiel (§. 6) die Bekleidung h nur 12 Fuß hoch, folglich die Höhe der Ueberſchüttung $h_0 = 4$ Fuß, ſo hätte man, ohne Rückſicht auf Cohäſion, den activen Erddruck:

$$P = \left((h+h_0)^2\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(1-sin.\varrho)}{sin.\varrho}\right)\frac{\gamma}{2}$$
$$= 3340 - \frac{(1-sin.40^0)\ 16.60}{sin.40} = 3340 - \frac{0{,}3572}{0{,}6428}\cdot 960$$
$$= 3340 - 533 = 2807 \text{ Pfund},$$

und das Moment deſſelben:

$$Pa = \left((h+h_0)^3\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(3h+h_0)(1-sin.\varrho)}{sin.\varrho}\right)\frac{\gamma}{6}$$
$$= 3340.{}^1/_3(h+h_0) - 533.(h+{}^1/_3 h_0) = 3340.{}^{16}/_3 - 533.{}^{40}/_3$$
$$= 10707 \text{ Fußpfund},$$

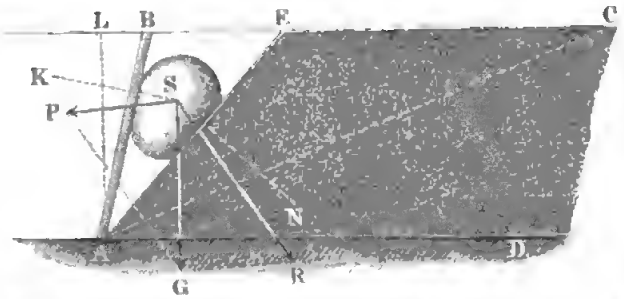
folglich den Hebelarm AM:

$$a = \frac{10707}{2807} = 3{,}81 \text{ Fuß},$$

alſo kleiner, als wenn die Maſſe vollſtändig bekleidet wäre.

§. 9 **Allgemeinere Theorie des Erddruckes.** Einer allgemeineren Theorie des Erddruckes läßt ſich der Fall zu Grunde legen, wo das Gewicht G einer Maſſe S, Fig. 10, von zwei ſchiefen Ebenen AB und

Fig. 10.



AE unterſtützt wird. Es iſt dann dieſes Gewicht G in zwei Seitenkräfte P und R zu zerlegen, deren Richtungen um die Reibungswinkel $PSK = \varrho_1$

und $RSN = \varrho$ von den Normalen SK und SN zu dieſen ſchiefen Ebenen abweichen. Sind α_1 und α die Neigungswinkel BAD und EAD dieſer Ebenen gegen den Horizont, ſo hat man:

$\angle RSG = \alpha - \varrho$, und $\angle PSG = 180^0 - (\alpha_1 + \varrho_1)$, daher:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,PGS}{sin.\,SPG} = \frac{sin.\,RSG}{sin.\,(PSG + PGS)} = \frac{sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,(\alpha_1 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)},$$

und den Druck gegen die erſte Ebene:

$$P = \frac{G\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,(\alpha_1 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)}.$$

Um dieſe Formel auf den Erddruck anzuwenden, dürfen wir nur AB als die Bekleidungswand betrachten, und annehmen, daß dieſelbe unter dem Winkel α_1 gegen den Horizont geneigt ſei.

Sehen wir noch von der Reibung der Maſſe an dieſer Fläche ab, ſo können wir, da der Querſchnitt des drückenden Prismas ABE:

$$F = \triangle AEL - \triangle ABL = \frac{h^2}{2}\,(cotang.\,\alpha - cotang.\,\alpha_1),$$

folglich das Gewicht deſſelben, $G = \frac{h^2\gamma}{2}\,(cotang.\,\alpha - cotang.\,\alpha_1)$ iſt:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2} \cdot \frac{sin.\,(\alpha - \varrho)\,(cotang.\,\alpha - cotang.\,\alpha_1)}{sin.\,[sin.\,\alpha_1 - (\alpha - \varrho)]}$$ ſetzen.

Nun iſt aber:

$$\frac{sin.\,[\alpha_1 - (\alpha - \varrho)]}{sin.\,(\alpha - \varrho)} = \frac{sin.\,\alpha_1\,cos\,(\alpha - \varrho) - cos.\,\alpha_1\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}$$
$$= sin.\,\alpha_1\,\,cotang.\,(\alpha - \varrho) - cos.\,\alpha_1$$
$$= sin.\,\alpha_1\,\,[cotang.\,(\alpha - \varrho) - cotang.\,\alpha_1],$$

daher folgt:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2} \cdot \frac{cotang.\,\alpha - cotang.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha_1\,[cotang.\,(\alpha - \varrho) - cotang.\,\alpha_1]},$$

oder wenn man $\alpha - \varrho = \psi$ ſetzt,

$$P = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cotang.\,(\psi + \varrho) - cotang.\,\alpha_1}{cotang.\,\psi - cotang.\,\alpha_1}.$$

Dieſer Ausdruck fällt nicht allein für $\psi = 0$, ſondern auch für $\psi = \alpha_1 - \varrho$, Null aus, und iſt für Werthe von ψ zwiſchen 0 und $\alpha_1 - \varrho$, poſitiv, daher giebt es auch zwiſchen dieſen Grenzen ein Maximum deſſelben. Es iſt auch:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{sin.\,(\psi + \varrho - \alpha_1)}{sin.\,(\psi + \varrho)} \cdot \frac{sin.\,\psi}{sin.\,(\psi - \alpha_1)}$$
$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cos.\,(\psi + \varrho - \alpha_1 - \psi) - cos.\,(\psi + \varrho - \alpha_1 + \psi)}{cos.\,(\psi + \varrho - \psi + \alpha_1) - cos.\,(\psi + \varrho + \psi - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cos.(\varrho - \alpha_1) - cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cos.(\varrho+\alpha_1) - cos.(2\psi+\varrho-\alpha_1) + cos.(\varrho-\alpha_1) - cos.(\varrho+\alpha_1)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1}\left(1 + \frac{cos.(\varrho - \alpha_1) - cos.(\varrho + \alpha)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1)}\right),$$

und hieraus leicht zu erſehen, daß dieſer Werth für $cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1) = 1$, alſo für $2\psi + \varrho - \alpha_1 = 0$, d. i. für

$$\psi = \frac{\alpha_1 - \varrho}{2}$$

ein Maximum wird.

Es halbirt alſo hier die Baſis AE des Prismas vom größten Druck den Winkel CAB zwiſchen der Ebene AB der Bekleidung und der Ebene AC des natürlichen Abhanges.

Setzen wir nun in der Formel für P,

$$\psi = \frac{\alpha_1 - \varrho}{2}$$

ein, ſo erhalten wir den geſuchten Druck gegen die ſchräge Wand AB:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2,$$

ſo daß für $\alpha_1 = 90^0$, wie oben, §. 3:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2}\left(\frac{sin.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{sin.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)}\right)^2 = \frac{h^2\gamma}{2}\left(\frac{sin.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{cos.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}\right)^2$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ folgt.}$$

(§. 10) Nehmen wir wieder eine verticale Wand an, und berückſichtigen wir dagegen die Reibung der Erdmaſſe an derſelben, ſo können wir:

$$P = \frac{G\,sin.(\alpha - \varrho)}{sin.(90 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)} = \frac{G\,sin.(\alpha - \varrho)}{cos.[\alpha - (\varrho + \varrho_1)]}$$

$$= {}^1/_2\,h^2\gamma\,\frac{sin.(\alpha - \varrho)\;cotang.\,\alpha}{cos.[\alpha - (\varrho + \varrho_1)]} \text{ ſetzen.}$$

Formen wir weiter um, ſo erhalten wir:

$$\frac{\sin.(\alpha-\varrho)\,\mathrm{cotang.}\,\alpha}{\cos.[\alpha-(\varrho+\varrho_1)]}=\frac{(\sin.\alpha\cos.\varrho-\cos.\alpha\sin.\varrho)\,\mathrm{cotang.}\,\alpha}{\cos.\alpha\cos.(\varrho+\varrho_1)+\sin.\alpha\sin.(\varrho+\varrho_1)}$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\cdot\frac{\mathrm{cotang.}\,\varrho-\mathrm{cotang.}\,\alpha}{\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)+\mathrm{tang.}\,\alpha}.$$

Der veränderliche Factor:

$$\frac{\mathrm{cotang.}\,\varrho-\mathrm{cotang.}\,\alpha}{\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)+\mathrm{tang.}\,\alpha}$$

iſt ein Maximum für:

$$\frac{\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)+\mathrm{tang.}\,\alpha}{(\sin.\alpha)^2}=\frac{\mathrm{cotang.}\,\varrho-\mathrm{cotang.}\,\alpha}{(\cos.\alpha)^2}$$

oder:

$$\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)+\mathrm{tang.}\,\alpha=\mathrm{cotang.}\,\varrho\,(\mathrm{tang.}\,\alpha)^2-\mathrm{tang.}\,\alpha,$$

d. i.:

$$(\mathrm{tang.}\,\alpha)^2-2\,\mathrm{tang.}\,\varrho\,\mathrm{tang.}\,\alpha=\mathrm{tang.}\,\varrho\,\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1).$$

Die Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung giebt:

$$\mathrm{tang.}\,\alpha=\mathrm{tang.}\,\varrho+\sqrt{(\mathrm{tang.}\,\varrho)^2+\mathrm{tang.}\,\varrho\,\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)}$$

$$=\mathrm{tang.}\,\varrho\,(1+\sqrt{1+\mathrm{cotang.}\,\varrho\,\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)}),$$

und daher:

$$\mathrm{cotang.}\,\alpha=\frac{\sqrt{1+\mathrm{cotang.}\,\varrho\,\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)}-1}{\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)}.$$

Nun iſt aber:

$$\frac{\mathrm{cotang.}\,\varrho-\mathrm{cotang.}\,\alpha}{\mathrm{cotang.}\,(\varrho+\varrho_1)+\mathrm{tang.}\,\alpha}=(\mathrm{cotang.}\,\alpha)^2,$$

daher fällt:

$$\frac{\sin.(\alpha-\varrho)\,\mathrm{cotg.}\,\alpha}{\cos.[\alpha-(\varrho+\varrho_1)]}=\frac{\sin.\varrho}{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{cotg.}\,\varrho\,\mathrm{cotg.}\,(\varrho+\varrho_1)}-1}{\mathrm{cotg.}\,(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sin.(\varrho+\varrho_1)\sin.\varrho+\cos.(\varrho+\varrho_1)\cos.\varrho}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\left(\sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

aus, und es folgt der active Erddruck:

$$P=\tfrac{1}{2}h^2\gamma\,\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\left(\sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2.$$

Noch läßt ſich wegen Kleinheit des Winkels ϱ_1,

$$\cos.\varrho_1=1,\ \text{daher}\ \sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}=\frac{1}{\sqrt{\sin.\varrho}},$$

ferner:

$cos.(\varrho+\varrho_1)^2=(cos.\varrho-sin.\varrho\,sin.\varrho_1)^2=cos.\varrho^2(1-2\,tang.\varrho\,sin.\varrho_1)$,

alſo:

$$\frac{1}{cos.(\varrho+\varrho_1)^2}=\frac{1+2\,tang.\varrho\;sin.\varrho_1}{cos.\varrho^2}$$

ſetzen, ſowie:

$$\sqrt{sin.(\varrho+\varrho_1)}=\sqrt{sin.\varrho+cos.\varrho\,sin.\varrho_1}=\sqrt{sin.\varrho}+{}^1/_2\frac{cos.\varrho\,sin.\varrho_1}{\sqrt{sin.\varrho}},$$

endlich:

$$\left(\sqrt{\frac{cos.\varrho_1}{sin.\varrho}}-\sqrt{sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{sin.\varrho}}-\sqrt{sin.\varrho}-{}^1/_2\frac{cos.\varrho\,sin.\varrho_1}{\sqrt{sin.\varrho}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-sin.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}}\right)^2-\frac{1-sin.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}}\cdot\frac{cos.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}}\cdot sin.\varrho_1$$

$$=\frac{(1-sin.\varrho)^2}{sin.\varrho}\left(1-\frac{cos.\varrho}{1-sin.\varrho}\cdot sin.\varrho_1\right),$$

daher folgt annähernd:

$$P={}^1/_2h^2\gamma\frac{(1+2tang.\varrho sin.\varrho_1)}{cos.\varrho^2}\cdot(1-sin.\varrho)^2\left(1-\frac{cos.\varrho}{1-sin.\varrho}\cdot sin.\varrho_1\right)$$

$$={}^1/_2h^2\gamma\frac{(1-sin.\varrho)(1-sin.\varrho)}{(1-sin.\varrho)(1+sin.\varrho)}\cdot\left(1+2tang.\varrho sin.\varrho_1-\frac{cos.\varrho}{1-sin.\varrho}sin.\varrho_1\right)$$

$$={}^1/_2h^2\gamma\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2\left(1-\left[tang.\left(45^0+\frac{\varrho}{2}\right)-2tang.\varrho\right]sin.\varrho_1\right).$$

Da ϱ zwiſchen 30 und 40 Grad ſchwankt und für $\varrho=35^0$,

$$tang.\left(45^0+\frac{\varrho}{2}\right)-2\,tang.\varrho=tang.\,62^1/_2{}^0-2\,tang.\,30^0$$

$$=1{,}921-1{,}155=0{,}766$$

iſt, ſo kann man in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung

$$P={}^1/_2\,h^2\gamma\left[tang.\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right)\right]^2(1-0{,}766\,sin.\varrho_1)$$

ſetzen.

Dieſe Kraft wirkt aber nicht rechtwinkelig gegen die ſenkrechte Wand, ſondern weicht von derſelben um den Reibungswinkel ϱ_1 ab. Der horizontale Component derſelben iſt:

$$P_1=P\,cos.\varrho_1,\text{ annähernd }=P,$$

und der verticale Component:

$$P_2=P\,sin.\varrho_1.$$

Nach den Verſuchen von Audé iſt der Coefficient der Reibung zwiſchen Sand und einer hölzernen Bekleidungswand im Mittel:

$$\varphi_1 = tang.\, \varrho_1 = 0{,}6, \text{ daher } sin.\, \varrho_1 = 0{,}515$$

und der entſprechende Reibungswinkel:

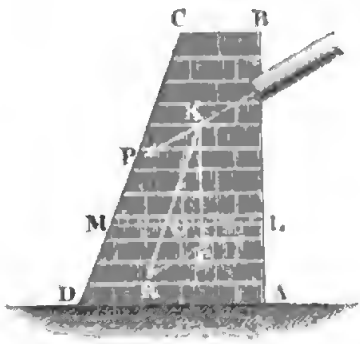
$$\varrho_1 = 31 \text{ Grad.}$$

Anmerkung. Die Verſuche Audé's mit beſonderen Inſtrumenten (Waagen) behandelt eine am Schluß des Capitels aufgeführte Schrift.

§. 11

Futtermauern. Eine Futtermauer AC, Fig. 11, kann durch eine Kraft $\overline{KP} = P$, fortgeſchoben oder umgeſtürzt werden. Denken wir uns dieſe Mauer aus in horizontalen Schichten über einander liegenden Steinen beſtehend, ſo können wir annehmen, daß ſich beim Nachgeben der Mauer eine horizontale Fuge ML bilde, über welcher der darüber liegende Theil CL entweder fortgleitet oder umſchlägt. Der Sicherheit wegen wollen wir auf das Bindemittel der Steine gar nicht Rückſicht nehmen, ſondern nur die Reibung zwiſchen den letzteren in Betracht ziehen. Aus der Kraft P und dem Gewichte G des Mauertheiles CL bildet ſich eine Mittelkraft $\overline{KR} = R$, von deren Größe und Richtung die Möglichkeit des Umſtürzens und Fortgleitens dieſes Mauerſtückes abhängt. Iſt der Winkel RKG, um welchen dieſe Mittelkraft von der Normale zur Trennungsfläche LM abweicht, kleiner als der Reibungswinkel ϱ, ſo kann ein Fortſchieben der Mauer nicht eintreten, (I., §. 172), und geht die Kraftrichtung nicht außerhalb der Trennungsfläche LM vorbei, ſondern durch dieſelbe hindurch, ſo iſt auch ein Umſtürzen um die Kante M unmöglich (I., §. 141). In den meiſten Fällen der Anwendung wird man finden, daß das Umſtürzen eher erfolgt als das Fortſchieben, weshalb bei der Anlage von Mauern vorzüglich auf das erſtere Rückſicht zu nehmen iſt. Das Umſtürzen oder Kippen wird beſonders noch dadurch erleichtert, daß es in der Regel nicht um die äußere Kante M, ſondern um einen der Mittelkraft R näher liegenden Punkt vor ſich geht, und zwar aus dem Grunde, weil der in M concentrirte Druck ein Nachgeben oder Zerbröckeln der Steine in der Nähe dieſes Punktes zunächſt herbeiführt.

Fig. 11.

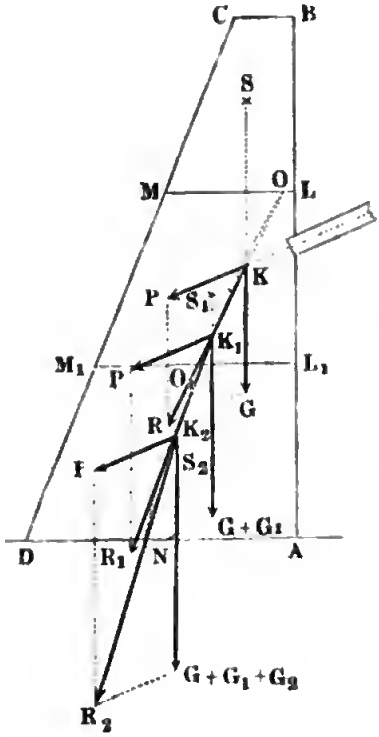


Wenn man für eine ganze Reihe Bruchflächen die Durchſchnittspunkte der Mittelkräfte R aufſucht, und dieſe durch eine Linie verbindet, ſo erhält man in dieſer die ſogenannte Widerſtandslinie (franz. ligne de résistance; engl. line of resistance), und man ſieht nun leicht ein, daß ein Umſtürzen der Mauer nicht eintritt, ſo lange dieſe Linie nicht aus der Mauer herausfällt.

Die Art und Weiſe, wie die Widerſtandslinie NO eines Pfeilers oder einer Mauer $ABCD$, Fig. 12 (a. f. S.), gefunden wird, iſt folgende. Man

zerlege die Mauer durch Horizontalebenen LM, L_1M_1 in Stücke, deren Gewichte G, G_1, G_2 sein mögen, und suche deren Schwerpunkte S, S_1 und S_2. Nun vereinige man das Gewicht G des ersten Stückes CL mit der Kraft P durch das Parallelogramm der Kräfte und bestimme dadurch die Mittelkraft $\overline{KR} = R$, deren Richtung die Ebene LM in einem Punkte O der gesuchten Widerstandslinie schneidet. Hierauf verlegt man den Angriffspunkt K dieser Kraft nach dem Punkte K_1, in welchem die verticale Schwerlinie durch den Schwerpunkt S_1 vom zweiten Körperstücke ML_1 die Richtung KR durchschneidet, und construirt aus P und der Summe $G + G_1$ der Gewichte von CL und ML_1 ein zweites Kräfteparallelogramm, wodurch sich die Mittelkraft $\overline{K_1R_1} = R_1$ bestimmt, deren Richtung in L_1M_1 einen zweiten Punkt O_1 der Widerstandslinie bestimmt. Verlegt man ebenso den Angriffspunkt K_1 nach dem Punkte K_2, in welchem die verticale Schwerlinie des dritten Körperstückes AM_1 die Richtung K_1R_1 trifft, und construirt aus P und $G + G_1 + G_2$ eine dritte Mittelkraft $\overline{K_2R_2} = R_2$, so durchschneidet deren Richtung die Basis AD in einem dritten Punkte N der Widerstandslinie, u. s. w.

Fig. 12.



§. 12 **Widerstandslinie.** Für eine parallelepipedische Mauer $ABCD$, Fig. 13 und Fig. 14, bestimmt sich die Widerstandslinie wie folgt.

1) Nehmen wir an, daß diese Mauer eine einfache Horizontalkraft P, Fig. 13, aufzunehmen habe. Es wird dadurch der Allgemeinheit nichts geschadet, da eine noch hinzutretende Verticalkraft als ein Gewicht angesehen werden kann. Nehmen wir an, daß die Richtung der Kraft P um $FK = a$ von dem Kopfe BC der Mauer abstehe, und denken uns eine horizontale Trennungsebene LM, welche um $KN = x$ unter K liegt. Aus der Kraft P, deren Angriffspunkt K nach der verticalen Schwerlinie FG der Mauer verlegt ist, und aus dem Gewichte G des Mauerstückes CL folgt die Mittelkraft R, welche LM in einem Punkte O der gesuchten Widerstandslinie schneidet, dessen Coordinaten in Hinsicht des Anfangspunktes K, $KN = x$

und $NO = y$ ſein mögen. Der Aehnlichkeit der Dreiecke KNO und KGR zufolge iſt

$$\frac{NO}{KN} = \frac{RG}{KG}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{P}{G} \text{ und daher } y = \frac{P}{G}\,x.$$

Fig. 13.

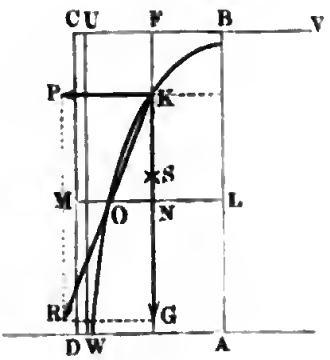
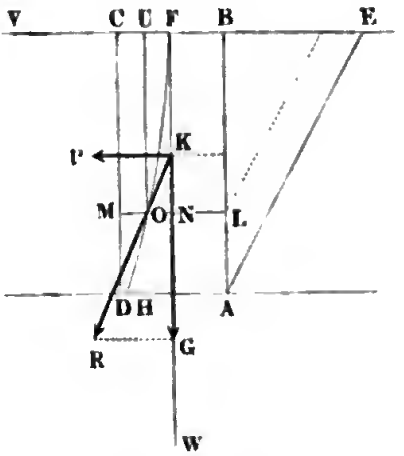


Fig. 14.



Bezeichnet nun b die Breite $AD = BC$ der Mauer, und γ_0 die Dichtigkeit derſelben, und zieht man nur den laufenden Fuß Mauer in Betracht, ſo hat man das Gewicht:

$$G = BC.FN.\gamma_0 = b(a+x)\gamma_0,$$

und daher:

$$y = \frac{Px}{b(a+x)\gamma_0}.$$

Hiernach iſt für $x = 0$, auch $y = 0$,

ferner für $x = \infty$: $y = \frac{P}{b\gamma_0}$,

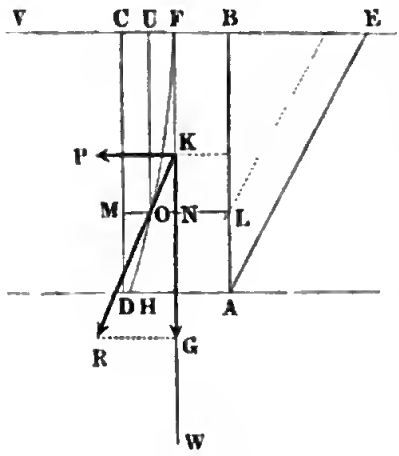
und für $x = -a$: $y = \infty$;

es geht folglich die Widerſtandslinie KO, Fig. 13, durch den Punkt K und hat nicht allein die Horizontallinie UV durch den Mauerkopf F, ſondern auch eine Verticallinie UW zur Aſymptotenaxe, welche um $FU = \frac{P}{b\gamma_0}$ von der verticalen Schwerlinie FS (Fig. 13) der Mauer abſteht. Es bildet folglich die Widerſtandslinie eine Hyperbel mit den Aſymptoten UV und UW.

2) Bei einer Mauer $ABCD$, Fig. 15 (a. f. S.), welche den Erd- oder Waſſerdruck auszuhalten hat, iſt die Tiefe FK des Angriffspunktes K der Kraft P unter der Mauerkrone F veränderlich und von der Tiefe $FN = x$

der angenommenen Trennungsebene LM unter F abhängig. Da der Mittelpunkt des Erd- und Waſſerdruckes (nach §. 4) um $^2/_3$ der Höhe unter dem Kopfe B der Wand AB liegt, ſo hat man auch hier $FK = {}^2/_3 FN = {}^2/_3 x$ zu ſetzen. Nehmen wir hier F als Anfangspunkt der Coordinaten $FN = x$ und $NO = y$ an, ſo giebt die Proportion

Fig. 15.



$$\frac{ON}{KN} = \frac{RG}{KG},$$

und es folgt, da $KN = x - {}^2/_3 x = {}^1/_3 x$ iſt, der Erddruck auf BL:

$$P = {}^1/_2 x^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

und da das Gewicht von CL, $G = bx\gamma_0$ iſt:

$$y = \frac{{}^1/_3 x \,.\, P}{G} = {}^1/_6 \frac{\gamma}{b\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 . x^2.$$

Dieſe Gleichung entſpricht einer gemeinen Parabel mit dem Scheitel F, der horizontalen Abſciſſe $FU = NO = y$ und der verticalen Ordinate $UO = FN = x$.

Iſt die Erdmaſſe noch um eine kleine Höhe h_0 über der Mauerkrone aufgeſchüttet, ſo können wir nach §. 8 annähernd:

$$y = \frac{{}^1/_3 (h_0 + x) P}{G} = \frac{\gamma}{6 b \gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \frac{(h_0 + x)^3}{x}$$

ſetzen.

§. 13 **Gleiten der Futtermauern.** Eine Futtermauer $ABCD$, Fig. 15, muß eine gewiſſe Dicke $AD = BC = b$ erhalten, damit ſie durch den Erddruck P nicht zurückgeſchoben werde. Iſt φ der Coefficient der Reibung an der Grundfläche LM eines Mauerſtückes CL von der Breite $BC = b$ und Höhe $LB = x$, ſo folgt die Reibung oder die Kraft zum Fortſchieben dieſes Stückes auf LM:

$$P = \varphi b x \gamma_0,$$

und da dieſelbe dem Erddruck gegen BL widerſtehen ſoll, ſo iſt:

$$\varphi b x \gamma_0 = {}^1/_2 x^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

zu ſetzen, und es ergiebt ſich hieraus die geſuchte Mauerdicke, wenn man noch für x ſeinen größten Werth $AB = h$ einführt:

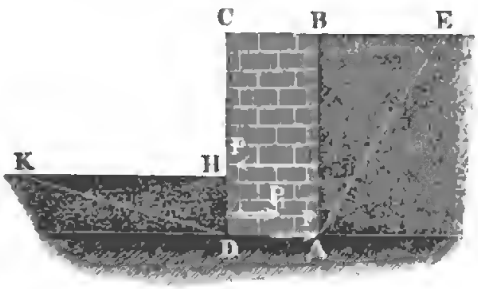
$$b = \frac{\gamma h}{2 \varphi \gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Der Sicherheit wegen führt man noch einen Stabilitätscoefficienten $\delta = 2$ ein, und setzt daher:

$$b = \frac{\gamma h}{\varphi \gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Widerstand gegen das Fortschieben auf dem Boden zu vergrößern, welches sich um so nöthiger macht, wenn der Boden, auf welchem die Futtermauer ruhen soll, lettig oder mit Wasser durchdrungen ist, wobei der Reibungscoefficient φ zwischen der Mauer und dem Grunde auf 0,3 herabgehen kann, gräbt man eine Vertiefung AH in den Grund und setzt die Mauer AC, Fig. 16, in dieselbe. Es widersteht dann dem activen Erddruck vor der Fläche AB nicht allein die Reibung der Grundfläche AD auf dem Boden, sondern auch noch der passive Druck der Erdmasse DHK vor der Mauerfläche CD.

Fig. 16.



Ist G das Gewicht der Stützmauer AC, also φG ihre Reibung auf dem Grunde AB, sowie h die Höhe der Erdmasse auf der inneren und h_1 die Höhe der Erdmasse auf der äußeren Seite, sind ferner ϱ und γ der Reibungswinkel und die Dichtigkeit für jene, und ϱ_1 und γ_1 der Reibungswinkel und die Dichtigkeit für diese Erdmasse, so hat man hiernach zu setzen:

$$\varphi G + {}^1/_2 h_1^2 \gamma_1 \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho_1}{2}\right)\right]^2 = {}^1/_2 h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

wonach, wenn man wieder $\delta = 2$ annimmt,

$$b = \frac{h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - h_1^2 \gamma_1 \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho_1}{2}\right)\right]^2}{\varphi h \gamma_0} \text{ folgt.}$$

Fällt der hiernach berechnete Werth von b kleiner aus als die nöthige Dicke $b_1 = \frac{\gamma (h - h_1)}{\varphi \gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ für das freie Mauerstück von der Höhe $h - h_1$, so ist natürlich die letztere in Anwendung zu bringen.

Die einer gegebenen Mauerdicke entsprechende Tiefe DH, Fig. 16, des Grundes für diese Mauer ist:

$$h_1 = tang.\left(45^0 - \frac{\varrho_1}{2}\right)\sqrt{\frac{h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - 2\varphi G}{\gamma_1}}.$$

Um zweifache Sicherheit zu erhalten, wendet man die Tiefe

$$h_1 = 1{,}414\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho_1}{2}\right)\sqrt{\frac{h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \varphi G}{\gamma_1}}$$

an.

Beiſpiel. Wie tief muß eine parallelepipediſche Mauer von 8 Fuß Breite und 13 Fuß Höhe von außen im Grunde ſtehen, damit ſie innen den Druck des vom Fuße bis zum Kopfe der Mauer ſtehenden Waſſers auszuhalten vermag, ohne auszugleiten? Hier iſt $\varrho = 0$, $\gamma = 61{,}75$ Pfund, $h = 13$ Fuß, ferner $\varphi = 0{,}3$, $\varrho_1 = 30^0$, $\gamma_1 = 1{,}6 \,.\, 61{,}75 = 98{,}8$ Pfund, und G, wenn man die Dichtigkeit der Mauer $\gamma_0 = 132$ Pfund annimmt, $= 8 \,.\, 13 \,.\, 132 = 13728$ Pfund, daher die geſuchte Grundtiefe:

$$h_1 = 1{,}414 \,.\, tang.\,(45^0 - 15^0)\sqrt{\frac{13^2 \,.\, 61{,}75 - 0{,}3 \,.\, 13728}{98{,}8}}$$

$$= 1{,}414\, tang.\, 30^0\sqrt{\frac{10435 - 4119}{98{,}8}} = 1{,}414 \,.\, 0{,}57735\sqrt{\frac{6316}{98{,}8}} = 6{,}53 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Der Reibungscoefficient für Mauer- und Ziegelſteine iſt (Bd. I., §. 174), wenn dieſelben unmittelbar auf einander liegen, $= 0{,}67$ bis $0{,}75$; und wenn friſcher Mörtel zwiſchen beiden liegt, nur $0{,}60$ bis $0{,}70$. Der eingetrocknete Mörtel wirkt nun auch durch Cohäſion oder Adhärenz, und es iſt nach Boiſtard der Zuſammenhang durch Mörtel auf einen Quadratfuß Fläche, 800 bis 1500 Pfund; nach den neueren Verſuchen von Morin aber 2000 bis 5000 Pfund.

§. 14 **Kippen der Futtermauern.** Die Stabilität einer Stütz- oder Futtermauer fordert nun, daß die Widerſtandslinie nicht bloß innerhalb der Mauer bleibe, ſondern auch der äußeren Mauerfläche nicht ſehr nahe komme (II., §. 11). Der berühmte Marſchall Vauban giebt die praktiſche Regel: es ſoll die Widerſtandslinie die Baſis der Mauer in einem Punkte ſchneiden, deſſen Entfernung von der verticalen Schwerlinie der Mauer höchſtens $^4/_9$ der Entfernung der äußerſten Mauerkante von eben dieſer Schwerlinie iſt. Dieſer Regel zufolge iſt die Dicke der Mauer $^3/_2$mal ſo groß als die einfache Formel angiebt, weil hiernach die Stabilität $^3/_2 \,.\, ^3/_2 = ^9/_4$mal ſo groß ausfällt als das nach der einfachen Formel berechnete. Nennen wir nach Poncelet die Reciproke dieſer Zahl, oder das Verhältniß zwiſchen der Entfernung der äußerſten Mauerkante von der verticalen Schwerlinie und der Entfernung des Punktes der Widerſtandslinie in der Mauerbaſis von eben dieſer Schwerlinie den Stabilitätscoefficienten und bezeichnen wir ihn allgemein durch δ, ſo erhalten wir für die Stabilität einer den Erddruck aufnehmenden parallelepipediſchen Mauer, indem wir in der Formel des §. 12 ſtatt x die Mauerhöhe h und ſtatt y, $\frac{^1/_2 b}{\delta}$ einführen:

$$\frac{b}{2\delta} = \frac{\gamma}{6 b \gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \frac{(h + h_0)^3}{h},$$

und daher die erforderliche Mauerdicke:

$$b = (h + h_0)\ tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0}\cdot\frac{h+h_0}{h}}.$$

Setzt man für $\delta = {}^3/_4$ und für $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ den Mittelwerth ${}^2/_3$ ein, ſo erhält man:

$$b = 0{,}707\ (h + h_0)\sqrt{\frac{h+h_0}{h}}\cdot tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right).$$

Nimmt man $\varrho = 30^0$ an, ſo folgt:

$$b = 0{,}4\ (h + h_0)\sqrt{\frac{h+h_0}{h}}.$$

Poncelet giebt für Fälle, wo h_0 zwiſchen 0 und $2\,h$ enthalten iſt,

$b = 0{,}865\ (h + h_0)\ tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}}$, und annähernd:

$b = 0{,}285\ (h + h_0)$ an.

Beiſpiel. Welche Dicke muß eine parallelepipediſche Mauer erhalten, welche bei 28 Fuß Höhe einen Haldenſturz von 35 Fuß Höhe aufhalten ſoll, vorausgeſetzt, daß die Dichtigkeit der Mauer $\gamma_0 = 2{,}4 \,.\, 61{,}75 = 148{,}2$ Pfund, die Dichtigkeit des Haldenſturzes (grober Geſteinſtücke) $\gamma = 1{,}3 \,.\, 61{,}75 = 80{,}275$ Pfund iſt, und der Reibungswinkel $\varrho = 50^0$ beträgt? Nach der Formel von Poncelet iſt

$$b = 0{,}865 \,.\, 35\ tang.\ (45^0 - 25^0)\sqrt{\frac{13}{24}} = 30{,}3\,.\sqrt{\frac{13}{24}}\,.\ tang.\ 20^0$$
$$= 8{,}11 \text{ Fuß}.$$

Poncelet's Tabelle. Zur Erleichterung der Rechnung hat Poncelet §. 15 eine beſondere Tabelle berechnet, worin die Werthe von $\frac{b}{h}$ aufgeführt ſind, welche gegebenen Werthen von $\frac{h_0}{h}$, $\frac{\gamma_0}{\gamma}$ und $tang.\,\varrho$ oder φ entſprechen. Von ihr iſt folgende Tabelle nur ein Auszug. Uebrigens ſind hierin zwei Fälle von einander unterſchieden, nämlich der Fall, wenn die Maſſe ſo hoch ſteht, daß ſie, wie Fig. 17 zeigt, die ganze Mauerkappe BC bedeckt, und der Fall, wenn, wie in Fig. 18 zu ſehen iſt, die Maſſe um 0,2 der Höhe h von der

Fig. 17.

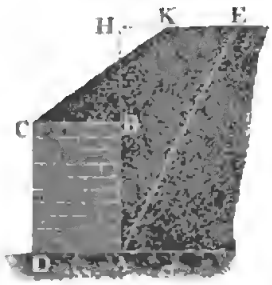
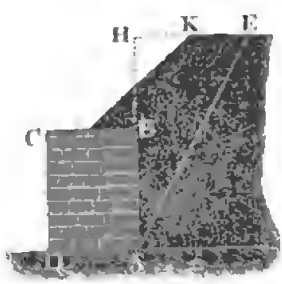


Fig. 18.



äußeren Mauerfläche zurückſteht, daß alſo ein $0{,}2\,.\,h$ breiter Wallweg CL oder eine ſogenannte Berme frei bleibt. Die Einrichtung und der Gebrauch dieſer Tabelle ſind aus den Ueberſchriften erklärlich.

Fig. 19.

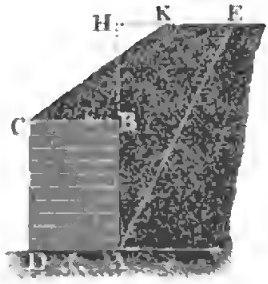
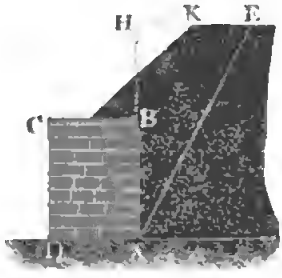


Fig. 20.



Hat man in der erſten Verticalcolumne den gegebenen Werth von $\frac{h_0}{h}$ gefunden, ſo geht man von da ſo weit horizontal herüber, bis man unter die gegebenen Werthe von $\frac{\gamma_0}{\gamma}$ u. ſ. w. gelangt.

In dieſer Tabelle ſind vorzüglich die Grenzwerthe berückſichtigt; ſo entſpricht z. B. $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1$ ziemlich der einen und $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 5/3$ der anderen Grenze, ferner kommt φ oder *tang.* $\varphi = 0{,}6$ bei der lockerſten und $\varphi = 1{,}4$ bei der dichteſten Erde vor. In vielen Fällen der Anwendung iſt es nöthig, das geſuchte Verhältniß durch Interpoliren zu ermitteln.

Die angegebenen Werthe beziehen ſich auf parallelepipediſche und mit Mörtel aufgeführte Mauern. Haben die Mauern eine äußere Böſchung $= 0{,}2$, ſo gilt die gefundene Breite b nicht für die Sohle, ſondern für den Querſchnitt bei $1/9$ der Mauerhöhe über der Sohle; und iſt die Mauer trocken aufgeführt, ſo muß man der Dicke ein Viertel berechneten Werthes zuſetzen.

Beiſpiel. Es ſoll für eine 22 Fuß hohe Erdmaſſe, deren Reibungswinkel 45^0 beträgt, die Stärke einer 12 Fuß hohen Stützmauer gefunden werden, deren Dichtigkeit 1,5mal ſo groß als die der Erdmaſſe iſt, unter der Vorausſetzung, daß die Mauerkappe von der Erdmaſſe ganz bedeckt wird. Hier iſt $h = 12$ und $h_0 = 22 - 12 = 10$, daher:

$$\frac{h_0}{h} = 5/6 = 0{,}833\ldots;$$

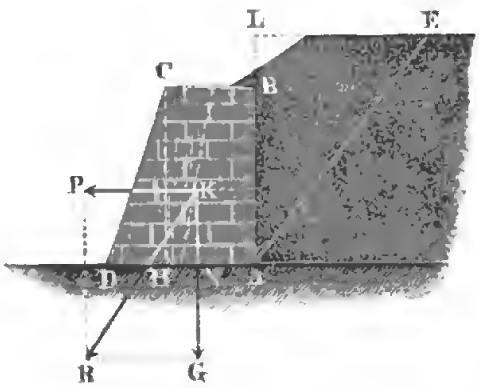
ferner $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1{,}5$ und $\varphi = 1$, daher findet man in der ſechsten Zeile, $\frac{b}{h} = 0{,}391$ oder genauer $= 0{,}393$, und ſonach die geſuchte Mauerdicke:

$$b = 0{,}393\,.\,12 = 4{,}72 \text{ Fuß}.$$

Werthe von $\frac{h_0}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für										
	$\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1$; $\varphi = 0{,}6$. Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1$; $\varphi = 1{,}4$. Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1{,}5$; $\varphi = 1$. Berme:			$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{5}{3}$; $\varphi = 0{,}6$. Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{5}{3}$; $\varphi = 1{,}4$. Berme:	
	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= b$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769

§. 16 **Geböschte Futtermauern.** Um an Material für die Futtermauer zu ersparen, giebt man derselben sehr gewöhnlich eine äußere Böschung, wie $ABCD$, Fig. 21. Ist für dieselbe die obere Breite $BC = b$, die Höhe $AB = h$, und die Böschung auf jeden Fuß Höhe, $= v$, also auf die ganze Höhe h, $DH = vh$, so hat sie das Gewicht:

Fig. 21.



$$G = \left(b + \frac{vh}{2}\right) h\,\gamma_0,$$

und es ist folglich bei dem Reibungscoefficienten φ für die Grundfläche AD, der Widerstand der Mauer gegen das Fortschieben:

$$F = \varphi G = \varphi\left(b + \frac{vh}{2}\right) h\,\gamma_0.$$

Bei einer kleinen Ueberschüttung von der Größe $BL = h_0$, ist der Erddruck:

$$P = {}^1/_2\,(h + h_0)^2\,\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

setzen wir folglich diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir die entsprechende obere Mauerbreite

$$b = {}^1/_2\,\frac{(h+h_0)^2}{\varphi h}\,\frac{\gamma}{\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - {}^1/_2\,vh,$$

oder, wenn man wieder der Sicherheit wegen den doppelten Werth annimmt,

$$1)\quad b = \frac{(h+h_0)^2}{\varphi h}\cdot\frac{\gamma}{\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - vh,$$

und folglich die untere Breite:

$$b_1 = b + vh = \frac{(h+h_0)^2}{\varphi h}\cdot\frac{\gamma}{\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Widerstand der Mauer gegen das Umkippen zu finden, müssen wir das Moment des Erddruckes P in Hinsicht auf die äußere Mauerkante D dem Momente des Mauergewichtes G gleichsetzen. Der Hebelarm der Kraft P läßt sich $KN = \frac{h+h_0}{3}$ setzen, folglich ist das Moment des Erddruckes:

$$\frac{P(h+h_0)}{3} = {}^1/_6\,(h+h_0)^3\,\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

das Moment des Gewichtes G besteht aus dem Momente des dreiseitigen

Prismas CDH und aus dem des Parallelepipedes AC, und iſt der Lehre vom Schwerpunkte zufolge zu ſetzen:

$$\tfrac{1}{2}.CH.DH.\gamma_0.\tfrac{2}{3}DH + AB.BC.\gamma_0.(DH + \tfrac{1}{2}HA)$$
$$= \tfrac{1}{2}vh^2\gamma_0.\tfrac{2}{3}vh + bh\gamma_0.(vh + \tfrac{1}{2}b)$$
$$= [\tfrac{1}{3}v^2h^2 + (vh + \tfrac{1}{2}b)b]h\gamma_0.$$

Wenn man dieſe Ausdrücke einander gleich ſetzt, ſo erhält man die Beſtimmungsgleichung:

$$[2v^2h^2 + (6vh + 3b)b]h = \frac{\gamma}{\gamma_0}(h + h_0)^3\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

oder:

$$b^2 + 2vhb = \frac{\gamma}{\gamma_0}\frac{(h + h_0)^3}{3h}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \tfrac{2}{3}v^2h^2,$$

deren Auflöſung:

$$b = -vh + \sqrt{\frac{\gamma}{3\gamma_0}.\frac{(h + h_0)^3}{h}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{3}v^2h^2}$$

giebt.

Führen wir wieder den Stabilitätscoefficienten $\delta\,(= {}^9/_4)$ ein, ſo erhalten wir die geſuchte Mauerdicke:

$$2)\ b = -vh + \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0}.\frac{(h + h_0)^3}{h}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{3}v^2h^2},$$

und folglich die untere Breite:

$$b_1 = b + vh = \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0}.\frac{(h + h_0)^3}{h}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{3}v^2h^2}.$$

Natürlich iſt von den unter (1) und (2) gefundenen Werthen für b_1 der größere anzuwenden. Nach den Erfahrungen ſoll man dieſe Breite, um den zerſtörenden Wirkungen des Wetter- und Temperaturwechſels ſo viel wie möglich entgegenzuwirken, nicht unter $2\,{}^1/_2$ Fuß machen.

Beiſpiel. Es iſt für einen Haldenſturz von 24 Fuß Höhe eine 20 Fuß hohe Futtermauer mit der äußeren Böſchung $\nu = 0{,}2$ zu conſtruiren. Man ſoll die Breite dieſer Mauer unter der Vorausſetzung beſtimmen, daß $\varphi = 0{,}4$, $\varrho = 36$ Grad und $\frac{\gamma_0}{\gamma} = {}^5/_3$ iſt. Die erſte Formel giebt die untere Mauerbreite:

$$b_1 = b + \nu h = \frac{(h + h_0)^2}{\varphi h}.\frac{\gamma}{\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$
$$= \frac{24^2}{0{,}4\,.\,20}.{}^3/_5\,(tang.\,27^0)^2 = {}^{216}/_5.(0{,}5095)^2 = 11{,}21\text{ Fuß},$$

und folglich die Kronenbreite:

$$b = b_1 - \nu h = 11{,}21 - 0{,}2\,.\,20 = 7{,}21\text{ Fuß}.$$

Nach der zweiten Formel erhält man hingegen:

$$b_1 = b + \nu h = \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0} \cdot \frac{(h+h_0)^3}{h} \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{3}\nu^2 h^2}$$

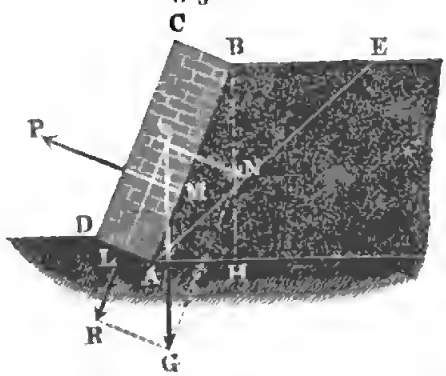
$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \frac{24^3}{20} \cdot (0{,}5095)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}04 \cdot 400} = \sqrt{80{,}74 + 5{,}33}$$

$= \sqrt{86{,}07} = 9{,}27$ Fuß, und

$b = 9{,}27 - 4 = 5{,}27$ Fuß, also die kleineren Werthe.

§. 17 **Geneigte Futtermauern.** Futtermauern, welche nach der zu diesem Zwecke abgeböschten lockeren Masse hin geneigt sind, und daher theilweise auf dieser aufliegen, widerstehen dem Drucke dieser Masse noch mehr als aufrechtstehende Futtermauern. Ist h die senkrechte Höhe, α_1 der Neigungswinkel BAH einer parallelepipedischen Futtermauer AC, Fig. 22, so haben wir nach §. 9 den Druck der Erdmasse gegen die Wand AB zu setzen:

Fig. 22.



$$P = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2.$$

Diesem Drucke wirkt das Gewicht G der Mauer mit dem Componenten $N = G\,cos.\,\alpha_1$ direct und mit dem Componenten $R = G\,sin.\,\alpha_1$ durch die Reibung $\varphi R = \varphi G\,sin.\,\alpha_1$ entgegen; setzt man daher $N + \varphi R = P$, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$G\,(cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1) = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2,$$

daher für das Gewicht:

$$G = \frac{h^2\gamma}{2\,(cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1)\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2.$$

Ist noch b die Breite $AD = BC$ der Mauer und $l = \frac{h}{sin.\,\alpha_1}$ die schräge Mauerhöhe $AB = CD$, so kann man

$$G = b\,l\,\gamma_0 = \frac{b\,h\,\gamma_0}{sin.\,\alpha_1}$$

ſetzen, und erhält ſo, wenn man noch einen Stabilitätscoefficienten $\delta = 2$ einführt,

$$1)\quad b = \frac{h}{\cos.\alpha_1 + \varphi \sin.\alpha_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

$$= \frac{l}{\operatorname{cotang.}\alpha_1 + \varphi} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2.$$

Damit die Mauer durch ihr Gewicht G dem Erddruck P in Hinſicht auf das Kippen um die äußere Kante D widerſtehe, muß das Moment von G gleich dem von P ſein. Nun iſt aber das Moment von G gleich der Summe der Momente von N und R d. i.:

$$N.\overline{LS} + R.\overline{DL} = \frac{N.l}{2} + \frac{R.b}{2} = (l\cos.\alpha_1 + b\sin.\alpha_1)\frac{G}{2},$$

und das Moment von P:

$$= P.\overline{AM} = {}^1/_3\, P.l;\ \text{es läßt ſich daher}$$

$$(l\cos.\alpha_1 + b\sin.\alpha_1)\frac{G}{2} = {}^1/_3\, P.l,\ \text{oder}$$

$$(l\cos.\alpha_1 + b\sin.\alpha_1)\frac{b\,l\,\gamma_0}{2} = \frac{l}{3} \cdot \frac{h^2\gamma}{2\sin.\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

ſetzen, ſo daß nun die Beſtimmungsgleichung

$$(l\cos.\alpha_1 + b\sin.\alpha_1)\,b = {}^1/_3 \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot \frac{h^2}{\sin.\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

folgt, deren Auflöſung die geſuchte **Mauerbreite**

$$b = \left[-{}^1/_2 \operatorname{cotang.}\alpha_1 + \sqrt{{}^1/_3 \frac{\gamma}{\gamma_0} \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2 + {}^1/_4 (\operatorname{cotang.}\alpha_1)^2} \right] l,$$

oder, wenn man noch den Sicherheitscoefficienten $\delta = {}^9/_4$ einführt,

$$2)\ b = \left[-{}^1/_2 \operatorname{cotang.}\alpha_1 + \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0} \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2 + {}^1/_4 (\operatorname{cotg.}\alpha_1)^2} \right] l$$

giebt.

Natürlich ist auch hier der größere der beiden Werthe für b in der Praxis anzuwenden.

Beispiel. Wenn die Haldenmasse von 24 Fuß Höhe des Beispieles im vorigen Paragraphen durch eine Futtermauer von 70 Grad Neigung gestützt werden soll, so ist für dieselbe:

$$\left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{sin.\left(\frac{70 - 36^0}{2}\right)}{sin.\left(\frac{70 + 36^0}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{sin.\ 17^0}{sin.\ 53^0}\right)^2 = 0{,}1340,$$

ferner:

$$l = \frac{h}{sin.\ \alpha_1} = \frac{24}{sin.\ 70^0} = 25{,}54 \text{ und } cotang.\ \alpha = cotang.\ 70^0 = 0{,}3640,$$

daher folgt, wenn nun noch $\varphi = 0{,}4$ und $\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{3}{5}$ ist, nach der ersteren Formel die nöthige Mauerdicke:

$$b = \frac{25{,}54}{0{,}3640 + 0{,}4} \cdot \frac{3}{5} \cdot 0{,}1340 = \frac{25{,}54 \,.\, 0{,}0804}{0{,}7640} = 2{,}68 \text{ Fuß},$$

und dagegen nach der zweiten:

$$\begin{aligned} b &= \left[-\tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}3640 + \sqrt{\tfrac{3}{4} \,.\, \tfrac{3}{5} \,.\, 0{,}1340 + (0{,}1820)^2}\right] .\, 25{,}54 \\ &= (-0{,}1820 + \sqrt{0{,}0603 + 0{,}0331}) \,.\, 25{,}54 = 0{,}1236 \,.\, 25{,}54 \\ &= 3{,}157 \text{ Fuß}; \end{aligned}$$

also ist in beiden Fällen die nöthige Mauerdicke viel kleiner als im angeführten Beispiel mit einer senkrechten Mauer.

Anmerkung 1. Aus beiden Gleichungen ist zu ersehen, daß nicht allein die Breite b, sondern auch der Cosinus des Neigungswinkels α_1 mit der Höhe h der Futtermauer zu- und abnimmt, daß daher einer niederigen Futtermauer entweder eine kleinere Breite oder ein größerer Neigungswinkel entspricht als einer höheren. Deshalb giebt man auch oft, um an Material zu ersparen, den Futtermauern entweder eine Böschung, wobei ihre Breite von unten nach oben zu abnimmt, oder einen Zirkel, wobei der Neigungswinkel derselben gegen den Horizont. von unten nach oben allmälig größer und größer wird.

Anmerkung 2. Der erste gründliche Schriftsteller über den Erddruck ist Coulomb. S. Théorie des machines simples par Coulomb. Weiter verfolgte diesen Gegenstand Prony in seinen Leçons sur la poussée des terres (1802); nächstdem findet man den Gegenstand gut und gedrängt bearbeitet in Navier's Leçons sur l'application de la mécanique etc. T. I., sowie in Persy's Cours de Stabilité des constructions. Ein besonderes Werk, in welchem auch die Beobachtungen und Theorien über den Erddruck aller seiner Vorgänger abgehandelt werden, lieferte Mayniel (1808) unter dem Titel: Traité expérimental etc. de la poussée des terres. Neue und in ziemlich großem Maßstabe ausgeführte Versuche sind von C. Martony de Köszegh angestellt und in folgendem Werke veröffentlicht worden: Versuche über den Seitendruck der Erde, ausgeführt auf höchsten Befehl u. s. w. und verbunden mit den theoretischen Abhandlungen von Coulomb und Français, Wien 1828. Das vollständigste Werk über den Erddruck u. s. w. hat aber Poncelet geliefert. Es ist dasselbe

aus dem Mémorial de l'officier du génie (1838) vom Herrn Lahmeyer überſetzt und unter folgendem Titel herausgegeben worden: Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, Braunſchweig 1844. Gut und zum Theil eigenthümlich behandelt den Erddruck: Moſeley in ſeinen Mechanical principles of Engineering and Architecture. Auch Hagen handelt dieſes Capitel im zweiten Theile ſeiner Waſſerbaukunſt kurz ab; er verfolgt aber dabei eine beſondere Anſicht. Ferner iſt neu erſchienen: Nouvelles Expériences sur la poussée des terres, par Audé. Paris 1849. Auch gehört hierher die Schrift: Recherches expérimentales sur les Glissemens spontanés des Terrains argileux, par Alex. Collin, Paris 1846, wovon ein deutſcher Auszug in Bornemann's ꝛc. „Ingenieur". Band I., zu finden iſt. Endlich findet man einen Artikel über dieſen Gegenſtand in den Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol. IV., Part. II. von John Neville, unter dem Titel: An Investigation of some Formulae for Finding the Maximum Amount of Resistance acting in any direction required to sustain banks of earth or other materials etc. Ueber die Bedingniſſe des Gleichgewichtes der Erdmaſſen bei Einſchnitten und Dämmen iſt ein Aufſatz von M. de Sazilly in den Annales des ponts et chaussées, 1851, enthalten, auch befindet ſich hiervon ein Auszug von Herrn Löhr, in der Zeitſchrift für den öſterr. Ingenieurverein, Jahrgang IV, 1852. Eine neue Theorie des Erddruckes entwickelt Rankine in ſeinem Manuel of applied Mechanics. Sec. Edition. London 1861.

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

Gewölbe. Ein Gewölbe (franz. voûte; engl. arch, vault) iſt ein §. 18
Syſtem von Körpern, welche mit ihren Seitenflächen ſo an einander anſtoßen und ſich zwiſchen zwei feſte Hinderniſſe ſo ſtützen, daß ſie nicht allein unter ſich, ſondern auch mit gewiſſen Kräften von außen im Gleichgewichte bleiben. Dieſe Körper ſind in der Regel Steine, und heißen deshalb auch Gewölbſteine (franz. voussoirs; engl. voussoirs, arch-stones). Die Flächen, in welchen die Gewölbſteine an einander ſtoßen, heißen Gewölbfugen (franz. joints; engl. beds, joints). Die Stützen, worauf ein Gewölbe ruht, heißen gewöhnlich Widerlager (franz. pied-droits; engl. abutments), bei Brücken aber Pfeiler (franz. culées, piliers; engl. buttresses, piers). Von den Gewölbſteinen heißt der mittelſte oder höchſte Schlußſtein (franz. clef; engl.

key-stone), und diejenigen, welche an die Widerlager anſtoßen, Kämpfer (franz. coussinets; engl. imposts). Ein Gewölbe wird zum größten Theil von zwei mehr oder weniger gekrümmten Flächen, den ſogenannten Wölbflächen oder Wölbungen begrenzt, und von ihnen iſt die äußere (franz. und engl. extrados) und die innere Wölbung (franz. und engl. intrados, soffit) zu unterſcheiden.

Es giebt in Hinſicht auf die Wölbflächen ſehr verſchiedene Gewölbe. Am häufigſten kommen die cylindriſchen oder Tonnen-Gewölbe vor, bei denen die Wölbungen cylindriſche Flächen bilden. Seltener ſind die Kegelgewölbe, ſowie die Kloſter- und Kuppelgewölbe. Wir handeln hier hauptſächlich nur von den Cylindergewölben, und zwar nur von den horizontalen, d. h. von denjenigen, welche eine horizontale Axe haben, da verticale und geneigte, oder ſogenannte Kellerhalsgewölbe nur bei der Ausmauerung von Schächten vorkommen. Solche Gewölbe ſind außer den Wölb- und Widerlagsflächen auch noch von zwei parallelen Verticalflächen, den ſogenannten Stirnflächen (franz. parements; engl. faces) begrenzt. Je nachdem nun die Stirnflächen eines cylindriſchen Gewölbes recht- oder ſchiefwinklig gegen die geometriſche Axe dieſer Gewölbe ſtehen, heißen dieſe gerade oder ſchiefe Gewölbe (franz. arches droites oder biaisses; engl. direct, auch square arches, oder oblique, auch skew arches). Die geraden Tonnengewölbe (franz. voûtes en berceau; engl. waggon vaults) kommen am häufigſten vor; in neueren Zeiten, namentlich bei den Brücken für Eiſenbahnen, ſind aber auch nicht ſelten die ſchiefen Brücken in Anwendung.

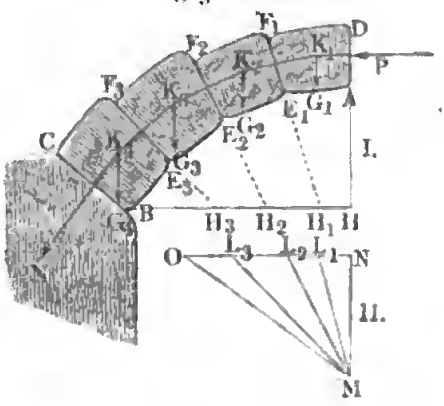
Kreuz- und Kloſtergewölbe (franz. voûtes d'arête; engl. cross-arched vaults) ſind ſich durchkreuzende Tonnengewölbe. Kuppel- oder Keſſelgewölbe (franz. voûtes en dômes; engl. domes oder cupolas) ſind Gewölbe, deren Innenfläche durch Umdrehung einer Curve um eine verticale Axe entſteht.

In Beziehung auf die Wölbung giebt es ſehr verſchiedene Tonnengewölbe. Der Querſchnitt der Wölbflächen kann die Kreisform haben, er kann elliptiſch ſein, er kann eine Kettenlinie bilden, er kann aus Kreisbogen zuſammengeſetzt ſein, und er kann ſogar eine gerade Linie bilden. Man hat hiernach Kreisgewölbe, elliptiſche, Ketten-, Korb- und ſcheidrechte Gewölbe.

§. 19. **Gleichgewicht der Gewölbsteine ohne Reibung.** Unterſuchen wir zunächſt das Gleichgewicht einer Reihe an einander geſtellten Körper, wie AF_1, E_1F_2, E_2F_3 u. ſ. w., Fig. 23, I., und laſſen wir noch die Reibung und Adhäſion zwiſchen den Fugen oder Berührungsflächen E_1F_1, E_2F_2 u. ſ. w. außer Acht. Bezeichnen wir die Gewichte der Gewölbſteine

$A F_1$, $E_1 F_2$, $E_2 F_3$ u. ſ. w. durch G_1, G_2, G_3 u. ſ. w. und die Neigungswinkel der Gewölbfugen, d. i. $E_1 H_1 B$, $E_2 H_2 B$ u. ſ. w. durch α_1, α_2 u. ſ. w.

Fig. 23.



Soll nun eine Horizontalkraft P den Gewölbſtein auf der durch die Fuge $E_1 F_1$ gebildeten ſchiefen Ebene $F_1 H_1$ erhalten, ſo iſt nach Bd. I., §. 147

$$P = G_1 \, tang. \, \alpha_1;$$

ſoll ſie ebenſo die Steinverbindung $A F_2$ auf der durch die zweite Fuge $E_2 F_2$ gebildeten Ebene $F_2 H_2$ erhalten, ſo muß ſie

$$P = (G_1 + G_2) \, tang. \, \alpha_2$$

ſein. Da ſie ferner die Steinverbindung $A F_3$, deren Gewicht $G_1 + G_2 + G_3$ iſt, auf der ſchiefen Ebene zu erhalten hat, ſo iſt auch

$$P = (G_1 + G_2 + G_3) \, tang. \, \alpha_3;$$

auch hat man

$$P = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \, tang. \, \alpha_4 \text{ u. ſ. w.}$$

Hieraus finden wir nun

$$G_1 = P \, cotang. \, \alpha_1 = P(cotang. \, \alpha_1 - cotang. \, 90^0),$$
$$G_2 = P \, cotang. \, \alpha_2 - G_1 = P(cotang. \, \alpha_2 - cotang. \, \alpha_1),$$
$$G_3 = P \, cotang. \, \alpha_3 - (G_1 + G_2) = P(cotang. \, \alpha_3 - cotang. \, \alpha_2),$$
$$G_4 = P(cotang. \, \alpha_4 - cotang. \, \alpha_3) \text{ u. ſ. w.,}$$

und erhalten durch Vergleichung:

$$G_1 : G_2 : G_3 : G_4 \ldots = (cotang. \, \alpha_1 - cotang. \, 90^0)$$
$$: (cotang. \, \alpha_2 - cotang. \, \alpha_1) : (cotang. \, \alpha_3 - cotang. \, \alpha_2)$$
$$: (cotang. \, \alpha_4 - cotang. \, \alpha_3) \text{ u. ſ. w.;}$$

es verhalten ſich alſo die Gewichte der Gewölbſteine zu einander wie die Differenzen der Cotangenten von den Neigungswinkeln der Gewölbfugen. Ziehen wir $M L_1$, $M L_2$ u. ſ. w. in Fig. 23, II., den Gewölbfugen in Fig. 23, I., $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. ſ. w. parallel, und durchſchneiden wir alle dieſe Linien durch eine Horizontale $O N$, ſo bekommen wir eine Reihe von Dreiecken, zwiſchen deren Seiten ſich ähnliche Abhängigkeiten nachweiſen laſſen, wie zwiſchen den Gewölbſteingewichten. Es iſt nämlich

$$N L_1 = M N \, cotang. \, \alpha_1, \; N L_2 = M N \, cotang. \, \alpha_2,$$
$$N L_3 = M N \, cotang. \, \alpha_3 \text{ u. ſ. w.;}$$

daher auch

$$L_1 L_2 = M N(cotang. \, \alpha_2 - cotang. \, \alpha_1),$$
$$L_2 L_3 = M N(cotang. \, \alpha_3 - cotang. \, \alpha_2) \text{ u. ſ. w.}$$

Es giebt folglich die Diviſion·

$NL_1 : L_1L_2 : L_2L_3$ u. ſ. w. $= (cotang.\ \alpha_1 - cotang.\ 90^0)$
$: (cotang.\ \alpha_2 - cotang.\ \alpha_1) : (cotang.\ \alpha_3 - cotang.\ \alpha_2)$ u. ſ. w.,

und daher die Vergleichung mit dem Obigen:

$$G_1 : G_2 : G_3 \text{ u. ſ. w.} = \overline{NL_1} : \overline{L_1L_2} : \overline{L_2L_3} \text{ u. ſ. w.}$$

Wenn MN den Horizontaldruck P repräſentirt, ſo werden folglich die Abſchnitte NL_1, L_1L_2, L_2L_3 u. ſ. w. die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. ſ. w. der Gewölbſteine vorſtellen können.

Noch giebt die Statik die Normaldrücke in den Gewölbfugen:

$$N_1 = \frac{G_1}{cos.\ \alpha_1},\quad N_2 = \frac{G_1 + G_2}{cos.\ \alpha_2},\quad N_3 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{cos.\ \alpha_3} \text{ u. ſ. w.,}$$

und da nun

$$ML_1 = \frac{NL_1}{cos.\ \alpha_1} = \frac{G_1}{cos.\ \alpha_1},\quad ML_2 = \frac{G_1 + G_2}{cos.\ \alpha_2},$$

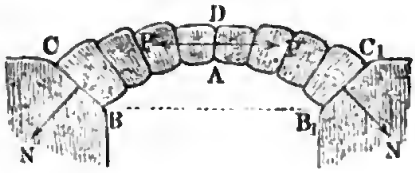
$$ML_3 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{cos.\ \alpha_3} \text{ u. ſ. w. iſt, ſo folgt noch:}$$

$$N_1 : N_2 : N_3 \text{ u. ſ. w.} = \overline{ML_1} : \overline{ML_2} : \overline{ML_3} \text{ u. ſ. w.;}$$

es werden alſo die Normaldrücke zwiſchen den Steinen durch die Hypotenuſen ML_1, ML_2, ML_3 u. ſ. w. repräſentirt.

Bei einem vollſtändigen Gewölbe BCC_1B_1, Fig. 24, finden dieſelben Verhältniſſe ſtatt, nur iſt hier P der Horizontaldruck im Scheitel AD. Bezeichnet hier G das Gewicht des halben Gewölbes, und α den Neigungswinkel der Widerlagsfugen derſelben, ſo hat man:

Fig. 24.



$$P = G\ tang.\ \alpha$$

und den Normaldruck in den Widerlagern:

$$N = \frac{G}{cos.\ \alpha} = \frac{P}{sin.\ \alpha}.$$

Es iſt alſo der Druck (franz. poussée; engl. thrust) zwiſchen den Gewölbſteinen im Scheitel oder in der Nähe des Schlußſteines am kleinſten, es nimmt derſelbe nach den Widerlagern hin immer mehr und mehr zu, und er iſt in den Widerlagern am größten.

§. 20 **Gewölblinien.** Der Druck $N = \frac{P}{sin.\ \alpha}$ zwiſchen zwei Gewölbſteinen läßt ſich in die Horizontalkraft

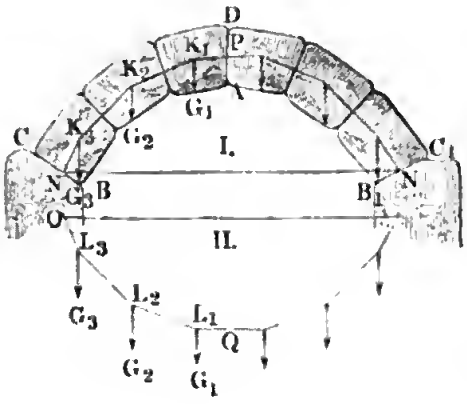
$$H = N\ sin.\ \alpha = P$$

und in eine Verticalkraft

$$V = N\ cos.\ \alpha = \frac{P\ cos.\ \alpha}{sin.\ \alpha} = P\ cotang.\ \alpha = G$$

zerlegen. Es ist also der Horizontaldruck an allen Stellen eines Gewölbes einer und derselbe, und es ist der Verticaldruck dem Gewichte des jedesmaligen Gewölbstückes zwischen der entsprechenden Gewölbfuge und dem Gewölbscheitel gleich. Genau dieselben Verhältnisse sind in Bd. I., §. 154, für ein durch Gewichte G_1, G_2 u. s. w. gespanntes Seilpolygon gefunden, und wir können daher behaupten, daß ein Gewölbe BDB_1, Fig. 25, im Gleichgewichte ist, wenn seine gegen die Gewölbfugen rechtwinkelig stehenden Drucklinien ein Polygon $PK_1K_2\ldots N$(I.) bilden, welches einem umgekehrten Seilpolygon $QL_1L_2\ldots O$ (II.) congruent ist, das von Gewichten $G_1, G_2\ldots$ gespannt wird, die den Gewichten der Gewölbsteine gleich sind.

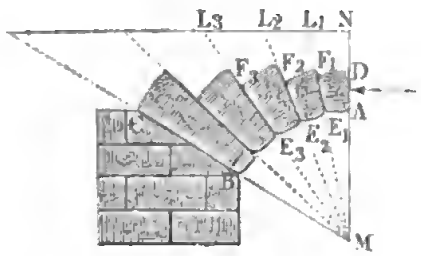
Fig. 25.



Bei einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner Gewichte geht das Seilpolygon in eine Kettenlinie über; ist daher die Zahl der Gewölbsteine unendlich groß, so bilden die Drucklinien derselben auch eine Kettenlinie. Da die gemeine Kettenlinie von einem Seile gebildet wird, wenn gleich lange Stücke desselben gleich belastet sind, so wird diese Curve auch der Drucklinie eines Gewölbes entsprechen, wenn die gleich dicken Steine desselben gleich schwer, also auch gleich hoch sind.

Besteht die innere Wölblinie in einem Kreisbogen AB, Fig. 26, und theilen die radiallaufenden Gewölbfugen dieselbe in lauter gleiche Theile $AE_1 = E_1E_2$ u. s. w., so findet man die dem Gleichgewicht des Gewölbes entsprechenden Höhen der Gewölbsteine, wenn man die erste Gewölbfuge E_1F_1 so weit verlängert, bis sie ein Perpendikel L_1N zur Scheitellinie AN abschneidet, welches der Höhe AD des ersten Gewölbsteines gleich ist; verlängert man nun dieses Perpendikel oder die Horizontale, so schneiden die übrigen ebenfalls verlängerten Fugenlinien hiervon die Höhen der übrigen Gewölbsteine ab, also

Fig. 26.



$$E_1F_1 = L_1L_2,\ E_2F_2 = L_2L_3 \text{ u. s. w.}$$

Die Richtigkeit dieſer Conſtruction gründet ſich darauf, daß man annähernd annehmen kann, die wie die Abſchnitte NL_1, L_1L_2, L_2L_3 u. ſ. w. wachſenden Gewichte der Gewölbſteine verhalten ſich wie die Höhen AD, EF_1, E_2F_2... der Gewölbſteine zu einander. Es iſt hiernach auch leicht

Fig. 27.

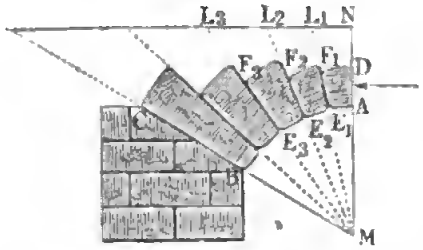
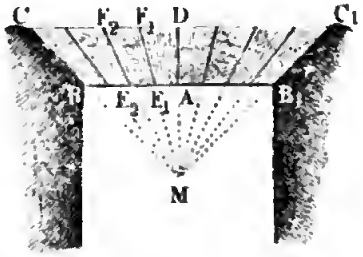


Fig. 28.

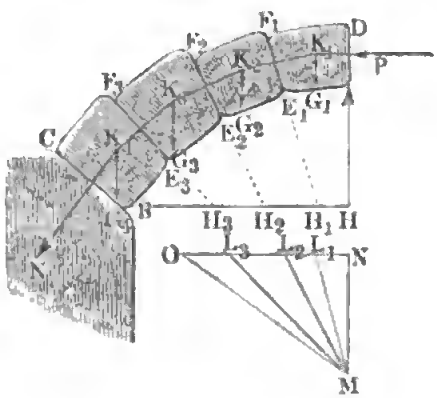


einzuſehen, daß bei dem ſcheidrechten Gewölbe (franz. und engl. plate bande) $CA\,C_1$, Fig. 28, die Gewölbfugen nach einem und demſelben Punkte M gerichtet ſein müſſen.

Iſt, wie gewöhnlich, das Gewölbe von oben belaſtet, ſo muß man natürlich zum Gewichte eines jeden Gewölbſteines noch den über ihm ſtehenden Theil der Belaſtung addiren, um die in den obigen Formeln eintretenden Gewichte G_1, G_2, G_3 u. ſ. w. zu erhalten.

§. 21 **Reibung zwiſchen den Gewölbſteinen.** Um für die Praxis brauchbare Formeln zu erhalten, iſt es nöthig, noch die Reibung zwiſchen den Gewölbſteinen zu berückſichtigen. Eigentlich müßten wir auch noch auf die Cohäſion des Mörtels Rückſicht nehmen; da indeſſen auf dieſe nicht ſehr zu rechnen iſt und dieſelbe ſich ſehr oft nach Wegnahme der Gerüſte vermullt, ſo können wir dieſen Zuſammenhang außer Acht laſſen. Bezeichnen wir wieder die Gewichte der Gewölbſteine AF_1, E_1F_2 u. ſ. w., Fig. 29, durch G_1, G_2 u. ſ. w., ſowie die Neigungswinkel der Gewölbfugen E_1F_1, E_2F_2... gegen den Horizont, mit α_1, α_2 u. ſ. w. und ſetzen wir noch den Reibungswinkel $= \varrho$, ſo haben wir für die Horizontal- oder Normalkraft im Scheitel, welche das Herabgleiten in den Fugen verhindert (Bd. I., §. 176) die Werthe:

Fig. 29.



$$P_1 = G_1\ tang.(\alpha_1 - \varrho),$$
$$P_2 = (G_1 + G_2)\ tang.(\alpha_2 - \varrho),$$
$$P_3 = (G_1 + G_2 + G_3)\ tang.(\alpha_3 - \varrho),\ \text{u. ſ. w.}$$

Da die Winkel $\alpha - \varrho$, und also auch deren Tangenten, vom Scheitel des Gewölbes nach den Widerlagern zu abnehmen, die Gewichte

$$G_1,\ G_1 + G_2,\ G_1 + G_2 + G_3 \text{ u. s. w.}$$

aber zunehmen, so bilden die Kräfte P_1, P_2, P_3 nicht immer eine wachsende Reihe, sondern es tritt oft später wieder eine Abnahme ein, es ist also eine von ihnen eines Maximum fähig. Damit nun die Gewölbsteinschicht in jedem Falle vor dem Herabgleiten gesichert werde, ist nöthig, daß die Normalkraft im Scheitel diesem Maximalwerthe gleich sei. Bei einem vollständigen Gewölbe ist also hiernach auch der Druck in dem Schlußsteine oder in der Schlußfuge diesem Maximalwerthe

$$(G_1 + G_2 + \cdots G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho)$$

gleich.

Käme es darauf an, die Gewölbstücke G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. auf den Gewölbfugen hinaufzuschieben, so hätte man dagegen (nach Bd. I., §. 176) im Scheitel die Normalkräfte

$$Q_1 = G_1\ tang.(\alpha_1 + \varrho),$$
$$Q_2 = (G_1 + G_2)\ tang.(\alpha_2 + \varrho,$$
$$Q_3 = (G_1 + G_2 + G_3)\ tang.(\alpha_3 + \varrho) \text{ u. s. w.}$$

nöthig. Wenn nun der Maximalwerth

$$P_m = (G_1 + G_2 + \cdots + G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho)$$

den Minimalwerth

$$Q_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)\ tang.(\alpha_n + \varrho)$$

erreicht oder gar übertrifft, so folgt, daß das Gewölbstück

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

über dem darunterstehenden auf der zwischenbefindlichen Fuge durch die Kraft im Schlußsteine hinaufgeschoben wird; und es läßt sich also behaupten, daß ein Gewölbe überhaupt nur dann Stabilität besitze, wenn der passive Gewölbschub oder Minimalwerth

$$Q_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)\ tang.(\alpha_n + \varrho)$$

größer ist als der active Gewölbschub oder Maximalwerth

$$P_m = (G_1 + G_2 + \cdots + G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho).$$

Was die Reihe der Werthe Q_1, Q_2, Q_3 u. s. w. betrifft, so sieht man leicht ein, daß für $\alpha + \varrho = 90^0$, oder $\alpha = 90^0 - \varrho$, wo $tang.(\alpha + \varrho) = \infty$ ist, der entsprechende Werth

$$Q = (G_1 + G_2 + \cdots)\ tang.(\alpha + \varrho)$$

ebenfalls unendlich groß wird, daß also in den Gewölbfugen, deren Neigung gleich oder größer als $90^0 - \varrho$ ist, ein Hinaufschieben nie eintreten kann. Für Neigungswinkel unter $90^0 - \varrho$ fallen dagegen die Tangenten wieder

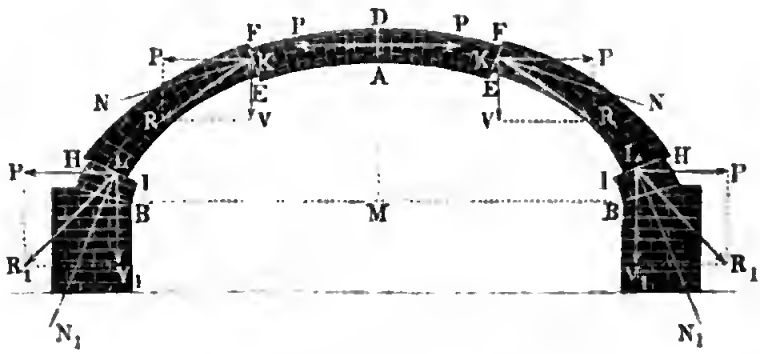
endlich, und zwar um ſo kleiner aus, je kleiner dieſe Winkel, je näher alſo die entſprechenden Gewölbfugen den Widerlagern ſind; da aber die Gewichte der Gewölbſtücke nach den Fugen zu immer größer und größer werden, ſo folgt allerdings, daß es für Fugenwinkel zwiſchen 0 und $90^0 - \varrho$ einen Werth von Q_n geben kann, welcher kleiner als jeder andere iſt, und daher auch größer ſein muß als der Maximalwerth P_m von P, wenn das Gewölbe im Gleichgewicht bleiben ſoll.

Da der Reibungswinkel ſelbſt für glatt bearbeitete Gewölbſteine noch beträchtlich, nämlich nach Rondelet, $\varrho = 30^0$, alſo *tang.* $\varrho = 0{,}57735$ beträgt, ſo iſt, zumal bei den gewöhnlichen Kreisgewölben, der Minimalwerth Q_n faſt immer größer als der Maximalwerth P_m oder der Druck im Scheitel, und daher ein Auswärtsſchieben der Steine nur ſelten möglich.

Die durch die Winkel α_m und α_n beſtimmten Gewölbfugen heißen die Bruchfugen des Gewölbes, weil in ihnen das Ausgleiten erfolgt, wenn Q_n von P_m übertroffen wird.

§. 22 **Ausgleiten der Gewölbe.** In der Bruchfuge EF (Fig. 30 und 31) des activen Gewölbſchubes weicht der Mitteldruck, d. i. die Mittelkraft,

Fig. 30.



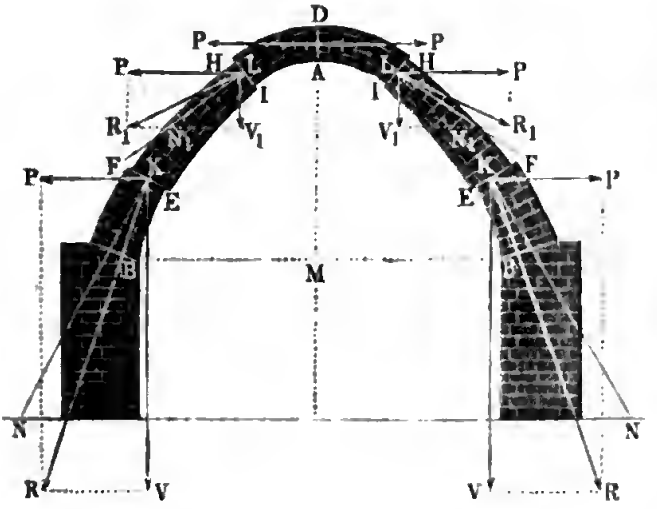
R aus dem (horizontalen) Gewölbſchube P und der Verticalkraft

$$V = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$$

um den Reibungswinkel $RKN = \varrho$ von der Normale KN zur Gewölbfuge EF nach unten zu ab, wogegen in der Bruchfuge HI des paſſiven Gewölbſchubes der Mitteldruck oder die Mittelkraft R_1 aus dem Gewölbſchube P und der Verticalkraft $V_1 = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ um einen gewiſſen Winkel $R_1 LN_1$ von der Normale LN_1 zur Bruchfuge HI nach oben zu abweicht. Erreicht der letztere Winkel die Größe des Reibungswinkels ϱ, ſo erfolgt das Einſtürzen des Gewölbes, in dem das über HI befindliche Gewölbſtück nach außen oder in der Richtung IH ausgleitet. Während dieſes Ausgleitens vermindert ſich natürlich auch die in der Gewölbſpannung P_m beſtehende Wirkung der beiden Gewölbhälften AB, AB

auf einander, und es erfolgt daher auch faſt gleichzeitig ein Herabgleiten des über EF befindlichen Gewölbſtückes, wobei das Gewölbſtück über HI, HI in drei Stücke, EH, EH und $EFFE$, zerfällt. Dieſes Einſtürzen eines Gewölbes durch Ausgleiten kann auf zweierlei Weiſe erfolgen, je nachdem die Bruchfuge des Maximaldruckes über oder unter der Bruchfuge des Minimaldruckes liegt; im erſteren Falle (Fig. 30) gleiten die beiden Seitentheile EH, EH aus- und das Kopfſtück EDE abwärts; im zweiten Falle (Fig. 31) gleiten dagegen die Seitentheile HE ein- und das Kopfſtück IDI auswärts aus. Es iſt leicht zu ermeſſen, daß der erſtere Fall nur bei flachen Gewölben vorkommt, wo die Seiten BE des Gewölbes ſtark gekrümmt ſind, und daß der andere Fall nur bei hohen Gewölben mit einem ſtark gekrümmten Scheitel IAI eintritt.

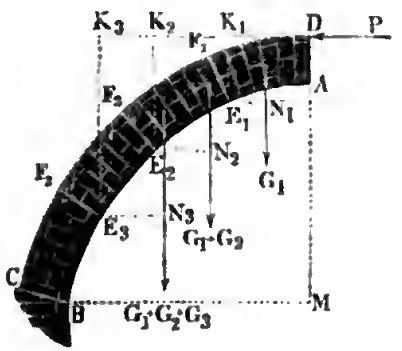
Fig. 31.



Kippen der Gewölbsteine. Ein Gewölbe kann nicht allein durch Gleiten, ſondern auch durch Drehen oder Kippen um die äußere oder innere Kante einer Gewölbfuge einſtürzen; ja es iſt ſogar dieſer Fall der gewöhnlichere und das Einſtürzen durch Gleiten der ſeltenere Fall. §. 23

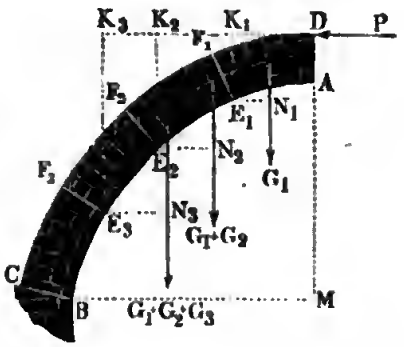
Die Stabilitätsverhältniſſe in Beziehung auf Drehung kennen zu lernen, muß man zunächſt die im Scheitelpunkte D, Fig. 32, nöthigen Kräfte P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. ermitteln, welche eine Drehung der Gewölbſteine um die inneren Kanten E_1, E_2, E_3 u. ſ. w. der Gewölbfugen verhindern, und nun unterſuchen, welche die größte von dieſen Kräften iſt. Bezeichnet man die Hebelarme E_1K_1, E_2K_2, E_3K_3 ··· der Kraft P in Hinſicht auf die als Umdrehungsaxen anzu-

Fig. 32.



sehenden Punkte E_1, E_2, E_3 u. s. w. durch a_1, a_2, a_3 u. s. w. und die Hebelarme $E_1 N_1$, $E_2 N_2$, $E_3 N_3$ ... der Gewichte G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. in Hinsicht auf eben diese Axen durch b_1, b_2, b_1 u. s. w., so hat man für die Kraft P im Scheitelpunkte die Werthe:

Fig. 33.



$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} G_1,$$

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} (G_1 + G_2),$$

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. s. w.

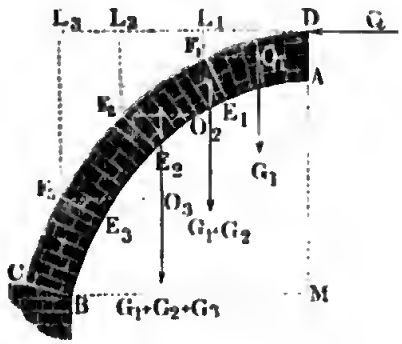
Nun nehmen aber vom Scheitel nach den Widerlagern hin, nicht allein die Factoren b_1, b_2, b_3 u. s. w. und $G_1, G_1 + G_2, G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. des Zählers zu, sondern es wachsen auch die Nenner a_1, a_2, a_3 u. s. w.; es ist daher auch einer von den Werthen P_1, P_2, P_3 u. s. w. ein Maximum, und zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthig, daß die effective Kraft diesem Maximalwerthe P_m im Scheitel gleich sei. Man nennt diejenige Fuge, welcher die größte oder die Kraft in dem Scheitel überhaupt entspricht, die **Bruchfuge** (franz. joint de rupture; engl. joint of rupture), weil in ihr eine Trennung durch Drehung um die untere Kante zuerst erfolgt, wenn die Kraft P_m im Scheitel nachläßt. Sie ist durch den **Bruchwinkel** (franz. angle de rupture; engl. angle of rupture) bestimmt, den die Ebene derselben mit dem Horizonte (oder mit der Verticalen) einschließt. Es ist übrigens leicht zu ermessen, daß der Bruchwinkel diejenige Stelle im Gewölbe angiebt, wo die im Scheitelpunkte D anfangende Widerstandslinie die innere Gewölblinie berührt.

Die auf die angegebene Weise zu findende Maximalkraft P_m im Scheitel ist nun noch mit der nach §. 21 zu bestimmenden, das Gleiten des Gewölbes nach innen verhindernden Maximalkraft zu vergleichen, und dann der **größere von diesen beiden Maximalwerthen als der active oder wirkliche Gewölbschub** (franz. la poussée; engl. the thrust) **anzunehmen**. Aus der auf diese Weise gefundenen Spannung im Gewölbscheitel läßt sich leicht auch die Spannung oder der Gewölbschub in jeder beliebigen Gewölbfuge finden, indem man jene Kraft mit dem Gewichte des oberhalb der gedachten Fuge befindlichen Gewölbstückes durch das Parallelogramm der Kräfte vereinigt.

Hat man nun die Größe (P_m) des Gewölbschubes gefunden, so bleibt nur noch zu untersuchen, ob das Gewölbe AC, Fig. 34, an allen Stellen, dem **Umkippen um F_1, F_2 u. s. w. nach außen widerstehe**. Bezeichnen wir

die Abstände $F_1 L_1$, $F_2 L_2$, $F_3 L_3$ u. s. w. der äußeren Enden F_1, F_2, F_3 u. s. w. der Gewölbfugen von der Horizontalen durch den Gewölbscheitel D mit c_1, c_2, c_3 u. s. w., sowie die Abstände $F_1 O_1$, $F_2 O_2$, $F_3 O_3$ u. s. w. dieser Punkte von den verticalen Schwerlinien der Gewölbstücke AF_1, AF_2, AF_3 u. s. w. mit d_1, d_2, d_3 u. s. w., so lassen sich die Kräfte zum Umkippen dieser Stücke um F_1, F_2, F_3 u. s. w. durch die Formeln

Fig. 34.



$$Q_1 = \frac{d_1}{c_1} G_1,$$

$$Q_2 = \frac{d_2}{c_2} (G_1 + G_2),$$

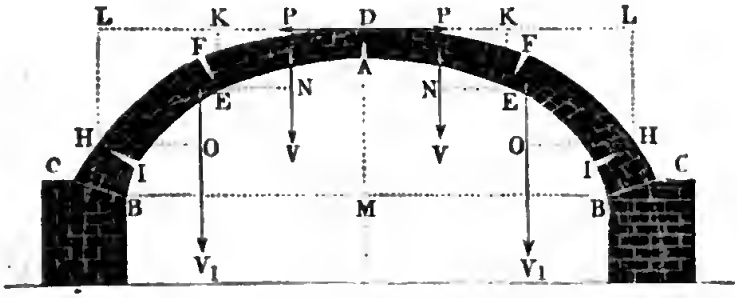
$$Q_3 = \frac{d_3}{c_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. s. w.

ausdrücken, und ist nun die kleinste dieser Kräfte noch größer als der Gewölbschub P_m, so vermag der letztere auch nicht das Gewölbe an irgend einer Stelle nach außen zum Kippen zu bringen. Wird dagegen dieser Minimaldruck Q_n von der Kraft P_m erreicht oder gar übertroffen, so schlägt das Gewölbe nach außen um, ist also ganz ohne Stabilität.

Einstürzen durch Kippen. Die Art und Weise, wie ein Gewölbe durch Kippen gewöhnlich einstürzt, ist aus Fig. 35 zu ersehen; es öffnen §. 24

Fig. 35.



sich hierbei äußerlich die beiden Bruchfugen EF, EF, und innerlich die beiden Fugen HI, HI, welchen der kleinste passive Gewölbschub entspricht, sowie auch die Scheitelfuge DA, oder, da in der Regel das Gewölbe durch einen Schlußstein gebildet wird, die Fugen zu beiden Seiten des Schlußsteins. Ausnahmsweise und nur bei hohen Gewölben findet auch ein Kippen des Gewölbes in umgekehrter Richtung statt, wie Fig. 37 (a. f. S.) vor Augen führt. Hier öffnet sich das Gewölbe im Scheitel und näher den Widerlagern äußerlich und weiter oben, näher dem Scheitel, nach innen; es schla-

gen alſo hierbei die oberen Gewölbſtücke DI, DI durch Drehung um H, H nach außen und die unteren Gewölbſtücke EH, EH durch Drehung um E, E nach innen um. Im erſteren Falle, Fig. 36, befindet ſich die Bruchfuge

Fig. 36.

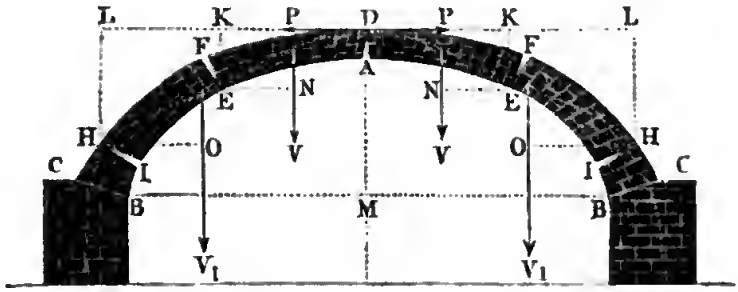
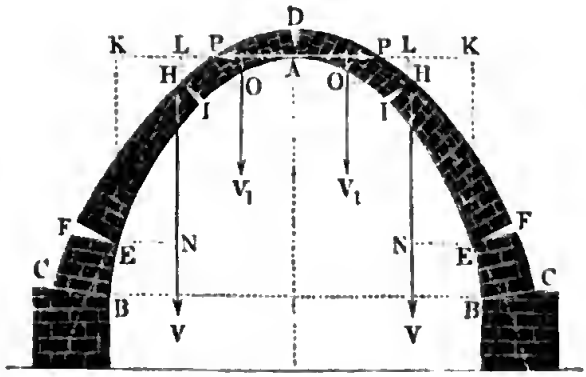


Fig. 37.



EF des Maximal- oder activen Gewölbſchubes über der Bruchfuge IH des Minimal- oder paſſiven Gewölbſchubes, und im zweiten Falle, Fig. 37, findet das Umgekehrte ſtatt, es liegt hier EF unter HI; während ferner dort die beiden Gewölbhälften im oberen Ende D des Gewölbſcheitels auf einander wirken, findet hier dieſe Gegenwirkung im unteren Ende A des Scheitels ſtatt.

Um die Stabilität des Gewölbes in Hinſicht auf dieſen zweiten Fall des Kippens kennen zu lernen, muß man die in §. 23 angegebenen Rechnungen mit der Abänderung noch ein Mal durchführen, daß man ſowohl die Hebelarme a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. in Hinſicht auf die inneren Fugenkanten E_1, E_2, E_3 u. ſ. w., Fig. 34, als auch die Hebelarme c_1, c_2, c_3 u. ſ. w. in Hinſicht auf die äußeren Fugenkanten F_1, F_2, F_3 u. ſ. w. um die Gewölbſtärke $AD = e$ im Scheitel vermindert. Während man oben aus dem Gewichte

$$V = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$$

des Gewölbſtückes DE den Gewölbſchub durch den Maximalwerth

$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

bestimmt, wird er hier durch das Maximum

$$P_m = \frac{b_m}{a_m - e}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

angegeben, und während im ersteren Falle das dem Gewichte

$$V_1 = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

des Gewölbstückes AH entsprechende Minimum des passiven Gewölbschubes

$$Q_n = \frac{d_n}{c_n}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n)$$

zu setzen ist, hat man hier

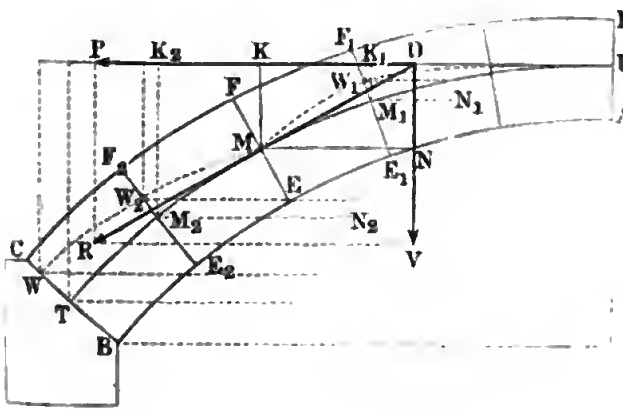
$$Q_n = \frac{d_n}{c_n - e}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n)$$

anzunehmen.

Ist im zweiten Falle $Q_n < P_m$ und befindet sich die Bruchfuge von Q_n über der Bruchfuge von P_m, so ist ein Umstürzen des Gewölbes, wie Fig. 37 zeigt, zu erwarten. Da das Maximum P_m oder der active Gewölbschub nicht allein das Minimum Q_n, sondern auch noch größere Werthe des passiven Gewölbschubes übertreffen kann, so ist auch möglich, daß die Gewölbe BAB, Fig. 36 und Fig. 37, durch Kippen in mehr als fünf Punkten einstürzen. Endlich kann auch der Fall vorkommen, daß ein Gewölbe durch Gleiten und Kippen zugleich zusammenstürzt.

Angriffspunkte des Gewölbschubes. Die im Vorstehenden enthaltene Bestimmung des activen Gewölbschubes P_m ist nur eine approximative, da sie sich auf die Annahme gründet, daß der Angriffspunkt dieser Kraft in einem der beiden Enden D oder A der Scheitelfuge liege und daß die Richtung der Kraft, mit welcher das eine Gewölbstück DE, Fig. 38, auf das andere Gewölbstück BF wirkt, durch den unteren Endpunkt E der Gewölbfuge EF gehe. Jedenfalls vertheilt sich aber in Folge der Zusammendrückbarkeit der Gewölbsteine sowohl der Druck P_m auf die ganze Scheitelfläche AD, als auch die Kraft, mit welcher §. 25

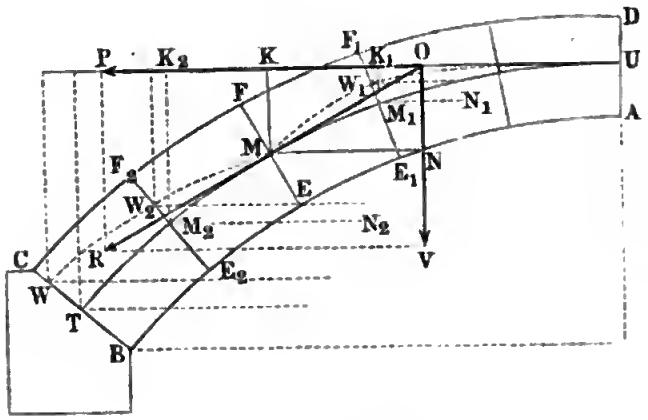
Fig. 38.



die Gewölbſtücke DE und BF auf einander wirken, auf die ganze Fugenebene EF, und es iſt daher anzunehmen, daß im Gleichgewichtszuſtande des Gewölbes die Angriffspunkte U, M dieſer Kräfte innerhalb der Flächen AD und EF zu liegen kommen, und daß dieſelben erſt dann an die Enden D und E, oder nach Befinden A und F rücken, wenn der Gleichgewichtszuſtand des Gewölbes aufhört und das Kippen deſſelben u. ſ. w. eintritt.

Nehmen wir an, daß die Mittel- oder Angriffspunkte der Kräfte, womit die Gewölbſteine in den Gewölbfugen gegen einander drücken, die Mittelpunkte U, M, T u. ſ. w. der Fugenhöhen AD, EF, BC u. ſ. w. einnehmen, ſo können wir die innere Gewölblinie AEB durch dieſe Mittellinie UMT erſetzen, und mit Hülfe derſelben die Größe des Gewölbſchubes nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Regel finden.

Fig. 39.



Bezeichnen wir die Fugenbreiten E_1F_1, E_2F_2 . . . durch e_1, e_2 . . ., ſowie die Neigungswinkel der Fugen durch α_1, α_2 u. ſ. w., ſo können wir hiernach die zum Gleichgewichte in den Fugen E_1F_1, E_2F_2 . . . nöthigen Gewölbſchube:

$$P_1 = \frac{b_1 + {}^1/_2 e_1 \cos.\alpha_1}{a_1 - {}^1/_2 e_1 \sin.\alpha_1} G_1,$$

$$P_2 = \frac{b_2 + {}^1/_2 e_2 \cos.\alpha_2}{a_2 - {}^1/_2 e_2 \sin.\alpha_2} (G_1 + G_2),$$

$$P_3 = \frac{b_3 + {}^1/_2 e_3 \cos.\alpha_3}{a_3 - {}^1/_2 e_3 \sin.\alpha_3} (G_1 + G_2 + G_3) \text{ u. ſ. w.}$$

und den größten,

$$P_m = \frac{b_m + {}^1/_2 e_m \cos.\alpha_m}{a_m - {}^1/_2 e_m \sin.\alpha_m} (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_m),$$

aller dieſer Kraftwerthe, dem wirklichen Gewölbſchub gleich ſetzen.

Die Mittelkraft R aus P_m und $V_m = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$, womit das Gewölbſtück DE auf das Gewölbſtück CE wirkt, geht durch den Mittelpunkt M der entſprechenden Fuge (Bruchfuge) EF, wogegen die Richtungen der Mittelkräfte der übrigen Gewölbfugen die letzteren oberhalb der Mittellinie UMT durchſchneiden; denn damit die obigen Kraftwerthe

$P_1, P_2, P_3 \ldots$ den größeren Werth P_m annehmen können, iſt nöthig, daß die Hebelarme a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. kleinere, und die Hebelarme b_1, b_2, b_3 u. ſ. w. entſprechend größere Werthe annehmen, daß folglich die Stützpunkte W_1, W_2 u. ſ. w. in den Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. ſ. w. von der Mittellinie UMT aus etwas aufwärts rücken. Wenn einer der Zwiſchenpunkte W_1, W_2 u. ſ. w. der äußeren Gewölblinie DFC ſehr nahe zu liegen kommt, ſo concentrirt ſich der Druck zwiſchen den benachbarten Gewölbſteinen auf eine zu kleine Fläche, um denſelben aushalten zu können; es erfolgt daher ein Abbrechen der äußeren Ecken dieſer Steine, womit nun aus bekannten Gründen ein Zuſammenſtürzen des Gewölbes durch Kippen nach außen verbunden iſt. Noch viel weniger darf natürlich einer der Angriffspunkte W_1, W_2 u. ſ. w. in die äußere Gewölblinie DFC oder gar über dieſelbe hinausfallen. Es iſt dagegen ein Gewölbe um ſo ſolider und ſtabiler, je näher die Angriffspunkte W_1, W_2 u. ſ. w. in den Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. ſ. w. der Mittellinie UMT liegen, je mehr alſo die Horizontalkräfte P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. zur Verhinderung des Niederkippens der einzelnen Gewölbſtücke der Gleichheit kommen.

Bezeichnen $f_1, f_2 \ldots$ die Abſtände $E_1 W_1$, $E_2 W_2 \ldots$ der dem Gewölbſchub P_m entſprechenden Druckpunkte $W_1, W_2 \ldots$ von den inneren Enden $E_1, E_2 \ldots$ der Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. ſ. w, ſo läßt ſich nun

$$P_m = \frac{b_1 + f_1 \cos.\alpha_1}{a_1 - f_1 \sin.\alpha_1} G_1 = \frac{b_2 + f_2 \cos.\alpha_2}{a_2 - f_2 \sin.\alpha_2} (G_1 + G_2)$$
$$= \frac{b_3 + f_3 \cos.\alpha_3}{a_3 - f_3 \sin.\alpha_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. ſ. w. ſetzen, ſo daß ſchließlich

$$f_1 = \frac{P_m a_1 - G_1 b_1}{P_m \sin.\alpha_1 + G_1 \cos.\alpha_1},$$

$$f_2 = \frac{P_m a_2 - (G_1 + G_2) b_2}{P_m \sin.\alpha_2 + (G_1 + G_2) \cos.\alpha_2},$$

$$f_3 = \frac{P_m a_3 - (G_1 + G_2 + G_3) b_3}{P_m \sin.\alpha_3 + (G_1 + G_2 + G_3) \cos.\alpha_3}$$ u. ſ. w. folgt.

Die Stabilität des Gewölbes fordert, daß keiner dieſer Werthe $f_1, f_2, f_3 \ldots$ die entſprechende Gewölbdicke oder Fugenbreite $e_1, e_2, e_3 \ldots$ erreiche.

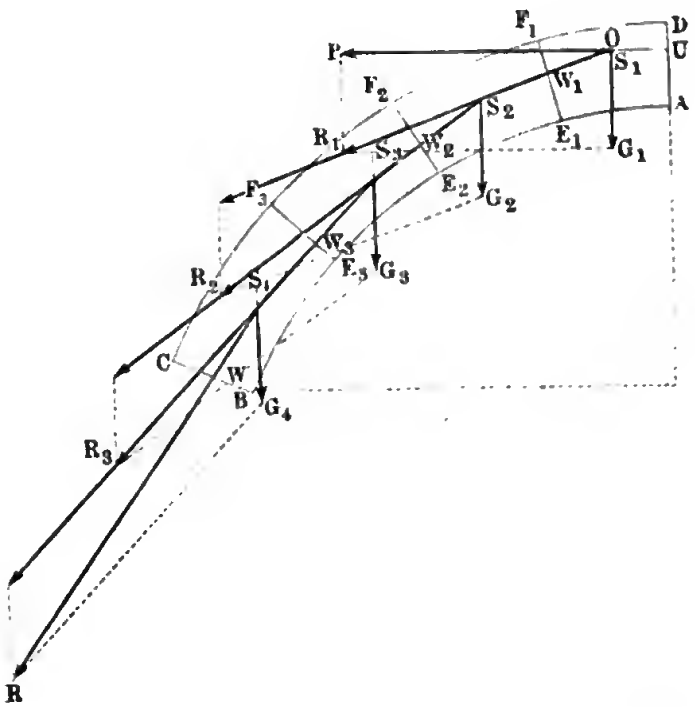
Um ſicher zu gehen, macht man die Bedingung, daß die Druckpunkte $W_1, W_2 \ldots$ in den Fugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2 \ldots$ um mindeſtens ein Drittel der Fugenbreiten $e_1, e_2 \ldots$ von der inneren reſp. äußeren Wölbfläche abſtehen, legt hiernach die Drucklinie OP im Scheitel um $DU = \frac{1}{3} e$ unter den Gewölbſcheitel, ſowie den Druckpunkt M in der Bruchfuge um $EM = \frac{1}{3} EF = \frac{1}{3} e_m$ über die innere Wölbfläche, wobei

$$P_m = \frac{b_m + {}^1/_3\, e_m}{a_m - {}^1/_3\, e_m} \frac{cos.\, \alpha_m}{sin.\, \alpha_m} (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_m)$$

zu ſetzen iſt, und gefordert wird, daß $f_1 < {}^2/_3\, e_1$, ſowie $f_2 < {}^2/_3\, e_2$, $f_3 < {}^2{}_3\, e_3$ ausfalle u. ſ. w.

§. 26 **Widerſtandslinie der Gewölbe.** Wenn ſowohl der Angriffspunkt U als auch die Größe P der Kraft gegeben iſt, durch welche ein Gewölbſtück $ABCD$, Fig. 40, im Gleichgewichte erhalten wird, ſo kann man die Stabilitätsverhältniſſe mittelſt der Widerſtandslinie wie die einer Futter-

Fig. 40.



mauer beurtheilen. Aus der Kraft P und aus dem im Schwerpunkte S_1 des erſten Gewölbſtückes AF_1 angreifenden Gewichte G_1 dieſes Stückes ergiebt ſich zunächſt die Kraft R_1 in der erſten Gewölbfuge $E_1 F_1$, ſowie der Punkt W_1, in welchem die Richtung dieſer Kraft dieſe Gewölbfuge ſchneidet; ferner aus dem Drucke R_1 und dem im Schwerpunkte S_2 des zweiten Gewölbſtückes angreifenden Gewichte G_2 dieſes Stückes folgt der Druck R_2 in der zweiten Gewölbfuge, ſowie der Durchſchnitt W_2 der Richtung dieſer Kraft mit der Ebene dieſer Fuge; und wenn man auf dieſe Weiſe fortfährt, ſo erhält man nach und nach die übrigen Drücke R_3, R_4 . . ., ſowie die Durchſchnitte W_3, W_4 . . . ihrer Richtungen mit den folgenden Gewölbfugen. Die Linie $U W_1 W_2 W_3 \ldots W$, welche die Durchſchnitte W_1, W_2,

W_3, . . . oder Angriffspunkte der Kräfte P, R_1, R_2, R_3 . . . in den Gewölbfugen mit einander verbindet, ist die Widerstandslinie des Gewölbes (franz. ligne de résistance; engl. line of resistance [vergl. II., §. 11]). Das Gewölbe ist nun im Gleichgewichte:

1) wenn die Richtungen der Kräfte R_1, R_2, R_3 . . . von den Normalen der Gewölbfugen nirgends um mehr als den Reibungswinkel ϱ abweichen, und
2) wenn die Widerstandslinie weder die innere, noch die äußere Wölblinie erreicht oder durchschneidet, und sich überhaupt den Wölblinien nicht sehr nähert.

Wäre an einer Stelle des Gewölbes die Abweichung der Druckrichtung von der Normale der Gewölbfuge größer als der Reibungswinkel, so würde ein Verschieben wie in Fig. 30 oder 31 eintreten, und träte diese Linie aus einer der Wölblinien AB oder CD heraus, so würde ein Kippen der Gewölbsteine, wie z. B. Fig. 41 und Fig. 42 vor Augen führt, eintreten. Bei

Fig. 41.

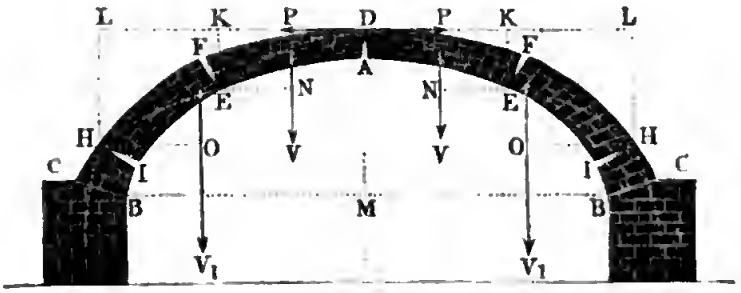
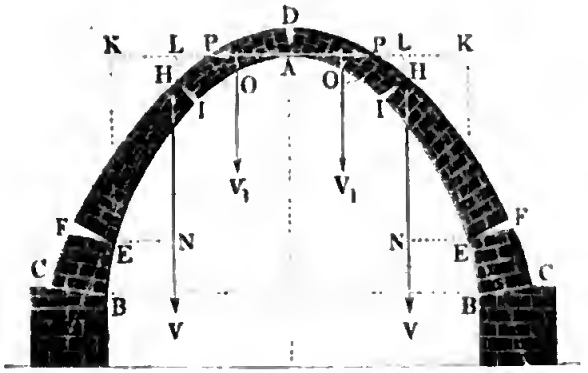


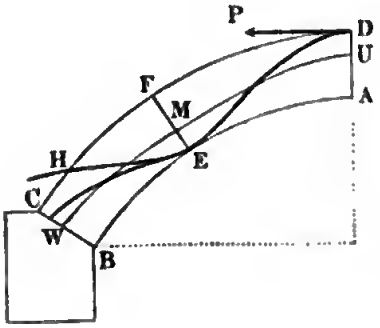
Fig. 42.



den gewöhnlichen auf Widerlagern aufstehenden Gewölben ist allerdings weder der Angriffspunkt noch die Größe der Kraft P bekannt, mit welcher die beiden Hälften eines Gewölbes auf einander wirken, und deshalb müssen auch der Construction der Widerstandslinie gewisse Annahmen vorausgehen. Nehmen wir, wie in §. 23, an, daß sich die beiden Gewölbhälften im

Scheitel D der äußeren Gewölblinie CDC, Fig. 41, gegen einander ſtützen und daß jede Gewölbhälfte wieder in zwei Stücke DE und CE zerfällt, welche ſich in einem Punkte E der inneren Wölblinie gegen einander ſtemmen, ſo können wir die Kraft P, mit welcher die beiden Gewölbhälften in D gegen einander drücken, gleichſetzen der größten aller Kräfte, wodurch ſowohl ein Kippen um irgend einen Punkt der inneren Wölblinie AB als auch ein Herabgleiten in irgend einer Gewölbfuge verhindert wird. Mit Hülfe dieſer Kraft P laſſen ſich noch andere Punkte der durch D und E gehenden Widerſtandslinie finden. Wenn dieſe Linie, wie z. B. DEW, Fig. 43, der äußeren Wölblinie CD nirgends nahe kommt, ſo beſitzt das Gewölbe Stabilität, wenn ſich dagegen dieſe Linie, wie z. B. DEH, der äußeren Wölblinie ſehr nähert, oder ſie wohl gar durchſchneidet, ſo muß das Gewölbe durch Kippen um H nach außen umſtürzen. Bei dem in Fig. 42 abgebildeten Falle drücken die beiden Gewölbhälften im Scheitel A der inneren Gewölbhälfte gegen einander, es geht daher auch hier die Widerſtandslinie durch A; dagegen in dem Falle, welchen Fig. 39 vor Augen führt, wo die Widerſtandslinie durch die Mittelpunkte U und W zweier Gewölbfugen gelegt iſt, biegt die Widerſtandslinie bei W_1, W_2 u. ſ. w. nach außen von der Mittellinie des Gewölbes ab. Bei dem vollkommenſten Gewölbe fällt die Widerſtandslinie mit der Mittellinie UMT des Gewölbes zuſammen.

Fig. 43.

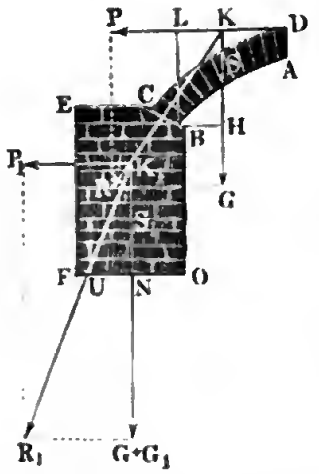


Sicherer iſt es, die Widerſtandslinie UMW durch zwei Punkte U und M zu legen, wovon der erſte um $DU = \frac{1}{3} DA$ unter dem Gewölbſcheitel D, und der andere um $EM = \frac{1}{3} EF$ über der inneren Wölbfläche liegt.

§. 27 **Stabilität der Widerlager.** Hat man ſich durch die in den vorſtehenden Paragraphen angegebenen Rechnungen von der Stabilität eines Gewölbes überzeugt, und dabei den Druck im Schlußſtein oder in der Schlußfuge beſtimmt, ſo kommt es noch darauf an, die Stabilität der Widerlagsmauern zu unterſuchen, und vorzüglich die Stärke der einem Ausweichen oder Umſtürzen hinreichenden Widerſtand leiſtenden Widerlagsmauern zu berechnen. Dieſe Unterſuchung iſt um ſo wichtiger, da gerade wegen Mangel an hinreichendem Widerſtande dieſer Stützen das Einfallen oder Zerſpringen der an und für ſich vollkommen ſtabilen Gewölbe, zumal wenn ſie ſehr flach ſind und deshalb einen großen Horizontaldruck ausüben, ſehr oft herbeigeführt wird. Man ſieht leicht ein, daß eine Widerlagsmauer FB,

Fig. 44, Stabilität beſitzt, wenn die Richtung der Mittelkraft $\overline{K_1 R_1} = R_1$ aus dem im Schwerpunkte S angreifenden Gewichte G der einen Gewölbhälfte, aus dem im Gewölbſcheitel angreifenden Horizontaldrucke P und aus dem in ſeinem Schwerpunkte S_1 angreifenden Gewichte G_1 der Widerlagsmauer ſelbſt durch die Baſis FO der Widerlagsmauer oder des Gewölbpfeilers hindurchgeht, und um einen Winkel von der Verticalen $K_1 N$ abweicht, der den Reibungswinkel ϱ nicht übertrifft.

Fig. 44.



Für den Winkel $UK_1N = \beta$, welchen die Mittelkraft R_1 aus $G + G_1$ und $K_1 P_1 = P$ mit der Verticalen einſchließt, hat man:

$$tang.\,\beta = \frac{P}{G + G_1};$$

da aber $tang.\,\varrho$ gleich dem Reibungscoefficienten φ iſt, ſo fordert die Stabilität der Widerlager in Hinſicht auf das Ausgleiten, daß

$$\frac{P}{G + G_1} < \varphi, \text{ alſo das Gewicht der Widerlagsmauer}$$

$$G_1 > \frac{P}{\varphi} - G \text{ ſei.}$$

Damit ferner die Mittelkraft durch die äußerſte Kante F des Widerlagpfeilers gehe, ſetzen wir das Moment von P in Hinſicht auf dieſe Kante der Summe der Momente von den Gewichten G und G_1 gleich. Iſt a die Gewölbhöhe BL und h die Höhe BO des Widerlagspfeilers, ſo hat man das Moment der Kraft P in Hinſicht auf die als Axe anzuſehende Kante F, $= P\,(a + h)$; iſt ferner b der Horizontalabſtand BH der verticalen Schwerlinie der Gewölbhälfte AC von der inneren Kante B, wo das Gewölbe an das Widerlager anſtößt, d die Stärke FO der Widerlagsmauer und s der Abſtand FN der verticalen Schwerlinie der Widerlagsmauer von der Kante F, ſo hat man das Moment der Gewichte G und G_1:

$$= G\,(b + d) + G_1 s$$

und es giebt nun das Gleichſetzen beider Momente folgende Beſtimmungsgleichung für die Stärke der Widerlagsmauer,

$$P\,(a + h) = G\,(b + d) + G_1 s,$$

oder, wenn man den Sicherheitscoefficienten δ einführt,

$$\delta P\,(a + h) = G\,(b + d) + G_1 s.$$

Bezeichnet h_1 die mittlere Pfeilerhöhe, und γ die Dichtigkeit der Pfeilermaſſe, ſo

hat man für jeden Fuß Länge des Pfeilers das Gewicht $G_1 = h_1 d \gamma$, und ſetzt man noch $s = {}^1/_2 d$, das Moment $G_1 s = {}^1/_2 h_1 d^2 \gamma$.

Hiernach folgt

$$ {}^1/_2 h_1 d^2 \gamma + G d = \delta P (a + h) - G b, \text{ oder} $$

$$ d^2 + \frac{2 G d}{h_1 \gamma} = \frac{\delta P (a + h) - G b}{{}^1/_2 h_1 \gamma}, $$

daher die in Frage ſtehende Dicke der Widerlager:

$$ 1)\ d = -\frac{G}{h_1 \gamma} + \sqrt{\frac{\delta P (a + h) - G b}{{}^1/_2 h_1 \gamma} + \left(\frac{G}{h_1 \gamma}\right)^2}. $$

Um dieſe Mauer gegen das Gleiten zu ſichern, müßte

$$ G_1 > \frac{P}{\varphi} - G, \text{ d. i.} $$

$$ 2)\ d > \frac{P - \varphi G}{\varphi h_1 \gamma} \text{ ſein.} $$

In der Regel wird man finden, daß der erſte Werth von d größer iſt als der letzte, daß alſo die Widerlagsſtärke dem erſten gleich zu machen iſt.

Für ſehr hohe Pfeiler giebt die erſte Bedingung, da dann $G d$, $\delta P a$ und $G b$, gegen $\delta P h$ und ${}^1/_2 h_1 d^2 \gamma$, welches ${}^1/_2 h d^2 \gamma$ geſetzt werden kann, verſchwinden:

$$ {}^1/_2 h d^2 \gamma = \delta P h, \text{ d. i. } {}^1/_2 d^2 \gamma = \delta P, $$

daher die Maximal- oder Grenzſtärke

$$ d = \sqrt{\frac{2 \delta P}{\gamma}}. $$

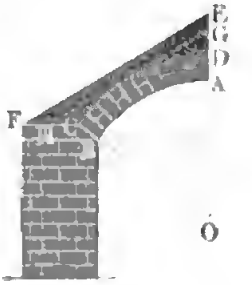
Nach Audoy iſt $\delta = 1{,}9$ zu ſetzen, ſicherer iſt es aber, wie bei Futtermauern, $\delta = {}^9/_4$, oder, wie beim Gewölbbogen, $\delta = 3$ anzunehmen. Auch iſt es rathſam, den Angriffspunkt des Gewölbſchubes nicht im Scheitel D, ſondern um ein Drittel der Gewölbſtärke tiefer liegend, anzunehmen.

§. 28 **Belastetes Gewölbe.** Wir haben ſeither noch nicht auf die Belaſtung der Gewölbe Rückſicht genommen; da es aber gerade zu den Ausnahmen gehört, wenn ein Gewölbe unbelaſtet iſt, ſo haben wir den Einfluß der Belaſtung auf die Stabilität der Gewölbe noch beſonders zu unterſuchen. Die Belaſtung iſt entweder veränderlich oder unveränderlich. Veränderliche oder zufällige Belaſtungen kommen vorzüglich bei Brücken vor. Damit die Stabilität durch zufällige Belaſtungen nicht zu ſehr alterirt oder gar aufgehoben werde, iſt es nöthig, die Gewölbe ſchon an und für ſich ſo ſchwer herzuſtellen oder ihnen eine derartige conſtante Belaſtung aufzulegen, daß die zufällige Belaſtung, z. B. die von Laſtwagen oder Eiſenbahnzügen, welche über die Brücke wegfahren, nur eine kleine Veränderung in der ganzen Laſt oder Spannung herbeiführt.

Was die conſtante Belaſtung anlangt, ſo beſteht dieſe meiſt in einer Uebermauerung, und zwar entweder mit horizontaler oder mit geneigter Oberfläche EF, wie Fig. 45 und Fig. 46 vor Augen führen. In vielen Fällen beſteht die Uebermauerung mit dem Gewölbe aus einerlei Material,

Fig. 45.

Fig. 46.



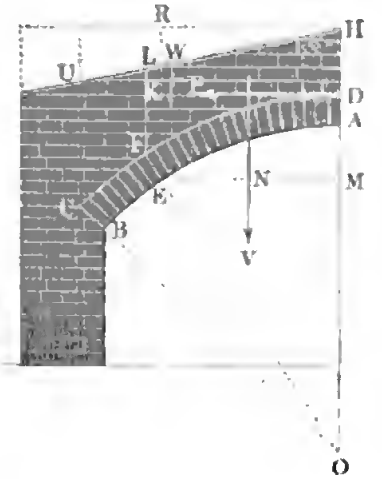
und iſt nun dieſelbe dicht zuſammengefügt, ſo kann man für das Ganze eine gemeinſchaftliche Dichtigkeit annehmen, und dadurch die Rechnung bedeutend erleichtern. Nimmt man nach I, §. 61 das ſpecifiſche Gewicht des Mauerwerkes $=$ 1,6 bis 2,4 an, ſo erhält man für die Dichtigkeit die Grenzwerthe

$$\gamma = 100 \text{ bis } 148 \text{ Pfund},$$

und zwar erſtere für Ziegelmauern und letztere für Bruchſteinmauern.

Man kann annehmen, daß von der ganzen Uebermauerung $CDHU$ eines Gewölbes AC, Fig. 47, je ein Bogenſtück DE deſſelben das Mauerſtück $DHLF$ trage, welches über DF liegt, alſo von den Senkrechten DH und FL begrenzt wird; es iſt daher auch das Moment, mit welchem ſich das Gewölbſtück DE um E nach innen zu drehen ſucht, aus dem Momente dieſes Gewölbſtückes DE und aus dem Momente des Mauerſtückes FH zuſammengeſetzt. Wenn wir daher den Gewölbſchub durch den Ausdruck

Fig. 47.



$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

beſtimmen wollen (ſ. §. 23), ſo müſſen wir in demſelben entweder ſtatt

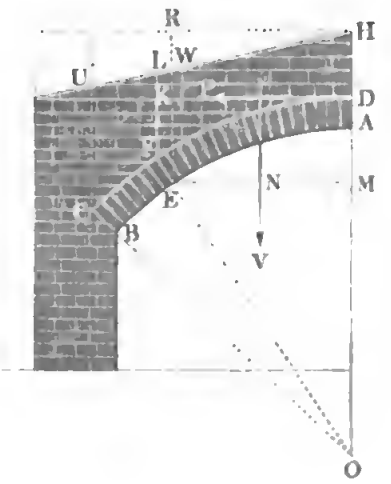
$$b_m(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

die Summe der Momente von DE und FH einführen, oder für $G_1 + G_2 + \cdots + G_m$ die Summe V der Gewichte von DE und FH und für b_m den Horizontalabſtand EN des Schwerpunktes dieſer Gewichtsſumme von der inneren Kante E der Bruchfuge EF einſetzen.

Es iſt hiernach zu erſehen, daß durch die Uebermauerung oder Belaſtung die Spannung P_m eines Gewölbes vergrößert wird. Da das Moment des Gewichtes von FH in Hinſicht auf die äußere Kante F größer iſt als in Hinſicht auf die innere Kante E, ſo verliert hiernach das Gewölbe durch dieſe Vergrößerung der Spannung nichts an Stabilität, ſondern es wird dieſelbe hierdurch in der Regel noch etwas größer.

(§. 29) **Gewölbschub.** Um allgemeine Formeln zur Beſtimmung der Größe der Spannung P_m verſchieden geformter und verſchieden belaſteter Gewölbe BH, Fig. 48, zu erhalten, muß man die Momente von DE und FH, ſowie den Hebelarm $EK = a_m$ entweder durch die Bogenhöhe $MA = h$ oder durch den Winkel $FOD = \beta$ ausdrücken, welchen die Gewölbfuge EF mit der Verticalen DO einſchließt, und nach Einſetzung dieſer Ausdrücke in die Formel

Fig. 48.



$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

denjenigen Werth von h oder von β ermitteln, welcher P_m zum Maximo macht; führt man endlich dieſen Werth von β in die letzte Formel ein, ſo giebt dieſelbe die geſuchte Gewölbſpannung an. In verſchiedenen Schriften über die Theorie der Gewölbe werden dieſe Entwickelungen vollſtändig durchgeführt; hier möge jedoch nur folgende angenäherte Beſtimmung vorgenommen werden.

Sehen wir von dem Gewichte der Uebermauerung über EF ganz ab, ſo können wir das Moment des Gewölbſtückes EH in Hinſicht auf die Kante E ſetzen:

Moment des Rechteckes $EMHR$ minus Moment des Dreieckes WHR minus Moment des Segmentes AEM.

Bezeichnet nun s die Sehne EM, h die Bogenhöhe AM, a die ganze Mauerhöhe AH im Scheitel und δ den Neigungswinkel LHR der äußeren Begrenzung der Uebermauerung, ſo haben wir das Moment von $EMHR$:

$$= s\,(h + a) \cdot \frac{s}{2} = (h + a)\,\frac{s^2}{2},$$

das Moment von WHR:

$$= s \,.\, {}^1/_2\, s\ tang.\,\delta \cdot \frac{s}{3} = \frac{s^3}{6}\ tang.\,\delta,$$

und, wenn wir annähernd die Fläche $AEM = {}^2/_3\, sh$ und (nach Band I.,

§. 115) den Abstand des Schwerpunktes derselben von E, $= {}^3/_5\, s$ setzen, das Moment von AEM

$$= {}^2/_3\, sh \,.\, {}^3/_5\, s = {}^2/_5\, s^2 h.$$

Es ist also hiernach das Moment des ganzen Mauerstückes EH:

$$\left(\frac{h+a}{2} - \frac{s}{6}\, tang.\, \delta - {}^2/_5\, h\right) s^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{h}{10} - \frac{s}{6}\, tang.\, \delta\right) s^2.$$

Da nun der Hebelarm des Gewölbschubes P, $EK = MD = h + e$ ist, so folgt diese Kraft:

$$P = \frac{({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h - {}^1/_6\, s\ tang.\, \delta)\, s^2 \gamma}{h+e},$$

oder, wenn man noch $s^2 = h\,(2r - h)$ einführt:

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h - {}^1/_6\, s\ tang.\, \delta)\, \frac{(2r-h)\, h\gamma}{h+e}.$$

Ist das Gewölbe horizontal übermauert, so hat man $\delta = 0$, und daher einfacher:

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, \frac{(2r-h)\, h\gamma}{h+e}.$$

Um denjenigen Werth von h zu finden, welcher P zum Maximo macht, differenziiren wir diesen Ausdruck in Hinsicht auf h, und setzen das erhaltene Differenzialverhältniß $=$ Null (siehe Band I., analyt. Hülfslehren, Art. 13).

Es ist hiernach:

$$(h+e)\,[(2r-h)\,({}^1/_2\, a + {}^1/_5\, h) - ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, h]$$
$$= ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\,(2r-h)\, h, \text{ d. i.:}$$
$$(h+e)\,(ra - ha + {}^2/_5\, rh - {}^3/_{10}\, h^2)$$
$$= (ra + {}^1/_5\, rh - {}^1/_2\, ah - {}^1/_{10}\, h^2)\, h, \text{ oder:}$$
$$h\,({}^1/_5\, rh - {}^1/_2\, ah - {}^1/_5\, h^2) + e\,(ra - ha + {}^2/_5\, rh - {}^3/_{10}\, h^2) = 0,$$

nach den Potenzen von h geordnet, folgt die Bestimmungsgleichung:

I.) $h^3 - (r - {}^5/_2\, a - {}^3/_2\, e)\, h^2 - e\,(2r - 5a)\, h - 5\, e\, ra = 0.$

Setzt man den durch Auflösung dieser cubischen Gleichung erhaltenen Werth von h in die Gleichung

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, \frac{(2r-h)\, h\gamma}{h+e},$$

oder einfacher in

II.) $P = (ra - ha + {}^2/_5\, rh - {}^3/_{10}\, h^2)\, \gamma,$

so erhält man dadurch den gesuchten Gewölbschub P (oder P_m).

Natürlich kann h höchstens die Höhe h_1 der inneren Wölbfläche erreichen. Giebt die Formel I. einen größeren Werth für h, so hat man die letztere Höhe h_1 statt h in die Formel II. einzusetzen.

Beispiel. Für einen kreisförmigen Brückenbogen, bei welchem die Höhe des Schlußsteines, $e = \frac{r}{20}$, und die ganze Mauerhöhe im Scheitel, $a = 2e = \frac{r}{10}$

iſt, beſtimmt ſich die ſenkrechte Tiefe h der Bruchfuge unter dem Scheitel durch die Gleichung:

$$h^3 - (1 - 0{,}25 - 0{,}075)\, r\, h^2 - 0{,}05\, (2 - 0{,}5)\, r^2 h - \frac{r^3}{40} = 0,$$

oder

$$h^3 - 0{,}675\, r\, h^2 + 0{,}075\, r^2 h - 0{,}025\, r^3 = 0.$$

Es iſt hiernach ziemlich genau $h = \frac{2}{3} r$, und folglich der Gewölbſchub:

$$P = (0{,}1000 - 0{,}0667 + 0{,}2667 - 0{,}1333)\, r^2 \gamma = 0{,}1667\, r^2 \gamma.$$

Iſt der innere Gewölbhalbmeſſer $r = 40$ Fuß, und die Dichtigkeit der Gewölbmauer, $\gamma = 150$ Pfund, ſo erhält man:

$$P = 0{,}1667 \,.\, 1600 \,.\, 150 = 40000 \text{ Pfund},$$

und folglich den Druck pr. Quadratzoll der Scheitelfuge:

$$\frac{P}{e} = \frac{40000}{2 \,.\, 144} = 139 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung. Das Gewicht des Gewölbſtückes $A\,E\,W\,H$, Fig. 49, iſt annähernd:

$$G = \left(h + a - \tfrac{2}{3} h - \frac{s}{2}\, tang.\, \delta\right) s\, \gamma = \left(\tfrac{1}{3} h + a - \frac{s}{2}\, tang.\, \delta\right) s\, \gamma,$$

und folglich die Horizontalkraft im Gewölbſcheitel D, wodurch das Herabgleiten dieſes Körpers auf der Gewölbfuge $E\,F$ verhindert wird (ſ. §. 21):

$$P = G\, tang.\, (\alpha - \varrho) = \left(\tfrac{1}{3} h + a - \frac{s}{2}\, tang.\, \delta\right) tang.\, (\alpha - \varrho) \,.\, s\, \gamma.$$

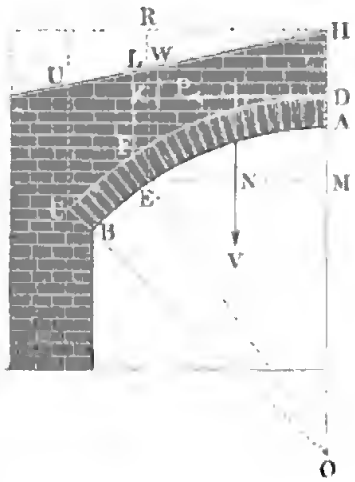
Setzt man in dieſem Ausdrucke noch

$$h = r\, (1 - sin.\, \alpha) \text{ und } s = r\, cos.\, \alpha,$$

ſo erhält man:

$$P = \left(\frac{a}{r} + \frac{1 - sin.\, \alpha}{3} - \tfrac{1}{2}\, cos.\, \alpha\, tang.\, \delta\right) tang.\, (\alpha - \varrho)\, cos.\, \alpha \,.\, r^2 \gamma,$$

Fig. 49.



und es iſt nun, um den dem Ausgleiten des Gewölbes entſprechenden Gewölbſchub zu beſtimmen, derjenige Werth für α einzuführen, welcher dieſen Ausdruck zum Maximo macht.

Iſt die Uebermauerung horizontal begrenzt, und dabei ſehr hoch, ſo kann man einfacher

$$P = a\, r\, \gamma\, cos.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho)$$

ſetzen.

Da dieſer Ausdruck ſowohl für $\alpha = \varrho$ als auch für $\alpha = 90$ Grad Null ausfällt, und für Werthe von α zwiſchen ϱ und 90 Grad eine poſitive Größe giebt, ſo iſt er für einen gewiſſen Werth von α innerhalb dieſer Grenzen ein Maximum. Durch Differenziiren u. ſ. w. findet man die Gleichung

$$2\, cotang.\, \alpha = sin.\, 2\, (\alpha - \varrho),$$

deren Auflöſung den geſuchten Werth von α giebt.

Für $\varrho = 30$ Grad iſt z. B. $\alpha = 64^0\, 52'$, und es folgt hiernach der Gewölbſchub:

$$P = a\, r\, \gamma\, cos.\, 64^0\, 52'\, tang.\, 34^0\, 52' = 0{,}4247\ \ 0{,}6967\ a\, r\, \gamma = 0{,}2965\, a\, r\, \gamma.$$

Iſt z. B. $r = 40$, $a = \frac{r}{10} = 4$ und $\gamma = 150$ Pfund, ſo folgt:

$$P = 0{,}2965 \,.\, 160 \,.\, 150 = 7116 \text{ Pfund},$$

alſo ein viel kleinerer Werth, als aus der Annahme des Kippens hervorgeht.

Gewölbstärke. Damit die Gewölbſteine dem Zerdrücken hinreichenden §. 30
Widerſtand entgegenſetzen, müſſen die Gewölbſteine eine gewiſſe, der Spannung entſprechende Höhe oder Länge haben, und da dieſelbe im Scheitel am kleinſten iſt und nach dem Widerlager hin zunimmt, ſo ſollte eigentlich auch die Gewölbſtärke vom Scheitel nach den Widerlagern hin zunehmen. Perronet giebt für die Stärke eines Gewölbes im Scheitel die empiriſche Formel $e = 0{,}0694\, r + 0{,}325$ Meter, in welcher r den größten Erzeugungshalbmeſſer der inneren Gewölblinie bezeichnet. Für das Fußmaß iſt hiernach $e = 0{,}0694\, r + 1$ Fuß.

Für Gewölbe mit Halbmeſſern über 15 Meter oder 48 Fuß giebt dieſe Formel erfahrungsmäßig zu große Dicken. Nach Rankine iſt für Kreisbogengewölbe $e = 0{,}346\sqrt{r}$, und für gedrückte Korbbögen $e = 0{,}412\sqrt{r}$ Fuß zu ſetzen, wo r den Krümmungshalbmeſſer im Scheitel der inneren Wölbfläche bezeichnet.

Eigentlich iſt die Gewölbſtärke nach der rückwirkenden Feſtigkeit der Gewölbſteine oder des Mörtels zu beſtimmen. Nehmen wir für den Feſtigkeitsmodul des Sandſteines (nach Band I., §. 212), $K = 4000$ Pfund an, und ſetzen wir eine zehnfache Sicherheit voraus, ſo erhalten wir für gewöhnliche Mauern aus Sandſtein den zuläſſigen Druck auf jeden Quadratzoll Fugenfläche, $T = 400$ Pfund; da aber die Gewölbſteine nicht gleichmäßig auf einander drücken, ſo geſtattet man denſelben nur einen halb ſo großen Druck, d. i. $T = 200$ Pfund. Die mittleren Feſtigkeitsmodel von Gneiß, Granit und Kalkſtein fallen nach Befinden doppelt ſo groß aus, deshalb kann man hier den zuläſſigen Druck bis auf $T = 300$ Pfund ſteigern. Bei der berühmten Brücke zu Neuilly unweit Paris, welche in den Jahren 1768 bis 1774 von Perronet erbaut wurde, berechnet ſich dieſer Druck auf 280 Pfund.

Mit Hülfe der Formel des vorigen Paragraphen läßt ſich die Stärke e des Gewölbes wie folgt ermitteln.

Die Formel I. giebt

$$e = \frac{h^3 - r h^2 + {}^3/_2\, a h^2}{5 r a - {}^3/_2\, h^2 + 2 r h - 5 a h},$$

und aus der Formel II. folgt, wenn man $P = Te$ einführt:

$$e = (r a - h a + {}^2/_5\, r h - {}^3/_{10}\, h^2)\, \frac{\gamma}{T}.$$

Setzt man dieſe beiden Ausdrücke für e einander gleich, ſo erhält man nach gehöriger Umformung folgende Gleichung zur Beſtimmung von h:

$$h^4 - {}^{20}/_9\left(\frac{T}{\gamma} + {}^6/_5 r - 3a\right)h^3$$
$$+ {}^{20}/_9\left(\frac{T}{\gamma} r - {}^5/_2 \frac{T}{\gamma} a + {}^4/_5 r^2 - 7ar + 5a^2\right)h^2$$
$$+ {}^{20}/_9 2ra\,(2r - 5a)\,h + {}^{20}/_9 . 5 r^2 a^2 = 0.$$

Hat man hiernach h bestimmt, so kann man mit Hülfe der letzten Formel die Gewölbstärke e berechnen.

Beispiel. Man soll für das Verhältniß $\frac{T}{\gamma} = 250$ Pfund die Stärke eines Kreisgewölbes von 40 Fuß Halbmesser finden, welches eine oben horizontal begrenzte Uebermauerung trägt, deren Höhe a über dem inneren Gewölbstücke 5 Fuß mißt. Es ist hier für die Tiefe h der Bruchfuge unter dem Gewölbscheitel:

$h^4 - {}^{20}/_9\,(250 + 1{,}2 . 40 - 15)\,h^3$
$+ {}^{20}/_9\,(250 . 40 - 2{,}5 . 250 . 5 + 0{,}8 . 1600 - 7 . 5 . 40 + 5 . 25)\,h^2$
$+ {}^{20}/_9 . 80 . 5\,(80 - 25)\,h + {}^{20}/_9 . 5 . 40000 = 0$, d. i.
$h^4 - 629\,h^3 + 15289\,h^2 + 48889\,h + 444444 = 0.$

Hiernach läßt sich annähernd

$$629\,h^3 = 15289\,h^2, \text{ d. i.}$$
$$h = {}^{15289}/_{629} = 25 \text{ Fuß}$$

setzen, und es ist nun schärfer

$$h = \frac{h^3 + 15259 + \frac{1}{h} \cdot 48889 + \left(\frac{1}{h}\right)^2 \cdot 444444}{629} = \frac{625 + 15289 + 1956 + 711}{629}$$
$$= \frac{18581}{629} = 30 \text{ Fuß}.$$

Hieraus bestimmt sich nun die gesuchte Gewölbstärke im Scheitel:

$$e = (ra - ha + 0{,}4\,rh - 0{,}3\,h^2)\,\frac{\gamma}{T}$$
$$= (200 - 150 + 480 - 270) . {}^1/_{250} = \frac{260}{250} = 1{,}04 \text{ Fuß}$$
$$= 12{}^1/_2 \text{ Zoll}.$$

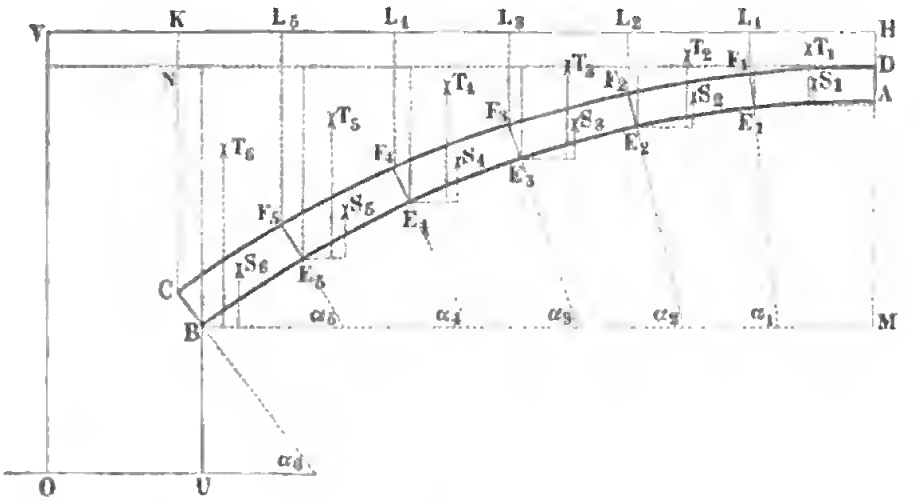
Der Sicherheit wegen ist vielleicht $e = 13$ bis 14 Zoll in Anwendung zu bringen.

Anmerkung. Wenn wir, wie im Folgenden allemal geschieht, den Gewölbschub oder die Spannung für den höchsten Punkt im Scheitel angeben und ebenso nur eine Drehung um den untersten Punkt der Bruchfuge berücksichtigen, so ist es um so mehr nöthig, diese hohe Sicherheit anzunehmen und dem Gewölbe eine entsprechende Stärke zu geben, da wir in diesem Falle nur den kleinsten Werth des Druckes erhalten. Ohne dies sind es vorzüglich die oberen Ecken der Steine am Scheitel und die unteren Ecken der Steine in der Nähe der Bruchfuge, welche den größten Druck auszuhalten haben, und daher am leichtesten abbrechen; es würde daher ein Einstürzen des ganzen Gewölbes herbeigeführt werden, wenn die Gewölbstärke nicht hinreichend groß wäre.

§. 31 **Prüfung der Gewölbe.** Die Untersuchung über die Stabilität eines Gewölbes läßt sich auf folgende Weise anstellen. Es sei $ABCD$, Fig. 50, die eine Hälfte des zu untersuchenden Gewölbes, und

$CDHK$ die von ihr getragene Mauer, welche wir der Einfachheit wegen mit dem Gewölbe von gleicher Dichtigkeit annehmen wollen. Zunächst theilen wir das Gewölbe durch Linie E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 u. ſ. w. in der Richtung der Gewölbfugen, oder was in der Regel einerlei iſt, rechtwinkelig gegen die innere Gewölblinie in mehrere (hier in 6) gleiche oder ungleiche Theile, und beſtimmen nun nicht nur die Inhalte und die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 dieſer Theile, ſondern auch die Inhalte und Schwerpunkte T_1, T_2, T_3 der darüber liegenden Theile F_1H, F_2L_1, F_3L_2 .... Nun nimmt man die ſtatiſchen Momente der erſten Theile AF_1 und F_1H hinſichtlich des erſten Theilpunktes E_1, und dividirt deren Summe durch den

Fig. 50.



Verticalabſtand dieſes Theilpunktes von der Horizontalen DN durch den Gewölbſcheitel; ebenſo nimmt man die Momente von AF_1, E_1F_2, F_1H und F_2L_1 in Hinſicht auf den zweiten Theilpunkt E_2 und dividirt die Summe dieſer Momente durch den Verticalabſtand dieſes zweiten Punktes von der Horizontalen DN; ferner beſtimmt man die Momente der Gewölbtheile AF_1, E_1F_2, E_2F_3 und diejenigen der Mauertheile F_1H, F_2L_1, F_3L_2 in Hinſicht auf die Kante E_3 und dividirt deren Summe durch den Abſtand des Punktes E_3 von der Horizontalen DN, u. ſ. f. Indem man ſo die Rechnung für alle Theile zwiſchen A und B fortführt, gelangt man zu den Kräften, welche in D nöthig ſind, um Drehungen um die Punkte E_1, E_2, E_3 u. ſ. w. zu verhindern, und es iſt nun die größte unter dieſen Kräften als die im Gewölbſcheitel wirklich vorhandene Spannung anzunehmen.

Außerdem multiplicire man noch die Flächenſumme

$$AF_1 + F_1H \text{ mit } tang.\ (\alpha_1 - \varrho), \text{ ferner}$$

$$AF_1 + E_1F_2 + F_1H + F_2L_1 \text{ mit } tang.\ (\alpha_2 - \varrho) \text{ u. ſ. w.,}$$

wofern α_1, α_2 . . . die Neigungswinkel der Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. ſ. w. gegen den Horizont bezeichnen, und ſuche auch unter dieſen Reſultaten den größten Werth aus. Iſt nun der größte dieſer Werthe kleiner als der zur Verhinderung der Drehungen um E_1, E_2, E_3 . . . nöthige Maximalwerth, ſo hat man auf dieſe Kräfte nicht weiter Rückſicht zu nehmen; iſt er aber größer, ſo muß man ihn als Spannung im Gewölbſcheitel und nicht den erſtgefundenen als ſolche einführen.

Endlich hat man noch zu unterſuchen, ob die ſo gefundene Horizontalkraft nicht im Stande iſt, ein Gewölbſtück nach außen zu ſchieben oder nach außen zu drehen.

Mit Hülfe des ſo gefundenen Horizontalſchubes ſind nun noch nach §. 27 die Stabilitätsverhältniſſe der Widerlager zu unterſuchen.

Beiſpiel. Die Stabilitätsverhältniſſe des Gewölbes in Fig. 50 ergeben ſich durch folgende Unterſuchung.

Inhalt des Gewölbſtückes $A F_1$ . . . . . = 6,89 Quadratfuß,
Inhalt des darüberliegenden Stückes $F_1 H$ = 8,48 „
Hebelarm des erſten in Hinſicht auf E_1 . . = 2,50 „
„ „ zweiten . . . . . = 2,45 „

folglich Moment beider:

$$= 6{,}89 \,.\, 2{,}5 + 8{,}48 \,.\, 2{,}45 = 38{,}001;$$

Abſtand des Punktes E_1 von $D N$ oder Hebelarm der Horizontalkraft in D:

$$= 1{,}50;$$

daher der erſte Werth dieſer Kraft:

$$P_1 = \frac{38{,}00 \,.\, \gamma}{1{,}50} = 25{,}33 \,.\, \gamma \text{ Pfund.}$$

Inhalt des zweiten Gewölbſtückes $E_1 F_2$ . . . . = 7,15 Quadratfuß,
Inhalt des darüber befindlichen Mauerſtückes $F_2 L_1$ = 11,02 „

Moment beider in Hinſicht auf E_2:

$$= 17{,}52 + 23{,}69 = 41{,}21,$$

hierzu das Moment von $A L_1$:

$$= 38{,}00 + 15{,}37 \,.\, 5{,}10 = 38{,}00 + 78{,}39 = 116{,}39,$$

folglich das Moment des ganzen Stückes $A L_2$:

$$= 157{,}60;$$

der Abſtand des Punktes E_2 von $D N$:

$$= 2{,}35,$$

daher der zweite Werth der Horizontalkraft in D:

$$P_2 = \frac{157{,}60 \,.\, \gamma}{2{,}35} = 67{,}05 \,.\, \gamma \text{ Pfund.}$$

Ferner:

Inhalt des dritten Gewölbſtückes $E_2 F_3$ . . . = 7,68 Quadratfuß,
Inhalt des darüberliegenden Mauerſtückes $F_2 L_3$ = 16,51 „
Moment beider . . . . . = 46,61 „

hierzu das Moment des Stückes $E_2 H$:

$$= 157{,}60 + 166{,}02 = 323{,}62,$$

folgt das Moment des Ganzen:

$$= 370{,}23,$$

und da der Abſtand f des Punktes E_3 von DN, $= 3{,}90$ iſt, ergiebt ſich der dritte Werth der Kraft in D:

$$P_3 = \frac{370{,}23 \,.\, \gamma}{3{,}90} = 94{,}93 \,.\, \gamma \text{ Pfund.}$$

Auf dieſe Weiſe fortfahrend, findet man einen Werth dieſer Kraft, welcher die Drehung um E_4 zu verhindern hat:

$$P_4 = \frac{701{,}92 \,.\, \gamma}{5{,}9} = 118{,}97 \,.\, \gamma \text{ Pfund;}$$

ferner einen fünften in Hinſicht auf Drehung um E_5:

$$P_5 = \frac{1163{,}43 \,.\, \gamma}{8{,}45} = 137{,}68 \,.\, \gamma \text{ Pfund;}$$

und endlich einen letzten Werth in Hinſicht auf eine Drehung um B:

$$P_6 = \frac{1760{,}21 \,.\, \gamma}{11{,}6} = 151{,}74 \,.\, \gamma \text{ Pfund.}$$

Da dieſer Werth unter allen gefundenen der größte iſt, ſo läßt ſich der Druck im Gewölbſcheitel ihm gleich, alſo

$$P = 151{,}74 \,.\, \gamma,$$

oder, die Dichtigkeit der Mauer $= 150$ Pfund angenommen,

$$P = 151{,}74 \,.\, 150 = 22761 \text{ Pfund}$$

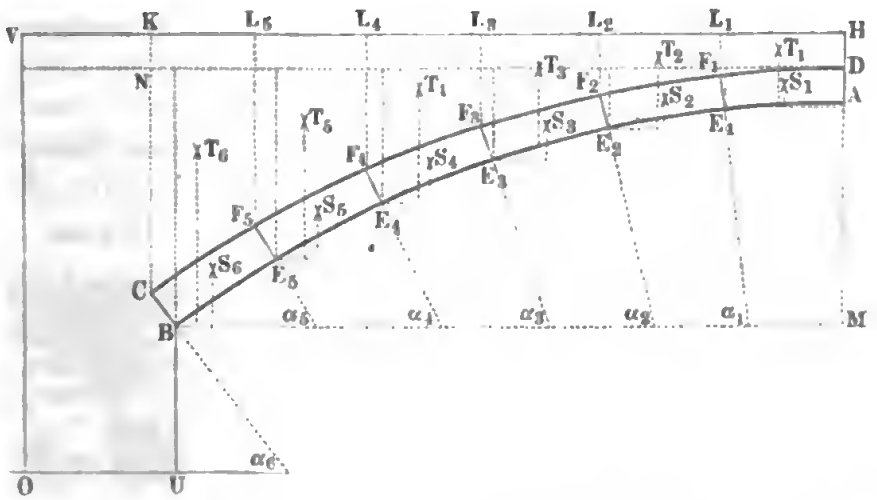
ſetzen. Die Dicke des Gewölbes im Scheitel iſt $e = 1{,}3$ Fuß, alſo der Querſchnitt für jeden Fuß Gewölblänge:

$$= 144 \,.\, 1{,}3 = 187{,}2 \text{ Quadratzoll,}$$

und ſonach der Druck auf jeden Quadratzoll nur $\frac{22761}{187{,}2} = 122$ Pfund.

Nimmt man mit Petit den Reibungswinkel zu 30^0 an, ſo erhält man noch

Fig. 51.



für die Kraft zur Verhinderung des Herabgleitens der Gewölbſteine, da die Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3 \ldots$, unter den Winkeln $83^0\,40'$; $70^0\,20'$; $71^0\,0'$; $64^0\,40'$; $58^0\,20'$; $52^0\,0'$ gegen den Horizont geneigt ſind die Werthe

$P_1 = (6{,}89 + 8{,}48)\ tang.\ (83^\circ 40' - 30^\circ) . \gamma = 15{,}37 . tang.\ 53^\circ 40' . \gamma$
$= 20{,}9 . \gamma$ Pfund;
$P_2 = (15{,}37 + 18{,}17)\ tang.\ (77^\circ 20' - 30^\circ) . \gamma = 33{,}54 . tang.\ 47^\circ 20' . \gamma$
$= 36{,}4 . \gamma$ Pfund;
$P_3 = 57{,}73 . tang.\ 41^\circ . \gamma = 50{,}1 . \gamma$ Pfund;
$P_4 = 90{,}56 . tang.\ 34^\circ 40' . \gamma = 62{,}6 . \gamma$ Pfund;
$P_5 = 134{,}13 . tang.\ 28^\circ 20' . \gamma = 72{,}3 . \gamma$ Pfund;
$P_6 = 188{,}53 . tang.\ 22^\circ . \gamma = 76{,}2 . \gamma$ Pfund;

es iſt alſo der größte Horizontaldruck zur Verhinderung des Gleitens $= 76{,}2 . \gamma$ Pfund. Da der Scheiteldruck $(151{,}74\,\gamma)$, welcher aus dem Beſtreben zum Umdrehen entſpringt, größer iſt, ſo wird durch denſelben auch das Herabgleiten der Gewölbſteine verhindert. Ebenſo kann man ſich auch leicht überzeugen, daß weder ein Gleiten noch ein Drehen nach oben möglich iſt.

Was endlich noch die Stabilität des Widerlagers OUK anlangt, iſt das Moment der Kraft P zum Umſtürzen um O

$= 151{,}74 . \gamma . (\overline{OV} - \overline{DH}) = 151{,}74 . 18 . \gamma = 2731 . \gamma$ Pfund;

das Moment des belaſteten Gewölbes $ABKH$ berechnet ſich aber

$= 1760{,}21 . \gamma + 188{,}53 . \overline{OU} . \gamma = (1760{,}21 + 188{,}53 . 6{,}8)\gamma = 3042 . \gamma$

und das des Pfeilers

$= 343 . \gamma$ Pfund;

es iſt demnach das Moment, welches dem Umſtürzen um O entgegenſteht,

$= (3042 + 343) . \gamma = 3385 . \gamma$ Pfund,

und daher ein Umſtürzen nicht möglich. Will man indeſſen hinreichende Sicherheit haben, ſo muß man nach Obigem ſtatt P, $1{,}9\,P$, alſo das Moment zum Umſtürzen $= 5189 . \gamma$ ſetzen, und dann wäre allerdings das Widerlager zu ſchwach; es müßte ihm vielmehr ſtatt 6,8 Fuß eine Dicke von 11 bis 12 Fuß gegeben werden. Für 11 Fuß Dicke erhält man das Stabilitätsmoment

$$S = 1760{,}21 . \gamma + 188{,}53 . 11\,\gamma + 1281 . \gamma = 5115 . \gamma,$$

alſo entſpricht dieſe Dicke den Forderungen der Stabilität hinreichend.

§. 32 **Gewölbſchubtabellen.** Um bei den am häufigſten vorkommenden Kreisgewölben die Unterſuchung zu erleichtern, ſind von Petit beſondere Tabellen über die Stabilität dieſer Gewölbe berechnet worden, von denen wir hier nur kurze Auszüge mittheilen können. Die erſte dieſer Tabellen bezieht ſich auf halbkreisförmige Gewölbe mit parallelen Wölb-

Fig. 52.

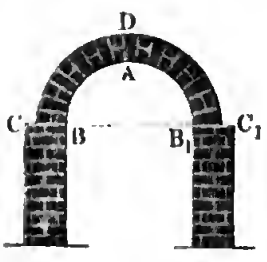


Fig. 53.

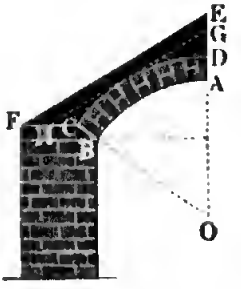
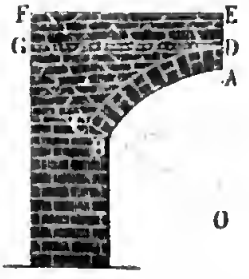


Fig. 54.



flächen, Fig. 52, die zweite auf ein halbkreisförmiges Gewölbe mit Hintermauerungen von 45° Neigung, wie die punktirte Linie GH in

Fig. 53 andeutet; die dritte Tabelle entspricht einem Halbkreisgewölbe mit horizontaler Aufmauerung, wie die punktirte Linie DG in Fig. 54 angiebt, und die vierte Tabelle entspricht bloßen Kreisbogengewölben mit parallelen Wölbungen. Bei den ersten drei Tabellen findet man in den ersten beiden Verticalcolumnen die Dimensionsverhältnisse der Gewölbe angegeben, in der dritten die Bruchwinkel, in der vierten und fünften aber die Coefficienten des Horizontalschubes und in der sechsten die Coefficienten für die größten Widerlagsstärken. Um mit Hülfe dieser Tabellen den einem gegebenen Gewölbe entsprechenden Schub zu finden, suchen wir das Verhältniß $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$ der Gewölbhalbmesser in der ersten Columne auf, gehen von da horizontal herüber bis in die vierte und fünfte Columne, und nehmen die größte von den beiden an diesen Orten stehenden Zahlen; diese Zahl p wird endlich mit dem Quadrate des Gewölbhalbmessers (r_1) und mit der Dichtigkeit (γ) der Gewölbmasse multiplicirt, um den in Frage stehenden Schub oder Horizontaldruck $p r_1^2 \gamma$ zu erhalten. Was endlich noch die sechste Columne anlangt, so giebt diese die Stärke der unendlich hoch zu denkenden Widerlager an, wenn man die Werthe derselben durch den Halbmesser der inneren Wölbung multiplicirt. Bei niedrigen Widerlagern ist diese Stärke kleiner und nach der Formel §. 27 zu berechnen. Die vierte Tabelle enthält in der ersten Verticalcolumne die Verhältnißzahlen $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$, in den übrigen Columnen aber die Coefficienten des Gewölbschubes bei sehr verschiedenen Verhältnissen zwischen der Sehne oder Weite s und der Höhe h der Gewölbe. Uebrigens kommt diese Tabelle nur dann in Anwendung, wenn der Bruchwinkel, welchen die erste Tabelle angiebt, den halben Centriwinkel

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

des Gewölbbogens übertrifft.

Anmerkung. Damit der Theil des Widerlagers, an welchem der Gewölbbogen unmittelbar aufsitzt, nicht fortgeschoben werde, ist nöthig, daß der Horizontalschub $P = p r_1^2 \gamma$ von der Reibung $\frac{1}{2} \varphi \beta (r_2^2 - r_1^2) \gamma$ übertroffen werde. Ist dieses nicht der Fall, wie z. B. bei sehr gedrückten Bögen, so muß man dieses Ausgleiten des Obertheiles vom Widerlager durch eiserne Anker verhindern. Uebrigens läßt sich hier der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}76$, also $\frac{1}{2} \varphi = 0{,}38$ setzen, weshalb die Kraft, welche die Verankerung auszuhalten hat,

$$P = [p - 0{,}38 \beta (\varkappa^2 - 1)] r_1^2 \gamma$$

anzunehmen ist. Dieser Fall tritt ein, wenn $s = 4h$ und $\varkappa$ unter 1,06; wenn $s = 5h$ bis $10h$ und $\varkappa$ unter 1,15 ist. Wenn endlich $s = 16h$, so findet dieses Gleiten jedenfalls statt.

Tabelle I.

Halbkreisgewölbe mit parallelen Wölbflächen.

Verhältniß der Halbmeſſer $x = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmeſſers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbſchubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,732	1,154	0° 00′	0,00000	0,98923	
2,70	1,176	13° 42′	0,00211	0,96262	
2,60	1,250	27° 30′	0,00809	0,88151	
2,50	1,333	35° 52′	0,02283	0,80346	
2,20	1,666	51° 4′	0,08648	0,58767	
2,00	2,000	57° 17′	0,13017	0,45912	1,3223
1,80	2,500	61° 24′	0,16373	0,34281	1,1414
1,70	2,857	62° 53′	0,17180	0,28924	1,0484
1,60	3,333	63° 49′	0,17517	0,23874	0,9525
1,55	3,636	64° 3′	0,17478	0,21464	0,9031
1,50	4,000	64° 9′	0,17254	0,19130	0,8527
1,45	4,444	64° 5′	0,16798	0,16872	0,8007
1,40	5,000	63° 48′	0,16167	0,14691	0,7838
1,35	5,714	63° 19′	0,15287	0,12587	0,7622
1,30	6,666	62° 14′	0,14330	0,10559	0,7379
1,25	8,000	61° 15′	0,12847	0,08608	0,6987
1,20	10,000	59° 41′	0,11140	0,06733	0,6504
1,15	13,333	57° 1′	0,09176	0,04935	0,5905
1,12	16,666	54° 48′	0,07789	0,03984	0,5444
1,10	20,000	53° 15′	0,06754	0,03213	0,5066
1,08	25,000	51° 7′	0,05649	0,02546	
1,06	33,333	48° 18′	0,04455	0,01891	
1,05	40,000	46° 32′	0,03813	0,01568	
1,04	50,000	44° 4′	0,03139	0,01249	
1,03	66,666	41° 4′	0,02459	0,00932	
1,02	100,000	38° 12′	0,01691	0,00618	
1,01	200,000	32° 36′	0,00889	0,00308	
1,00	∞	0° 00′	0,00000	0,00000	

Tabelle II.

Halbkreisgewölbe mit Hintermauerung von 45° Neigung.

Verhältniß der Halbmesser $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmessers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbschubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,00	2,000	60°	0,26421	0,74361	1,7246
1,80	2,500	60°	0,29907	0,57383	1,5147
1,60	3,333	60°	0,31245	0,42191	1,2990
1,55	3,636	61°	0,31222	0,38673	1,2437
1,50	4,000	61°	0,30996	0,35266	1,1877
1,45	4,444	60°	0,30587	0,31971	1,1308
1,40	5,000	59°	0,30001	0,28787	1,0954
1,35	5,714	58°	0,29285		1,0823
1,30	6,666	57°	0,28231	0,22756	1,0626
1,25	8,000	54°	0,27102		1,0412
1,20	10,000	50°	0,25806	0,17171	1,0160
1,15	13,333	47°	0,24477		0,9894
1,10	20,000	42°	0,23292	0,12032	0,9652
1,05	40,000	36°	0,22902		0,9571

Tabelle III.

Halbkreisgewölbe mit horizontaler Uebermauerung.

Verhältniß der Halbmesser $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmessers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbschubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,00	2,000	36°	0,05486	0,50358	1,3834
1,80	2,500	44°	0,08503	0,37901	1,2001
1,60	3,333	52°	0,12300	0,26755	1,0082
1,55	3,636	54°	0,13027	0,24173	0,9584
1,50	4,000	56°	0,13648	0,21673	0,9075
1,45	4,444	57°	0,14122	0,19256	0,8554
1,40	5,000	59°	0,14421	0,16920	0,8018
1,35	5,714	60°	0,14504	0,14666	0,7465
1,30	6,666	61°	0,14332	0,12495	0,7379
1,25	8,000	62°	0,13872	0,10405	0,7260
1,20	10,000	63°	0,13073	0,08397	0,7048
1,15	13,333	64°	0,11895	0,06471	0,6723
1,10	20,000	65°	0,10279	0,04627	0,6249
1,05	40,000	69°	0,081755	0,02865	0,5573
1,00	∞	75°	0,055472	0,01185	

Tabelle IV.

Bogengewölbe mit parallelen Wölbflächen.

Verhältniß der Halbmeſſer $x = \frac{r_2}{r_1}$.	Coefficienten p des Gewölbſchubes.						
	$s = 4h$	$s = 5h$	$s = 6h$	$s = 7h$	$s = 8h$	$s = 10h$	$s = 16h$
1,40	0,15445	0,14691	0,14691	0,14691	0,14691	0,14478	
1,35	0,14717	0,13030	0,12587	0,12587	0,12587	0,12405	
1,30	0,13764	0,12331	0,10682	0,10559	0,10559	0,10406	
1,25	0,12547	0,11402	0,10009	0,08668	0,08608	0,08483	0,07180
1,20	0,11023	0,10196	0,09102	0,07999	0,06981	0,06636	0,05616
1,15	0,09123	0,08634	0,07866	0,07050	0,06259	0,04904	0,04116
1,10	0,06737	0,06563	0,06158	0,05666	0,05160	0,04214	0,02681
1,05	0,03776	0,03804	0,03709	0,03550	0,03357	0,02944	0,01882
1,01	0,00834	0,00871	0,00886	0,00889	0,00885	0,00862	0,00747

Tabelle V.

Kurze Ueberſicht der Dimenſionsverhältniſſe von Bogengewölben.

Verhältniß der Weite zur Höhe $\frac{s}{h}$.	Halber Centriwinkel β.	$\sin. \beta$.	Verhältniß des inneren Halbmeſſers r_1 zur Höhe, $\frac{r_1}{h}$.	Verhältniß des inneren Halbmeſſers r_1 zur Weite, $\frac{r_1}{s}$.
3	67° 22′ 49″	0,9231	1,625	0,5417
4	53° 7′ 48″	0,8000	2,500	0,6250
5	43° 36′ 10″	0,6897	3,625	0,7250
6	36° 52′ 11″	0,6000	5,000	0,8333
7	31° 53′ 26″	0,5283	6,625	0,9464
8	28° 4′ 20″	0,4706	8,500	1,0625
9	25° 3′ 27″	0,4235	10,625	1,1806
10	22° 37′ 10″	0,3846	13,000	1,3000
12	18° 55′ 29″	0,3243	18,5	1,5417
16	14° 15′ 0″	0,2462	32,500	2,0312

Beiſpiele. 1. Bei einem Halbkreisgewölbe mit horizontaler Uebermauerung iſt der innere Halbmeſſer $r_1 = 10$ Fuß; man ſucht die Gewölbſtärke, den Gewölbſchub u. ſ. w. Es iſt nach Perronet die Gewölbſtärke $e = 0{,}0694 \,.\, 10 + 1 = 1{,}694$ Fuß, wofür ich 1,7 Fuß annehmen will. Ferner iſt $r_2 = 11{,}7$ und $\varkappa = \frac{r_2}{r_1} = 1{,}17$, daher giebt die Tabelle III. den Bruchwinkel $\beta = 63\frac{3}{5}^0$, und den Coefficienten der Horizontalſpannung, $p = 0{,}1190 + \frac{2}{5} \,.\, 0{,}0118 = 0{,}1237$. Nimmt man nun den Cubikfuß Mauer zu 150 Pfund Gewicht an, ſo erhält man die Gewölbſpannung im Scheitel:

$$P = 0{,}1237 \,.\, 150 \,.\, 10^2 = 1855 \text{ Pfund.}$$

Für die Grenze der Widerlagsſtärke giebt dieſelbe Tabelle den Coefficienten $0{,}6723 + \frac{2}{5} \,.\, 0{,}0325 = 0{,}6853$, daher dieſe Stärke ſelbſt

$$d = 0{,}6853 \,.\, 10 = 6{,}85 \text{ Fuß.}$$

Bei niedrigen Widerlagern fällt die nach der Formel des §. 27 zu berechnende Stärke kleiner aus.

2. Welche Dimenſionen und Kräfte entſprechen einem Bogengewölbe von 10 Fuß Weite und 2 Fuß Bogenhöhe ohne Belaſtung? Hier iſt $\frac{h}{s} = \frac{1}{5}$, daher der halbe Centriwinkel $\beta = 43^0\,36''\,10'$, $\sin. \beta = 0{,}6897$ und der Halbmeſſer $r_1 = 3{,}625 \,.\, 2 = 7{,}25$ Fuß; ferner giebt die Tabelle IV. den Coefficienten des Horizontalſchubes, da $s = 5\,h$ und nach der Formel von Perronet

$$e = 0{,}0694 \,.\, 7{,}25 + 1 = 1{,}5, \text{ alſo } \varkappa = \frac{r_2}{r_1} = \frac{8{,}75}{7{,}25} = 1{,}2 \text{ iſt,}$$

$$p = 0{,}10196,$$

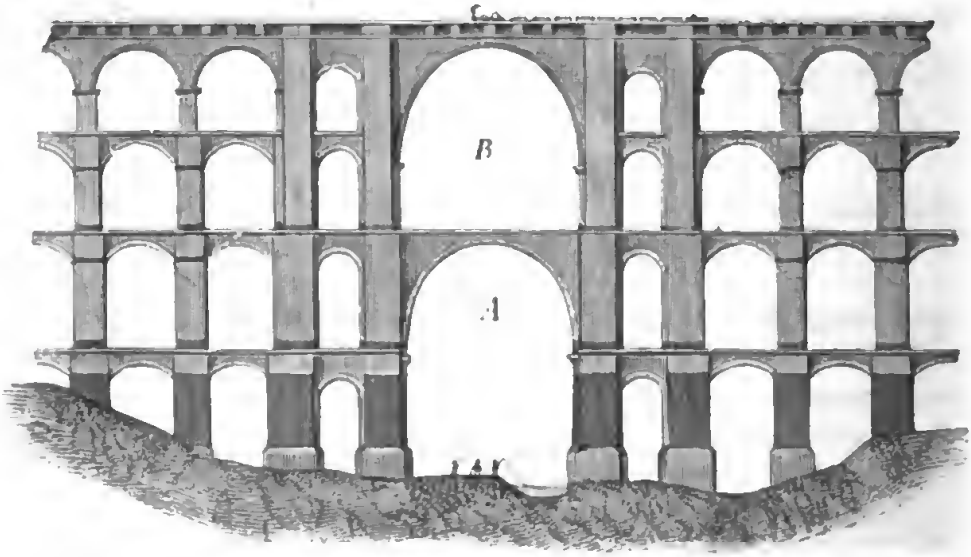
folglich beträgt der Gewölbſchub:

$$P = 0{,}102 \,.\, 150 \,.\, 7{,}25^2 = 804 \text{ Pfund.}$$

Steinerne Brücken. Die Theorie der Gewölbe findet in dem Ingenieurweſen vorzüglich bei den ſteinernen Brücken (franz. ponts en pierres; engl. stone-bridges) ihre Anwendung. Die ſteinernen Brücken ſowie auch die Viaducte und Aquaducte, werden in der Regel aus Bögen (franz. und engl. arches) zuſammengeſetzt, welche die Formen von Tonnengewölben (franz. voûtes cylindriques; engl. cylindrical arches) haben. Die Weite (franz. ouverture; engl. span) der Brückenbögen richtet ſich vorzüglich nach dem fließenden Waſſer, über welches die Brücke geſpannt iſt. Hat daſſelbe eine große Geſchwindigkeit und iſt es ſtarken Anſchwellungen unterworfen, ſo wendet man Bögen mit großer Spannweite an, um das Waſſerbett möglichſt wenig zu verengen und dadurch das Austreten des Hochwaſſers aus dem Bette einzuſchränken, ſowie die zerſtörenden Wirkungen des Hochwaſſers und der von demſelben zugeführten Körper, z. B. Eisſchollen, auf die Brückenpfeiler zu ſchwächen; fließt hingegen der Fluß langſam und hat derſelbe keine bedeutenden Hochwaſſer, ſo kann man aus den entgegengeſetzten Gründen die Brücke über demſelben aus einer größeren Anzahl engerer Bögen zuſammenſetzen. Die Spannweite der gewöhnlichen Brückenbögen beträgt 50 bis 150 Fuß; am größten iſt ſie bei der Gros- §. 33

venor-Brücke über dem Dee in England, wo ſie ſogar 195 Fuß mißt. Die Brückenhöhe richtet ſich ebenfalls nach dem Hochwaſſer; jedenfalls müſſen ſelbſt bei dem höchſten Waſſerſtande die Scheitel der Brückenbögen noch um eine anſehnliche Höhe über, und die Seiten derſelben nicht oder nur wenige Fuß unter der Oberfläche des Waſſers ſtehen, damit fremde Körper, welche auf dem Waſſer ſchwimmen, wie z. B. Eisſchollen, ungehindert durch die Brücke hindurch ſchwimmen können, und auch die Stauung des Waſſers nicht zu groß ausfällt. In vielen Fällen, namentlich bei Eiſenbahnen und Canälen, liegen die Punkte, welche durch eine Brücke (Viaduct, Aquaduct) zu verbinden ſind, ſo hoch über der Thalſohle, daß die Brückenbögen ſchon ohnedies viel über das Hochwaſſer zu ſtehen kommen. Die gewöhnlichen Fahrbrücken über Flüſſe haben eine Höhe von 30 bis 100 Fuß; die Eiſenbahnbrücken und Aquaducte erreichen aber Höhen von 150 Fuß und mehr. Z. B. die Göltzſchthalbrücke (Fig. 55) bei der ſächſiſch-bayeriſchen Eiſenbahn

Fig. 55.



hat in vier über einander ſtehenden Bogenreihen eine Höhe von 250 Fuß, und der römiſche Aquaduct zu Nismes in Frankreich (Pont du Gard) hat bei drei über einander ſtehenden Bogenreihen eine Höhe von 150 Fuß. Die Bogenhöhe (franz. montée; engl. hight) der Brücke richtet ſich natürlich nach der Spannweite und Höhe der Brücke überhaupt; bei den gewöhnlichen Fahrbrücken beträgt dieſe Höhe $^1/_9$ bis $^1/_3$ der Spannweite; bei hohen Eiſenbahnbrücken und Waſſerleitungen nimmt man dieſe Höhe $^1/_2$ oder gar $^5/_8$ der Spannweite. Was die Breite der Brücken anlangt, ſo beträgt dieſelbe bei gewöhnlichen Fahrbrücken 20 bis 40 Fuß; die neue Brücke über die Elbe bei Dresden, welche für Fuhrwerke, Fußgänger und eine Eiſenbahn zugleich dient, beſitzt ſogar eine Breite von 55 Fuß.

Anmerkung. In Fig. 55 iſt das Mittelſtück der Gölzſchthalbrücke abgebildet. Die Länge dieſer Brücke beträgt 1840 Fuß, die obere Breite 32 und die untere 72 Fuß. Von den mittleren großen Bögen hat A eine Spannweite von 90 Fuß und eine Höhe von 58 Fuß, B aber eine Spannweite von 98 Fuß und eine Höhe von 64 Fuß. Nimmt man die Höhe eines Ziegelpfeilers $h = 200$ Fuß, und die Dichtigkeit der Ziegelmauer $= 100$ Pfund an, ſo erhält man den größten Druck dieſes Pfeilers auf den Quadratzoll, abgeſehen von der zufälligen Belaſtung und von der Belaſtung durch die Gewölbbögen:

$$P = h\gamma = \frac{200 \,.\, 100}{144} = 139 \text{ Pfund.}$$

Wäre der Feſtigkeitsmodul der Ziegel $K = 1000$ Pfund, ſo hätte man hiernach nur ſiebenfache Sicherheit bei dieſer Brücke.

Brückenpfeiler. Die Pfeiler (franz. piles; engl. piers) und die §. 34
Widerlager (franz. culées; engl. abutments) der Brücken müſſen nicht nur auf einem ganz feſten Grunde ſtehen, ſondern auch eine hinreichende Dicke haben, um dem Drucke der darauf ruhenden Bögen ſammt ihrer Belaſtung widerſtehen zu können. Der Grund beſteht entweder aus feſtem Felſen, oder aus unzuſammendrückbarem Sand, oder aus zuſammendrückbarer Erde. Um auf Felſen zu gründen, iſt nicht allein die Herſtellung ebener Flächen zur Aufnahme des Druckes, ſondern auch die Entfernung alles verwitterten und loſen Geſteines nöthig. Die Gründung auf Sand, Thon und Erde erfordert hingegen die Herſtellung eines Roſtes oder eines Bettes aus Beton. Der aus einer Reihe Längenſchwellen und einer Reihe aufgekämmter Querſchwellen zuſammengeſetzte Roſt ruht entweder unmittelbar auf dem Stein- oder Sandbette, oder er wird von eingerammten Pfählen (franz. piles; engl. pieux) getragen (ſ. I., §. 347), und heißt im erſten Falle ein Schwellen-, im letzteren aber ein Pfahlroſt. Bei der Gründung im Waſſer iſt es nöthig, die Bauſtelle der Pfeiler durch einen Fangdamm vor dem Eindringen des Waſſers zu ſichern. Iſt die Tiefe des Waſſers über 4 Fuß, ſo ſind ſogenannte Kaſtendämme (franz. batardeaux; engl. cofferdams) nöthig, welche aus zwei Reihen Bohlen oder Spundwänden und zwiſchengeſtampftem Letten zuſammengeſetzt werden.

Die Fundamente der Pfeiler werden aus gehauenen Steinen treppenförmig aufgemauert, ſo daß die untere Breite derſelben dem ſechsten bis neunten Theile der Spannweite gleichkommt. Um die Brückenpfeiler gegen den Stoß des Eiſes und anderer ſchwimmenden Körper zu ſchützen, und um die auf das Flußbett nachtheilig wirkende wirbelnde Bewegung des Waſſers möglichſt zu verhindern, werden die Pfeiler ſtromauf- und ſtromabwärts mit prismatiſchen Anſätzen, den ſogenannten Pfeilerköpfen (franz. becs; engl. starlings) verſehen, welchen eine halbkreisförmige oder halbelliptiſche Baſis und eine kegelförmige oder ſphäroidiſche Haube (franz. bonnet; engl. hood) zu geben iſt. Die Landfeſten oder Widerlagspfeiler ſind in der Regel noch

mit Flügelmauern (franz. murs en aile; engl. wingwalls) versehen, welche zur Unterstützung der Auffahrt dienen. Die Stärke der Pfeiler und Widerlager ist nach der vorausgeschickten Theorie unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß diese Stützmauern nicht allein den constanten Gewölbschub, sondern auch die zufällige und bewegliche Belastung aufzunehmen haben.

Anmerkung. Fig. 56 führt einen Theil der Brücke von Neuilly über die Seine vor Augen. Sie besteht aus fünf Bögen von 120 Pariser Fuß Weite, und

Fig. 56.

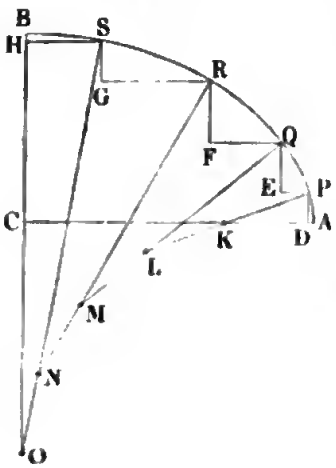
40 Fuß Höhe. Die Curve, wonach die Bögen construirt sind, ist eine Korblinie mit 11 Mittelpunkten. Die Höhe der Schlußsteine dieser Brücke beträgt 5 Fuß. Die Pfeilerköpfe (A und B) sind halbkreisförmig abgerundet und die Kanten zwischen den Stirn- und den inneren Wölbflächen der Bögen sind durch krumme Flächen C, D, E oder sogenannte Kuhhörner (fr. cornes de vache) abgestumpft.

§. 35 **Korbbögen.** Die Brückenbögen werden entweder nach einem Halbkreise oder nach einem Kreisbogen (Stichbogen), oder nach einer Ellipse, oder nach einem sogenannten Korbbogen (franz. arche en anse de panier; engl. basket-handle arch) construirt. Die Halbkreisgewölbe geben den kleinsten Horizontalschub, und besitzen daher bei hinreichender Belastung eine große Stabilität; sie lassen sich aber bei niedrigen Flußbrücken nicht anwenden, weil sie eine große Anzahl von Pfeilern erfordern, wodurch das Flußbett sehr eingeengt wird. Sie finden daher vorzüglich nur bei Viaducten und Aquaducten ihre Anwendung. Die Stichbögen geben, namentlich wenn sie sehr flach sind, einen bedeutenden Horizontalschub, und erfordern daher zu ihrer Stabilität sehr starke und solide Pfeiler und Widerlager. Da sie sich sehr weit spannen lassen, so setzen sie dem Wasser am wenigsten Widerstand entgegen, weshalb man sie auch vorzüglich bei größeren Flüssen anwendet. Die elliptischen Bögen stehen zwischen dem Halbkreise und den Stichbögen inne; man ersetzt sie aber gewöhnlich durch Korbbögen, weil diese leichter und auch so zu construiren sind, daß die Krümmung am Fußpunkte kleiner ausfällt als bei der Ellipse.

Um aus der halben Spannweite $CA = \frac{s}{2}$ und der Bogenhöhe

$CB = h$, Fig. 57, die Mittelpunkte K, L, M, N, O der Kreisbögen AP, PQ, QR, RS, SB zu finden, aus welchen ein Korbbogen AQB zusammenzusetzen ist, hat man vielerlei Regeln angegeben; folgende Bestimmungsweise möchte jedoch die vorzüglichere sein. Die halbe Spannweite $CA = \frac{s}{2}$ läßt sich als die Summe der Stücke AD, PE, QF, RG, SH und die Bogenhöhe CB als die Summe der Stücke DP, EQ, FR, GS und HB ansehen. Bezeichnen wir den Halbmesser:

Fig. 57.



$$\begin{aligned} KA &= KP \text{ durch } r_1, \\ LP &= LQ \quad „ \quad r_2, \\ MQ &= MR \quad „ \quad r_3, \\ NR &= NS \quad „ \quad r_4, \text{ und} \\ OS &= OB \quad „ \quad r_5, \end{aligned}$$

sowie die Winkel, unter welchen die Horizontale AC von den Halbmessern KP, LQ, MR, NS geschnitten wird, durch α_1, α_2, α_3, α_4, so haben wir:

$$\begin{aligned} AD &= r_1 (1 - cos.\,\alpha_1), & DP &= r_1\, sin.\,\alpha_1, \\ PE &= r_2 (cos.\,\alpha_1 - cos.\,\alpha_2), & EQ &= r_2 (sin.\,\alpha_2 - sin.\,\alpha_1), \\ QF &= r_3 (cos.\,\alpha_2 - cos.\,\alpha_3), & FR &= r_3 (sin.\,\alpha_3 - sin.\,\alpha_2), \\ RG &= r_4 (cos.\,\alpha_3 - cos.\,\alpha_4), & GS &= r_4 (sin.\,\alpha_4 - sin.\,\alpha_3), \\ SH &= r_5\, cos.\,\alpha_4, & HB &= r_5 (1 - sin.\,\alpha_4), \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} {}^1/_2 s &= r_1 (1 - cos.\,\alpha_1) + r_2 (cos.\,\alpha_1 - cos.\,\alpha_2) + r_3 (cos.\,\alpha_2 - cos.\,\alpha_3) + \cdots \\ &= r_1 + (r_2 - r_1)\, cos.\,\alpha_1 + (r_3 - r_2)\, cos.\,\alpha_2 + (r_4 - r_3)\, cos.\,\alpha_3 \\ &\quad + (r_5 - r_4)\, cos.\,\alpha_4, \text{ sowie:} \\ h &= r_1\, sin.\,\alpha_1 + r_2 (sin.\,\alpha_2 - sin.\,\alpha_1) + r_3 (sin.\,\alpha_3 - sin.\,\alpha_2) + \cdots \\ &= r_5 - [(r_2 - r_1)\, sin.\,\alpha_1 + (r_3 - r_2)\, sin.\,\alpha_2 + (r_4 - r_3)\, sin.\,\alpha_3 \\ &\quad + (r_5 - r_4)\, sin.\,\alpha_4]. \end{aligned}$$

Lassen wir nun die Halbmesser r_1, r_2, r_3 . . . eine steigende arithmetische Reihe bilden, setzen wir also:

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = r_4 - r_3 = r_5 - r_4 = d,$$

so erhalten wir:

$${}^1/_2 s = r_1 + d\,(cos.\,\alpha_1 + cos.\,\alpha_2 + cos.\,\alpha_3 + cos.\,\alpha_4) \text{ und}$$
$$h = r_1 + d\,[4 - (sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2 + sin.\,\alpha_3 + sin.\,\alpha_4)],$$

oder allgemeiner, wenn wir n Krümmungshalbmesser annehmen,

$$cos.\,\alpha_1 + cos.\,\alpha_2 + \cdots + cos.\,\alpha_n = \Sigma\,(cos.\,\alpha), \text{ sowie}$$
$$sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2 + \cdots + sin.\,\alpha_n = \Sigma\,(sin.\,\alpha)$$

setzen und beachten, daß $sin.\,\alpha_n = 1$ und $cos.\,\alpha_n = 0$ ist,

$\frac{1}{2}s = r_1 + d\,.\,\Sigma(cos.\,\alpha)$ und

$h = r_1 + d\,[n - \Sigma\,(sin.\,\alpha)]$, woraus nun:

1) $d = \dfrac{\frac{1}{2}s - h}{\Sigma\,(cos.\,\alpha) + \Sigma\,(sin.\,\alpha) - n}$, ſowie

2) $r_1 = \frac{1}{2}s - d\,\Sigma\,(cos.\,\alpha)$ folgt.

Macht man den am Gewölbſcheitel S anliegenden Centriwinkel BOS halb ſo groß als jeden der übrigen Winkel $AKP = PLQ = QMR = RNS = \alpha$, ſo erhält man:

$\alpha_2 = 2\,\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\,\alpha_1$, $\alpha_4 = 4\,\alpha_1$ und $\alpha_5 = 4{,}5\,\alpha_1 = 90^0$, folglich:

$\alpha_1 = 20^0$, $\alpha_2 = 40^0$, $\alpha_3 = 60^0$, und $\alpha_4 = 80^0$; und $\alpha_5 = 90^0$,

es iſt hiernach:

$sin.\,\alpha_1 = 0{,}3420$,	$cos.\,\alpha_1 = 0{,}9397$,
$sin.\,\alpha_2 = 0{,}6428$,	$cos.\,\alpha_2 = 0{,}7660$,
$sin.\,\alpha_3 = 0{,}8660$,	$cos.\,\alpha_3 = 0{,}5000$,
$sin.\,\alpha_4 = 0{,}9848$,	$cos.\,\alpha_4 = 0{,}1736$,
$sin.\,\alpha_5 = 1{,}0000$,	$cos.\,\alpha_5 = 0{,}0000$,

daher: $\Sigma\,(sin.\,\alpha) = 3{,}8356$, und $\Sigma(cos.\,\alpha) = 2{,}3793$,

ſo daß

$$d = \frac{\frac{1}{2}s - h}{3{,}8356 + 2{,}3793 - 5} = \frac{\frac{1}{2}s - h}{1{,}2149} = 0{,}8231\,(\tfrac{1}{2}s - h) \text{ und}$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2}s - 2{,}3793\,d = 1{,}9584\,h - 0{,}9584\,\frac{s}{2}, \text{ ferner}$$

$$r_2 = 1{,}1353\,h - 0{,}1353\,\frac{s}{2},$$

$$r_3 = 0{,}3122\,h + 0{,}6878\,\frac{s}{2},$$

$$r_4 = -\,0{,}5109\,h + 1{,}5109\,\frac{s}{2} \text{ und}$$

$$r_5 = -\,1{,}3340\,h + 2{,}3340\,\frac{s}{2} \text{ folgt.}$$

Für $n = 2$ Halbmeſſer r_1 und r_2, iſt $\alpha_1 = 60^0$ und $\alpha_2 = 90^0$, daher:

$$d = \frac{\frac{1}{2}s - h}{0{,}3660} = 2{,}7322\,(\tfrac{1}{2}s - h),$$

$r_1 = \frac{1}{2}s - 0{,}5\,.\,2{,}7322\,(\frac{1}{2}s - h) = 1{,}3661\,h - 0{,}3661\,\frac{s}{2}$, und

$$r_2 = -\,1{,}3661\,h + 2{,}3661\,\frac{s}{2}.$$

Für $n = 3$ Halbmeſſer hat man $\alpha_1 = 36^0$, $\alpha_2 = 72^0$, und $\alpha_3 = 90^0$, wonach

$$d = \frac{\frac{1}{2}s - h}{0{,}6569} = 1{,}5223\,(\tfrac{1}{2}s - h),$$

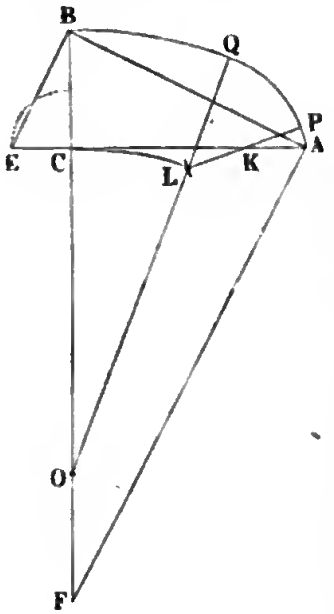
$$r_1 = {}^1/_2 s - 1{,}1180 \,.\, 1{,}5223 \,({}^1/_2 s - h) = 1{,}7019\, h - 0{,}7019\, \frac{s}{2},$$

$$r_2 = 0{,}1796\, h + 0{,}8204\, \frac{s}{2}, \text{ und}$$

$$r_3 = -\,1{,}3427\, h + 2{,}3427\, \frac{s}{2} \text{ ist.}$$

Giebt man der Wölbfläche AQB, Fig. 58, in A und B dieſelben Krümmungen wie einer Ellipſe, ſo erhält man die Halbmeſſer:

Fig. 58.



$$KA = KP = r_1 = \frac{2h^2}{s},$$

$$LP = LQ = r_2 = h, \text{ und}$$

$$OQ = OB = r_3 = \frac{s^2}{4h},$$

welche ſich wie folgt auch leicht durch Conſtruction finden laſſen. Man ziehe die Sehne AB und errichte auf derſelben die Perpendikel BE und AF; dieſe ſchneiden von den Axen die Halbmeſſer $CE = r_1$ und $CF = r_3$ ab, deren Mittelpunkte K und O in dieſen Axen ſelbſt liegen. Um den Mittelpunkt L für den mittleren Halbmeſſer $LP = r_2 = h$ zu finden, beſchreibe man aus K mit dem Halbmeſſer $h - r_1$, und aus O mit dem Radius $r_3 - h$ Kreisbögen. Der Durchſchnitt dieſer Bögen iſt das geſuchte Centrum L.

Läßt man, Fig. 57, die Centriwinkel BOS, SNR, RMQ u. ſ. w. vom Scheitel nach dem Widerlager zu in einer arithmetiſchen Progreſſion φ, 2φ, 3φ u. ſ. w. ſteigen, ſo hat man:

$$\varphi + 2\varphi + 3\varphi + \cdots + n\varphi = \frac{(n+1)\,n}{2}\,\varphi = 90^0, \text{ daher:}$$

$$\varphi = \frac{180^0}{n(n+1)}, \text{ und } \alpha_1 = n\varphi = \frac{180}{n+1}, \; \alpha_2 = 2\alpha_1 - \varphi,$$

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 3\varphi \text{ u. ſ. w.}$$

Beiſpiel. Wenn bei dem Korbbogen ARB in Fig. 57, die Höhe $BC = h = {}^2/_3\, CA = {}^1/_3\, s$ iſt, ſo erhält derſelbe nach Obigem folgende Halbmeſſer:

$$r_1 = 0{,}1735\, s, \; r_2 = 0{,}3107\, s, \; r_3 = 0{,}4479\, s,$$
$$r_4 = 0{,}5851\, s \text{ und } r_5 = 0{,}7223\, s.$$

Läßt man die Centriwinkel von B bis A in einer arithmetiſchen Progreſſion ſteigen, macht man hiernach $\varphi = \frac{180}{5.6} = 6^0$, ſo erhält man:

$$\alpha_1 = n\varphi = 30^0,$$
$$\alpha_2 = 30^0 + 30^0 - 6^0 = 30^0 + 24^0 = 54^0.$$
$$\alpha_3 = 54^0 + 24^0 - 6^0 = 54^0 + 18^0 = 72^0,$$
$$\alpha_4 = 72^0 + 18^0 - 6^0 = 72^0 + 12^0 = 84^0,$$
$$\alpha_5 = 84^0 + 12^0 - 6^0 = 84^0 + 6^0 = 90^0.$$

Nun iſt:

$$cos.\ 30^0 = 0{,}8660, \qquad sin.\ 30^0 = 0{,}5000,$$
$$cos.\ 54^0 = 0{,}5878, \qquad sin.\ 54^0 = 0{,}8090.$$
$$cos.\ 72^0 = 0{,}3090, \qquad sin.\ 72^0 = 0{,}9510,$$
$$cos.\ 84^0 = 0{,}1045, \qquad sin.\ 84^0 = 0{,}9945,$$
$$cos.\ 90^0 = 0{,}0000, \qquad sin.\ 90^0 = 1{,}0000,$$

alſo $\Sigma\,(cos.\,\alpha) = 1{,}8673$ und $\Sigma\,(sin.\,\alpha) = 4{,}2545$,

daher folgt hier:

$$d = \frac{\frac{1}{2}s - h}{1{,}1218} = 0{,}8914\ (\tfrac{1}{2}s - h) \text{ und}$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2}s - 1{,}8673 \,.\, 0{,}8914\ (\tfrac{1}{2}s - h) = 1{,}6646\,h - 0{,}3323\,s.$$

Hätte man $h = \frac{1}{3}s$ angenommen, wie in Fig. 57, ſo würden:

$$d = 0{,}8914 \cdot \frac{s}{6} = 0{,}1486\,.\,s \text{ und}$$

$r_1 = 0{,}5549\,s - 0{,}3323\,s = 0{,}2226\,s$, $r_2 = 0{,}3712\,s$, $r_3 = 0{,}5198\,s$, $r_4 = 0{,}6684\,s$ und $r_5 = 0{,}8170\,s$

ſich ergeben.

Bei einem Korbbogen mit elliptiſchen Wölbungen in A und B, Fig. 58, wäre:

$$r_1 = \frac{2h^2}{s} = \tfrac{2}{9}s = 0{,}2222\,s,\ r_2 = h = 0{,}3333\,s \text{ und}$$

$$r_3 = \frac{s^2}{4h} = \tfrac{3}{4}s = 0{,}7500\,s.$$

§. 36 **Unsymmetriſche Gewölbe.** Iſt ein Gewölbe unſymmetriſch, oder auf einer Seite mehr belaſtet als auf der andern, ſo muß man den Maximaldruck P_m (nach §. 23 bis §. 25) für jede Seite beſonders ermitteln, den größeren dieſer Maximalwerthe als den Druck P im Gewölbſcheitel D anſehen, und mit Hülfe dieſer Horizontalkraft die Gleichgewichtsverhältniſſe auf jeder Seite der Scheitelfuge beſonders unterſuchen. Wird durch dieſe Fuge das Gewölbe in zwei ungleich lange Theile getheilt, wie z. B. bei der Ausmauerung unterirdiſcher Räume oft vorkommt, ſo fällt die Bruchfuge $E_1 F_1$ des kürzeren Gewölbſtückes $A C_1$ entweder, wie in Fig. 59 dargeſtellt wird, noch in dieſes Gewölbſtück, oder es kommt dieſelbe, wie Fig. 60 zeigt, gar nicht zu Stande, weil die Widerſtandslinie $E D E_1$ die innere Wölbfläche $A B_1$ gar nicht erreicht und die Widerlagsfläche $B_1 C_1$ in einem Zwiſchenpunkte O durchſchneidet. Die Berechnung von $P = P_m$, ſowie die weitere Unterſuchung des Gewichtes iſt übrigens in beiden Fällen genau dieſelbe als wenn das Gewölbe vollſtändig ſymmetriſch

wäre. Bei einem Gewölbe BDB_1, Fig. 61, welches auf einer Seite stärker belastet ist als auf der anderen, hat man den Gewölbschub P gleich zu setzen

Fig. 59.

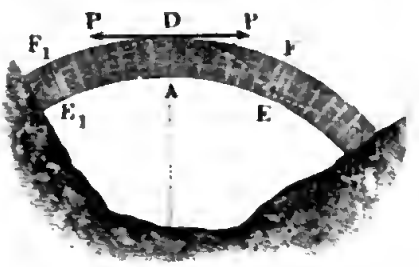
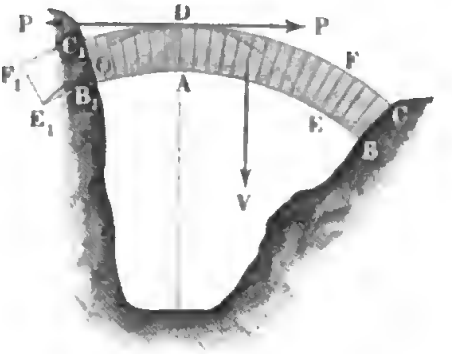
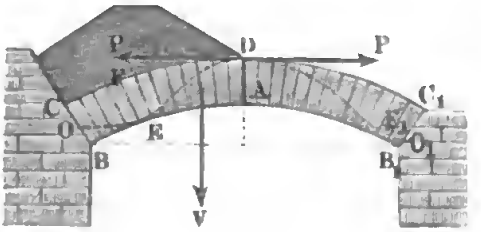


Fig. 60.



der Maximalkraft P_m, der stärker belasteten Gewölbhälfte BD, jedoch für beide Hälften besonders zu untersuchen, ob diese Kraft weder ein Schieben noch ein Kippen nach außen hervorzubringen im Stande ist. Es fallen hier die Widerstandslinien AEO und AE_1O_1 von beiden Gewölbhälften von einander verschieden aus, und es ist möglich, daß die Widerstandslinie der schwächer belasteten Hälfte DB_1 die innere Wölbung gar nicht erreicht; dagegen kann aber auch vorkommen, daß sie die äußere Wölbfläche DC_1 durchschneidet, während die Widerstandslinie DEO der stärker belasteten Hälfte von der äußeren Wölbfläche DC entfernt bleibt. In diesem Falle erfolgt natürlich ein Zusammenstürzen des ganzen Gewölbes durch Kippen desselben um die Kante, in welcher die Wölbfläche DC_1 von der Widerstandslinie DE_1O_1 durchschnitten wird. Um eine größere Sicherheit zu erlangen, legt man auch hier die Widerstandslinie um ein Drittel der Gewölbdicke unter den äußeren Gewölbscheitel u. s. w.

Fig. 61.



Schiefe Gewölbe. Die im Vorstehenden entwickelte Theorie der Stabilität gerader Tonnengewölbe läßt sich auch auf schiefe Tonnengewölbe anwenden, da sich diese als eine Zusammensetzung von unendlich vielen unendlich kurzen geraden Tonnengewölben ansehen lassen. §. 37

Kommt es darauf an, einen schräg aufsteigenden Raum, wie z. B. den Eingang zu einem Keller, oder einem sogenannten flachen Schacht zu über-

wölben, ſo kann man dazu eine Reihe von kurzen Gewölben oder Bögen *AA*, *BB*, *CC*, *DD*, Fig. 62, anwenden, deren Axe oder Scheitellinie in einer ſchrägen Richtung *EFGH* aufſteigt. Eine derartige Zuſammenſetzung aus unendlich vielen unendlich kurzen Gewölbbögen bildet ein einziges ſchräg aufſteigendes oder ſogenanntes Kellerhalsgewölbe. Da jeder der bogenförmigen Beſtandtheile eines ſolchen Gewölbes für ſich allein im Gleichgewicht ſein muß, ſo hängt natürlich auch die Stabilität eines ſolchen Gewölbes nur von der Stabilität eines beliebig kurzen Stückes deſſelben ab.

Fig. 62.

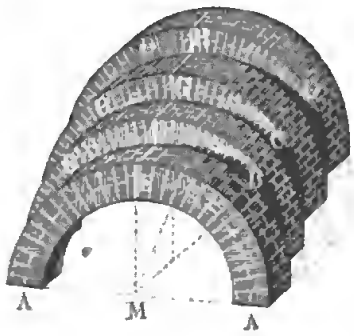
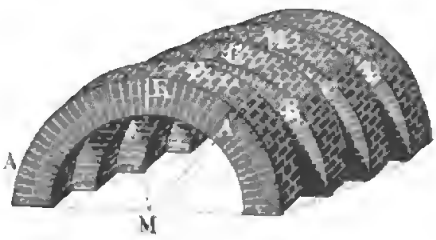


Fig. 63.

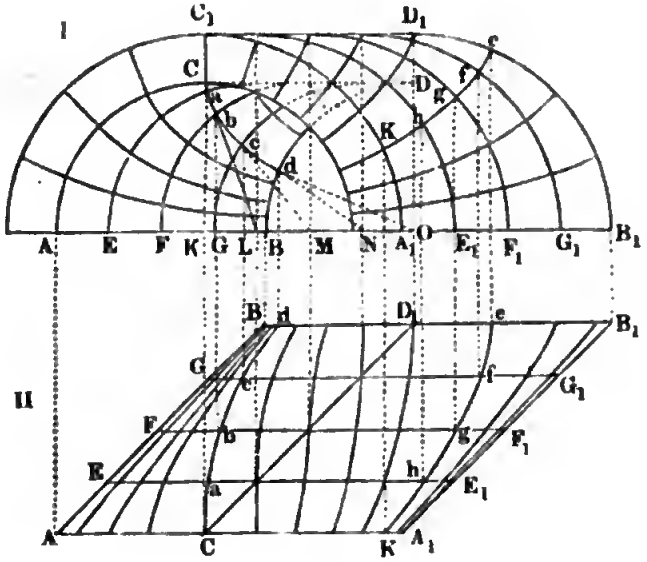


Um ſich einen ſchrägen Uebergang über ein fließendes Waſſer oder über eine Straße u. ſ. w. zu verſchaffen, wie z. B. bei Eiſenbahnanlagen häufig nöthig iſt, kann man eine Reihe von Bögen *AA*, *B*, *C*, *D*, Fig. 63, anwenden, welche ſchräg an einander angeſetzt ſind, ſo daß deren Scheitel *E*, *F*, *G*, *H* eine gegen die Stirnfläche dieſer Bögen ſchräg ſtehende Linie *EH* bildet. Bei den gewöhnlichen Ausführungen ſind die Bögen *AA*, *B*, *C*, u. ſ. w. unendlich kurz und bilden daher ein einziges ſchiefes Gewölbe.

Was die Zuſammenſetzung der ſchiefen Gewölbe aus einzelnen Gewölbſteinen anlangt, ſo gilt auch hier die Regel, daß die Wölbfugen rechtwinkelig gegen die inneren Wölblinien zu legen ſind; deshalb müſſen auch die Wölbflächen von den Wölbfugen nicht in geraden, ſondern in gewiſſen krummen Linien geſchnitten werden. Die Art und Weiſe, wie dieſe Curven zu conſtruiren ſind, wird aus Folgendem hervorgehen. In Fig. 64, I. und II., ſeien *ACA* und *BDB* die Auf- und Grundriſſe von den inneren und äußeren Bögen der beiden Stirnflächen eines ſchiefen Gewölbes, und zwar *CD* die Scheitellinien, ſowie *K* und *O* die Mittelpunkte derſelben. Ferner ſeien noch *EE*, *FF* und *GG* in gleichen Abſtänden von einander und parallel zu den Stirnflächen *AA*, *BB* geführte Schnitte der Gewölbflächen. Um nun vom Scheitel *C* aus eine Fugenlinie zu legen, führt man im Aufriß (I.) einen Zug *Cabcd* ſo, daß derſelbe die Schnittlinien *EE*, *FF*, *GG* rechtwinkelig durchſchneidet, daß alſo z. B. ſeine

Tangenten in C, a, b, c, d nach den Mittelpunkten K, L, M, N, O der Kreise AA_1, EE_1, FF_1, GG_1, BB gehen, wenn man es mit einem

Fig. 64.



Kreisgewölbe zu thun hat. Die auf dieſe Weiſe gefundene Curve iſt der Aufriß der geſuchten Fugenlinie durch C, und wenn man von den Punkten a, b, c... nach dem Grundriſſe herablothet bis zu den Schnitten EE, FF, GG..., ſo erhält man auch noch die Punkte a, b, c... im Grundriſſe (II.) der geſuchten Curve. Auf gleiche Weiſe kann man auch andere Fugencurven, z. B. die Fugencurve $efghk$ der äußeren Wölbfläche conſtruiren.

Kloſter- und Kreuzgewölbe. Auch die Stabilität der Kloſter-, §. 38
Kreuz- und Kuppelgewölbe iſt in der Hauptſache wie die der Tonnengewölbe zu beurtheilen.

Ein über einen rectangulären oder polygonalen Raum geſpanntes Gurt-, Kappen- oder Kloſtergewölbe $ABCS$, Fig. 65 (a. f. S.), beſteht aus lauter kurzen Bögen von verſchiedenen Spannweiten, wie DE, FE, ferner GH, KH u. ſ. w., welche ſich in Bögen BS, CS u. ſ. w. an einander anlegen. Da hier je zwei dieſer Bögen FE, F_1E_1 einander gegenüber ſtehen, ſo wird auch der Horizontalſchub P des einen durch den Horizontalſchub P_1 des anderen aufgenommen, und das zwiſchen E und E_1 befindliche Gewölbſtück in der Richtung rechtwinkelig gegen ſeine Stirnflächen zuſammengedrückt.

Ein Kreuzgewölbe geht aus der gegenſeitigen Durchdringung zweier über einen rectangulären Raum ABC, Fig. 66, geſpannten Tonnengewölbe

hervor, und beſteht zunächſt aus vier Hauptbögen AS, BS, CS und DS, welche ſich an einen gemeinſchaftlichen Schlußſtein S anlegen, und dann noch

Fig. 65.

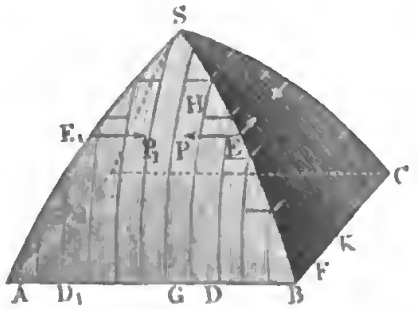
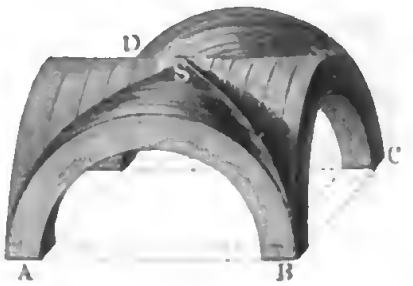


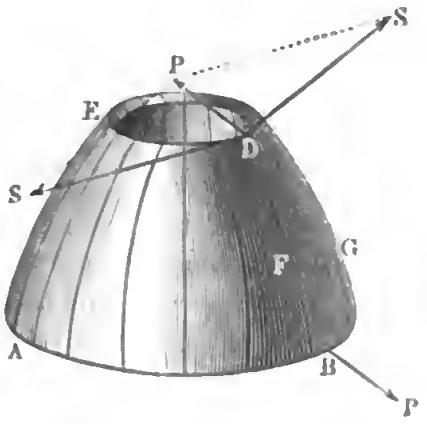
Fig. 66.



aus vier, ſich zwiſchen je zwei dieſer Kreuzbögen ſtemmenden Bogenſyſtemen, wie z. B. ABS, BCS. Es bilden alſo die Kreuzbögen ASC und BSD die Widerlager der übrigen, von außen nach innen allmälig an Spannweite abnehmenden Gewölbbögen, und es hängt daher die Stabilität dieſes Gewölbes vorzüglich von der Stärke und Stabilität ſeiner Kreuzbögen ASC und BSD ab.

Ein Kuppelgewölbe $ABDE$, Fig. 67, iſt über eine kreisförmige Baſis AB geſpannt und umſchließt einen Raum, welcher die Form eines aufrechtſtehenden Rotationskörpers (ſ. Band I., §. 125) hat; es läßt ſich daſſelbe durch die ſogenannten Meridianebenen in lauter congruente Segmente, wie AE, BD u. ſ. w. zerlegen, welche kurze Tonnengewölbe mit allmälig von unten nach oben abnehmender Länge bilden. Dieſe Gewölbſegmente können entweder den Scheitel der Kuppel vollkommen ſchließen, oder ſie können, wie in Fig. 67, oben eine kreisrunde Oeffnung DE übrig laſſen. Da ſich hier ein Segment BD nur auf die benachbarten Segmente F und G ſtützt, ſo muß alſo auch die Spannung oder der Horizontalſchub P deſſelben von dieſen benachbarten Segmenten aufgenommen werden.

Fig. 67.



Denkt man ſich ein Kuppelgewölbe aus n congruenten Segmenten, wie AE, BD... zuſammengeſetzt, ſo hat man für den Centriwinkel, unter welchen die beiden Fugen eines Segmentes convergiren:

$$\beta = \frac{2\pi}{n} \text{ oder } \beta^0 = \frac{360^0}{n}.$$

Die aus dem Gewölbschub P resultirenden Seitenkräfte S und S, mit welchen ein Segment BD auf das übrige Gewölbe wirkt, stoßen unter dem Winkel $SDS = 180° - \beta$ zusammen, und es ist daher

$$P = 2\,S\cos.\,PDS = 2\,S\cos.\,{}^1/_2\,SDS = 2\,S\cos.\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= 2\,S\,\sin.\frac{\beta}{2},$$

daher wenn n sehr groß, also β sehr klein angenommen wird,

$$P = S\beta = \frac{2\pi}{n}S, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$S = \frac{P}{\beta} = \frac{n}{2\pi}P.$$

Der Gewölbschub P ist natürlich nach den in den Paragraphen 21 und 23 gegebenen Regeln zu bestimmen, und läßt sich $= \mu\frac{G}{n}$ setzen, wenn G das Gewicht des ganzen Gewölbes und μ eine bestimmte Zahl bezeichnet. Es ist folglich:

$$S = \frac{n}{2\pi}P = \frac{n}{2\pi}\mu\frac{G}{n} = \frac{\mu}{2\pi}G.$$

Damit die Gewölbsteine diesen Druck auszuhalten vermögen, muß ihnen eine hinreichende Dicke gegeben werden.

In der Regel wird der Druck noch durch das Gewicht einer aufsitzenden Laterne vergrößert. Sind die Gewölbsteine hinreichend dick, um die Spannung S aushalten zu können, so kann natürlich auch kein Einstürzen nach innen, sondern nur ein Ausweichen nach außen stattfinden. Um dies zu verhindern, umgiebt man wohl noch die Kuppel mit eisernen Reifen.

Anmerkung. Ueber die Gewölbe ist die Literatur sehr ausgedehnt, jedoch sind die in verschiedenen Schriften abgehandelten Theorien nicht immer richtig, oder wenigstens nicht immer praktisch genug, weil ihnen nicht die der Praxis entsprechenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. Es mögen daher hier nur die vorzüglichsten Schriften angeführt werden. Coulomb legte zuerst den Grund zur Theorie, wie sie im Wesentlichen hier vorgetragen wurde. Man sehe: Théorie de machines simples, par Coulomb. Die Theorie weiter ausgebildet findet man in Navier: Résumé des Leçons sur l'application de la mécanique, T. I. Eine deutsche Bearbeitung ist hiervon erschienen, unter dem Titel: Die Mechanik der Baukunst, von Westphal. Ebenso: Cours de Stabilité des Constructions etc. par Persy. Abhandlungen von Audoy, Garidel, Poncelet und Petit finden sich im Mémorial de l'officier du génie. Die Petit'sche Abhandlung ist deutsch bearbeitet und unter dem Titel „Theorie der Kreisgewölbe" besonders im Buchhandel sowie in Crelle's Journal der Baukunst erschienen, von W. Lahmeyer. Tabellen zur Berechnung des Gewölbschubes giebt die Schrift: Tables des poussées des voûtes en plein ceintre, par Garidel, Paris 1837 u. 1842. Uebrigens findet man die Gewölbe abge-

handelt in den Werken über Mechanik von Boſſut, Prony, Robinſon (Mechanical Philosophy), Whewell, Moſeley, Eytelwein, Gerſtner u. ſ. w. Beſondere Abhandlungen über Gewölbe ſind von Maillard (Mechanik der Gewölbe, Peſth 1817), von Knochenhauer (Statik der Gewölbe, Berlin 1842), Hagen (über Form und Stärke gewölbter Bogen, Berlin 1844), u. ſ. w. erſchienen. Hieran ſchließt ſich die Schrift Ligowski's: „Die Beſtimmung der Form und Stärke gewölbter Bögen mit Hülfe der hyperbol. Functionen, aus der Zeitſchrift für Bauweſen, 1854.“ Ferner über ſchiefe Gewölbe: Heider, Theorie der ſchiefen Gewölbe, Wien 1846. Hart, Conſtruction ſchiefer Gewölbe, in Romberg's Zeitſchrift 1847. Sowie Franeis Baſhforth, Praktiſche Anweiſung zur Conſtruction ſchiefer Gewölbe, deutſch von Härtel. Ueber ſteinerne Brücken iſt noch zu leſen: Gauthey, Traité de la construction des ponts, und Perronet's Werke, die Beſchreibung der Entwürfe und der Bauarten der Brücken bei Neuilly, Mantes u. ſ. w., aus dem Franzöſiſchen von Dietlein, Halle 1820. Von neueren Werken ſind zu empfehlen: Scheffler, „Zur Theorie der Gewölbe“, in Crelle's Journal für die Baukunſt, Band 29 und 30. Tellkampf, „Beiträge zur Gewölbtheorie, frei bearbeitet nach Carvallo, Hannover 1855.“ Yvon Villarceau, „Sur l'établissement des Arches de Pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. Paris 1853.“ Siehe auch „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes, par Poncelet. Paris 1852.“ Ferner iſt zum Studium zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, ſowie deſſen Manual of Civil-Engineering.

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eiſenconſtructionen.

§. 39 **Holz- und Eisenconstructionen.** Die Holz- und Eiſenconſtructionen unterſcheiden ſich beſonders dadurch von den Steinconſtructionen (Mauern und Gewölben), daß ſie aus längeren Stücken beſtehen als dieſe, und daß dieſe Stücke (franz. pièces; engl. pieces) nicht bloß über oder neben einander gelegt, ſondern durch Verzapfen, Aufplatten, Aufkämmen u. ſ. w. feſt mit einander verbunden werden. Die Hauptaxen der Hauptſtücke einer Conſtruction können eine horizontale, eine geneigte oder eine verticale Lage haben; im erſten Falle heißen ſie Balken, Schwellen u. ſ. w. (franz. poutres, solives; engl. beams, joists), im zweiten heißen ſie Sparren (franz. chevrons; engl. rafters), im dritten aber Säulen (franz. poteaux, piliers; engl. posts). Die kleineren Stücke einer Conſtruction ſind

entweder Bänder (franz. liens; engl. ties), oder Streben, Spreizen (franz. contre-fiches; engl. struts), oder Arme (franz. bras; engl. braces), je nachdem ſie einer Ausdehnungs- oder einer Zuſammendrückungskraft oder beiden zugleich widerſtehen ſollen.

Um die Stabilität einer Conſtruction zu unterſuchen, kommt es zunächſt darauf an, daß man die Kräfte und Gewichte kenne, welche die Conſtruction aufzunehmen hat. Aus ihnen beſtimmen ſich nun nicht nur die Kräfte, welche einzelne Stücke auszuhalten haben, ſondern auch die Kräfte in den Verbindungsſtellen und die Wirkungen gegen die Unterſtützung. Man hat nun allen Theilen diejenigen Formen, Lagen und Dimenſionen zu geben, bei welchen ſie den auf ſie wirkenden Kräften vollkommenen Widerſtand entgegenſetzen. Bei dieſen Unterſuchungen kommen allerdings auch wieder, wie bei den Gewölben, gewiſſe allgemeine Regeln über Stabilität, Feſtigkeit u. ſ. w. zur Anwendung, doch werden wir bei den folgenden Unterſuchungen die Reibung außer Acht laſſen, nicht allein, weil ſie in der Regel viel kleiner iſt, als bei den Steinen, ſondern auch beſonders deshalb, weil ſie durch Erſchütterungen und Schwankungen, welche bei den Holzconſtructionen nicht zu vermeiden ſind, momentan aufgehoben wird, und daher auf ihre Wirkung nicht ſehr zu rechnen iſt.

Was die Befeſtigung der Stücke unter einander betrifft, ſo haben wir vorzüglich zu unterſcheiden, ob dieſe in einem Bolzen, Pflock (franz. boulon; engl. pin) oder in einem Zapfen und Zapfenloch (franz. tenon et mortaise; engl. tenon and mortise) oder in einem bloßen Vorſprunge oder ſogenannten Vorſatze (franz. saillie; engl. shoulder) beſteht. Ein Bolzen nimmt alle Kräfte auf, deren Richtungen durch ſeine Axe gehen, ein Zapfen nimmt nur nach gewiſſen Richtungen wirkende Kräfte auf, und ein Vorſprung nimmt nur Kräfte nach einer beſtimmten Richtung, nämlich rechtwinkelig gegen die Vorderfläche des Vorſprunges, auf.

Bei der Zuſammenſetzung der Holz- und Eiſenconſtructionen hat man §. 40
ſein Hauptaugenmerk darauf zu richten, daß man die Stücke derſelben ſo wenig wie möglich der Biegung ausſetze und folglich die Laſten derſelben mehr durch die Druck- und Zug-, als durch die Biegungsfeſtigkeit aufnehmen laſſe.

Iſt die Breite einer Säule $= b$ und die Dicke derſelben $= h$, alſo ihr Querſchnitt $F = bh$, und der Tragmodul derſelben $= T$, ſo hat man das Tragvermögen dieſer Säule:

$$P = FT = bhT \text{ (ſ. Band I., §. 205),}$$

bezeichnet ferner l die Länge dieſer Säule, ſowie E ihren Elaſticitätsmodul, ſo beträgt die entſprechende Verkürzung oder Verlängerung derſelben:

$$\lambda = \frac{P}{FE} l = \frac{T}{E} l \text{ (ſ. Band I., §. 204).}$$

Ein Balken von gleichen Dimenſionen und gleicher Beſchaffenheit wie dieſe Säule, trägt dagegen, wenn er an beiden Enden unterſtützt iſt, in ſeiner Mitte die Laſt:

$$P_1 = \frac{4bh^2}{6l} \cdot T \text{ (ſ. Band I., §. 240),}$$

und erleidet daſelbſt eine Durchbiegung:

$$\lambda_1 = a = \frac{P_1 l^3}{4bh^3 E} = \frac{l}{6h} \cdot \frac{T}{E} l \text{ (ſ. Band I., §. 227),}$$

und es iſt daher:

$$\frac{P_1}{P} = {}^2/_3 \left(\frac{h}{l}\right), \text{ ſowie:}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = {}^1/_6 \left(\frac{l}{h}\right).$$

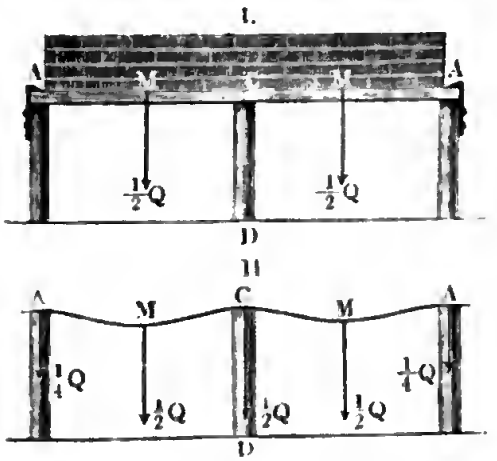
Es fällt alſo hiernach die Tragkraft P_1 eines Balkens oder eines prismatiſchen Körpers, welcher eine gegen ſeine Axe rechtwinkelig gerichtete Laſt aufnimmt, im Vergleich zu der einer Säule oder eines Körpers, welcher eine nach ſeiner Axe gerichtete Laſt unterſtützt, um ſo kleiner, und dagegen die Durchbiegung oder das Nachgeben λ_1 des erſteren in Hinſicht auf die Zuſammendrückung oder Ausdehnung λ des letzteren um ſo größer aus, je größer die Länge (l) dieſes Körpers in Hinſicht auf ſeine Dicke oder Höhe (h) iſt. Wenn z. B. die letztere Dimenſion 6 mal in der erſteren enthalten, alſo $\frac{l}{h} = 6$ iſt, ſo vermag der Körper als Balken nur $\frac{P_1}{P} = {}^2/_3 \cdot {}^1/_6 = {}^1/_9$ mal ſoviel zu tragen, als wenn derſelbe als Säule dient, und es iſt gleichwohl im erſteren Falle ſeine Durchbiegung $\lambda_1 = {}^1/_6 \cdot 6\lambda = \lambda$, alſo eben ſo groß als ſeine Zuſammendrückung im letzteren Falle. Bei gleicher Belaſtung ſind daher den Körpern, wenn ſie als Balken dienen ſollen, viel größere Querdimenſionen zu geben, als wenn ſie zu Säulen benutzt werden. Um daher ſo viel wie möglich an Material zu erſparen, und um die mit der Größe der Durchbiegung wachſenden Schwankungen eines Balkens oder Trägers ſo viel wie möglich zu vermindern, iſt erforderlich, dieſelben ſoviel wie möglich durch Säulen, Streben oder andere Hülfsmittel, welche ganz oder zum Theil wirken oder durch ihre Zug- oder durch ihre Druckfeſtigkeit widerſtehen, zu unterſtützen.

Eine Säule, welche einen Balken von unten unterſtützt und folglich durch ihre Druckfeſtigkeit widerſteht, heißt eine ſtehende oder Standſäule, und eine Säule, welche einen Balken von oben unterſtützt, und daher durch ihre Zugfeſtigkeit widerſteht, wird eine Hängeſäule genannt. Statt der aufrecht

stehenden Säulen werden aber auch die Säulen sehr häufig durch geneigte Säulen, oder sogenannte Streben, Bänder u. s. w. unterstützt. Zwischen den Hängesäulen und Standsäulen findet insofern ein großer Unterschied statt, als sich jene in einem stabilen, und diese nur in einem labilen Gleichgewichtszustande befinden. Während bei einer Hängesäule das von den Zugkräften derselben gebildete Kräftepaar die zufällige Abweichung der Axe der ersteren von der Richtung der letzteren aufzuheben sucht, hat bei einer Standsäule das von den Druckkräften derselben erzeugte Kräftepaar ein Bestreben, diese Abweichung noch zu vergrößern. Deshalb ist es oft nöthig, letztere durch Streben, Zangen u. s. w. seitlich zu unterstützen. Derselbe Unterschied findet auch zwischen den Bändern und Streben statt. Im Allgemeinen wird jede Construction, welche zur Unterstützung eines Balkens von unten dient, ein Sprengwerk, und jede einen Balken oder ein Balkensystem von oben unterstützende Holz- oder Eisenconstruction ein Hängewerk genannt. Zu diesen Corstructionen gehören die verschiedenen Holz- und Eisenbrücken, sowie die sogenannten Dachstühle bei Dachconstructionen (franz. fermes; engl. roofs).

Unterstützung durch eine Säule. Der einfachste Fall der Unterstützung eines Balkens AA, Fig. 68, I., besteht in der Anwendung einer Säule CD. In der Regel wird der Unterstützungspunkt C in der Mitte des Balkens liegen, und die Belastung auf den ganzen Balken gleichförmig vertheilt anzunehmen sein. Sind nun die Enden A und A des Balkens so befestigt, daß sie keine Neigung annehmen können, so wird die neutrale Axe des Balkens eine Curve $AMCMA$, Fig. 68, II., bilden, welche nicht allein in A, C und A, sondern auch in den Mittelpunkten M und M zwischen A, C und A horizontal läuft, und daselbst die stärksten Krümmungen besitzt. Man hat es hierbei mit einem schon in Bd. I., §. 246 behandelten Falle zu thun, und kann diesem zufolge annehmen, daß der Balken 3mal soviel trägt, als wenn die Last in der Mitte des in den Endpunkten unterstützten Balkens ruht. §. 41

Fig. 68.



Ist Q die ganze Last des Balkens, l die Länge desselben, b die Breite und h die Höhe seines rectangulären Querschnittes, sowie T der Tragmodul desselben, so hat man hiernach für einen Balken ohne Säule:

$$Q = 3 . 4 \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = \frac{2 b h^2}{l} T \text{ (ſ. Band I., §. 240).}$$

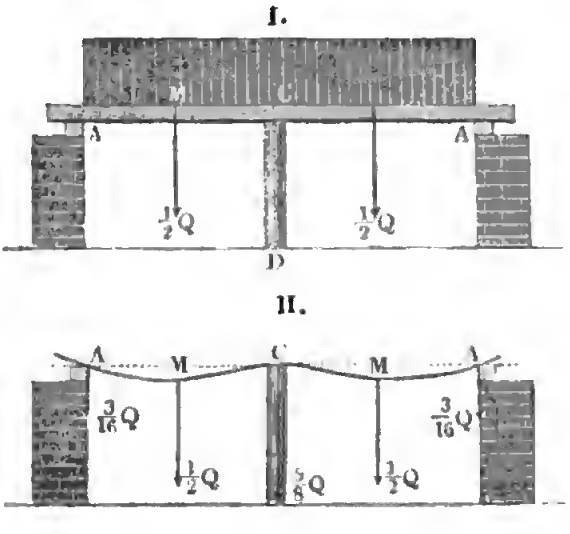
Nun wird aber der Balken durch die Säule gewiſſermaßen in zwei gleiche Theile getheilt, wovon jeder halb ſo lang iſt und halb ſo viel trägt, als der ganze Balken, während die andere Hälfte $\left(\frac{Q}{2}\right)$ von der Säule aufgenommen wird; daher iſt für den Balken mit Säule:

$$^1/_2 Q = \frac{2 b h^2}{^1/_2 l} \cdot T, \text{ oder } Q = \frac{8 b h^2}{l} \cdot T;$$

es trägt alſo der ſo geſtützte Balken viermal ſo viel als der ungeſtützte Balken, oder es iſt bei gleicher Belaſtung, die erforderliche Breite und Höhe des geſtützten Balkens nur $= \sqrt[3]{^1/_4} = \sqrt[3]{0{,}250} = 0{,}63$ und das Gewicht deſſelben nur $(0{,}63)^2 = 0{,}397$mal ſo groß als bei dem frei aufliegenden Balken.

Liegt der in der Mitte C unterſtützte Balken AB, Fig. 69, I., an ſeinen Enden A und A frei auf, ſo daß ſich dieſelben neigen können, ſo nimmt die neutrale Axe deſſelben die Geſtalt der Curve $AMCMA$, Fig. 69, II., an, welche an den Enden nicht horizontal iſt, ſondern daſelbſt emporſteigt. Man hat es hier mit einem in Band I., §. 247 behandelten Falle zu thun, wo drei Achtel der Laſt $\frac{Q}{2}$ einer Balkenhälfte von der Unterſtützung des freien Endes getragen werden. Es beträgt alſo hier die Kraft in jedem der freien Enden A, A:

Fig. 69.



$$R = {}^3/_8 \cdot \frac{Q}{2} = {}^3/_{16}\, Q,$$

während die Säule in der Mitte C die Laſt

$$P = Q - 2R = Q - {}^3/_8\, Q = {}^5/_8\, Q$$

aufnimmt.

Das Kraftmoment zum Biegen um C iſt hier:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - {}^3/_{16}\, Q \cdot \frac{l}{2} = {}^1/_{32}\, Q\, l,$$

und ſolglich die Tragkraft:

$$Q = 32 \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{16}/_{3} \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot T.$$

Wenn der Balken unter dieſen Umſtänden nicht durch eine Säule unterſtützt wäre, ſo würde ſeine Tragkraft:

$$Q = 8 \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{4}/_{3} \frac{b h^2}{l} T \text{ ſein.}$$

Es trägt folglich auch hier der unterſtützte Balken viermal ſo viel als der ununterſtützte, oder es können bei gleicher Tragkraft die Querſchnittsdimenſionen b und h des erſteren $\sqrt[3]{1/4} = 0{,}63$mal ſo groß ſein als die des letzteren.

Wenn die Laſt Q des Balkens nicht gleichförmig, ſondern in zwei Hälften, und zwar ſo vertheilt iſt, daß jede Hälfte mitten zwiſchen der Säule und je einer Stütze wirkt, ſo hat man im erſteren Falle, wo die Enden A und A des Balkens feſtgehalten werden, nach Band I., §. 246, die Tragkraft:

$$Q = 4 \,.\, 8 \, \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{16}/_{3} \, \frac{b h^2}{l} \, T = {}^{2}/_{3} \, \frac{8 b h^2}{l} \, T,$$

alſo zwei Drittel ſo groß als wenn die Laſt gleichförmig vertheilt iſt.

Im zweiten Falle, wo die Enden A und A des Balkens frei aufliegen, trägt (nach Band I., §. 247) jedes Widerlager daſelbſt nur ${}^{5}/_{16}$ der Laſt, $= {}^{5}/_{32} Q$, während die Säule die Laſt

$$P = Q - 2 \,.\, {}^{5}/_{32} Q = {}^{11}/_{16} Q$$

aufnimmt; es iſt deshalb hier das Moment zum Biegen um C:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - {}^{5}/_{32} Q \cdot \frac{l}{2} = {}^{3}/_{64} Q l,$$

und daher die Tragkraft:

$$Q = {}^{64}/_{3} \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{32}/_{9} \frac{b h^2}{l} \, T,$$

alſo ebenfalls ${}^{32}/_{9} \,.\, {}^{3}/_{16} = {}^{2}/_{3}$mal ſo groß, als wenn die Laſt gleichmäßig auf den Balken vertheilt wäre.

Beiſpiel. Ein an beiden Enden frei aufliegender hölzerner Balken von 40 Fuß Länge ſoll auf den laufenden Fuß ſeiner Länge eine Laſt von 500 Pfund tragen, und hierbei in der Mitte von einer hölzernen Säule unterſtützt werden, welche Querſchnittsdimenſionen ſind demſelben zu geben und welche Stärke muß die Säule erhalten? Es iſt hier:

$Q = 40 \,.\, 500 = 20000$ Pfund und $T = 1000$ Pfund (ſ. I., §. 240), daher

$$b h^2 = {}^{3}/_{16} \frac{Q l}{T} = {}^{3}/_{16} \cdot \frac{20000 \,.\, 40 \,.\, 12}{1000} = 1800.$$

Nimmt man nun $h = b \sqrt{2}$ an, ſo erhält man $2 b^3 = 1800$, und die erforderliche Balkenbreite:

$$b = \sqrt[3]{900} = 9{,}655 \text{ Zoll},$$

ſowie die Balkenhöhe:

$$h = 1{,}414\, b = 13{,}68 \text{ Zoll}.$$

Der Druck auf die Säule iſt $P = {}^5/_8\, Q = {}^5/_8 . 20000 = 12500$ Pfund. Nimmt man den Tragmodul derſelben $= {}^1/_6 . 6500 = 1083$ Pfund an (ſ. I., §. 212), ſo erhält man den erforderlichen Querſchnitt der Säule, $F = \frac{P}{T} = \frac{12500}{1083}$ $= 11{,}6$ Quadratzoll, und hiernach die Stärke derſelben $d = 3{,}9$ Zoll. Bei einer größeren Länge muß dieſe Säule entweder eine größere Stärke (ſ. Band I., §. 268 und 269), oder eine Unterſtützung durch Streben u. ſ. w. erhalten.

§. 42 **Unterſtützung durch zwei Säulen.** Wird ein gleichmäßig belaſteter Balken AA, Fig. 70, von zwei Säulen BD, BD unterſtützt und hierbei das Aufbiegen an den Enden verhindert, ſo trägt jedes Balkendrittel ein Drittel der Laſt Q, und daher jede der Stützen am Ende, $\frac{Q}{6}$, ſowie jede der Säulen,

$$2 . \frac{Q}{6} = \frac{Q}{3}.$$

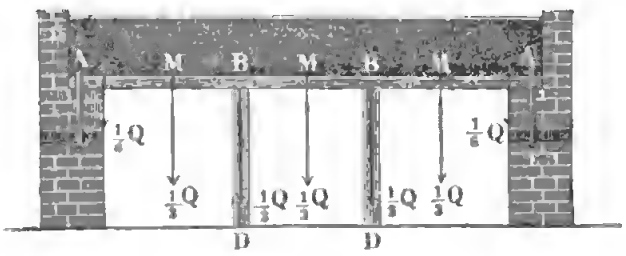
Es iſt folglich hier:

$$\frac{Q}{3} . \frac{l}{3} = 2 . b h^2 T,$$

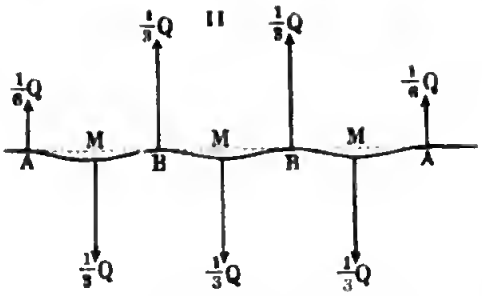
und daher die Tragkraft:

Fig. 70.

I



II



$$Q = 9 . 2 \frac{b h^2}{l} T = 18 \frac{b h^2}{l} T,$$

d. i. 9mal ſo groß als ohne Säulen, oder umgekehrt, bei gleicher Tragkraft ſind in dieſem Falle die Querſchnittsdimenſionen

$$b = h = \sqrt[3]{{}^1/_9} = 0{,}48\text{mal}$$

ſo groß zu machen als bei dem nicht unterſtützten Balken.

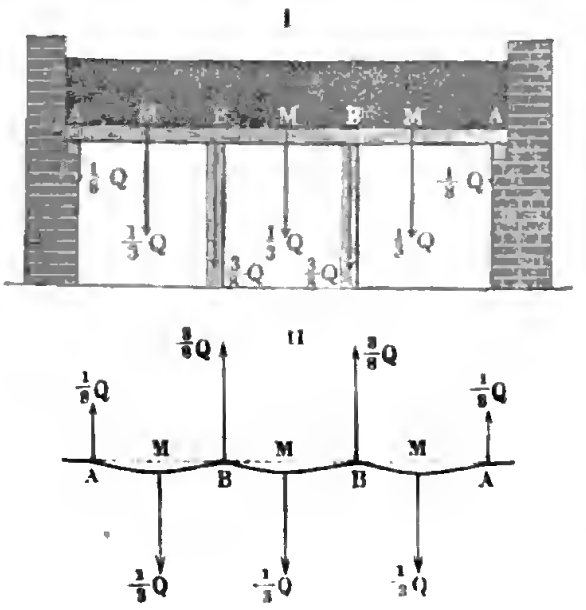
Wären die Enden des Balkens AA, Fig. 71, nur aufgelegt, könnten ſich alſo dieſelben nach oben biegen, ſo würde, wenigſtens ſehr annähernd, jede der Stützen A, A, ${}^3/_8 . \frac{Q}{3} = \frac{Q}{8}$, und folglich jede der Säulen, $\frac{Q}{2} - \frac{Q}{8}$ $= {}^3/_8\, Q$ tragen, und es wäre nun das Kraftmoment in Hinſicht auf die Stützen:

$$\frac{Q}{3}\cdot\frac{l}{6}-\frac{Q}{8}\cdot\frac{l}{3}=1/6\,(1/3-1/4)\,Ql=1/72\,Ql,$$

folglich die Tragkraft:

$$Q=72\frac{bh^2}{l}\cdot\frac{T}{6}=12\frac{bh^2}{l}\,T=9\,.\,4/3\,\frac{bh^2}{l}\,T,$$

Fig. 71.



also ebenfalls 9mal ſo groß als bei den ununterſtützten Balken.

Die Tragkraft für das mittlere Balkenſtück zwiſchen den beiden Säulen iſt, da deſſen Belaſtung $=\frac{Q}{3}$ von beiden Säulen gleichmäßig getragen wird:

$$Q=9\,.\,2\,\frac{bh^2}{l}\,T$$

$$=18\,\frac{bh^2}{l}\,T,$$

alſo dreihalbmal ſo groß als die der Endſtücke.

Die in den letzten beiden Fällen von den Axen der Balken gebildeten Curven ſind in Fig. 70 und 71, unter II., vor Augen geführt.

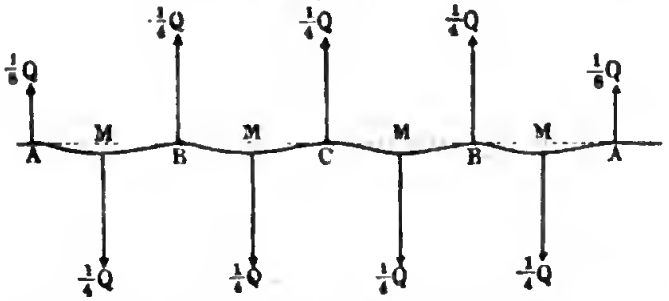
Wenn die Laſt auf die drei Mittelpunkte *M* gleichvertheilt iſt, ſo werden in dem Falle, wenn die Balkenaxe nicht bloß an den Enden, ſondern auch an den übrigen Stützpunkten in horizontaler Lage erhalten wird, die Drücke zwar dieſelben ſein, wie unter denſelben Umſtänden bei dem gleichförmig belaſteten Balken, aber es fällt dann für die Tragkraft Q, $\frac{Q}{3}\cdot\frac{l}{3}=8\,bh^2\frac{T}{6}$, und daher dieſe Kraft ſelbſt: $Q=9\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{bh^2}{l}T=12\frac{bh^2}{l}T$ aus.

Wenn dagegen die Enden *A*, *A* frei aufliegen und die Balkenaxen nur über den mittleren Stützpunkten horizontal erhalten werden, ſo hat man die Drücke in den Endpunkten $\frac{5}{16}\cdot\frac{Q}{3}$, und folglich die in den mittleren Stützpunkten $P=\frac{Q}{2}-\frac{5}{16}\,\frac{Q}{3}=\frac{19}{16}\cdot\frac{Q}{3}$, und es fällt das größte Biegungsmoment $\frac{Q}{3}\cdot\frac{l}{6}-\frac{5}{16}\,\frac{Q}{3}\,\frac{l}{3}=\frac{Ql}{48}$ aus, ſo daß die Tragkraft des Balkens

$Q = 48 \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6} = 8 \frac{bh^2}{l} T$, alſo wieder $^2/_3$ mal ſo groß anzunehmen iſt, als wenn die Enden feſtliegen.

§. 43 **Unterſtützung durch mehrere Säulen.** Wird der Balken ACA, Fig. 72, von drei Zwiſchenſäulen unterſtützt, und dadurch gewiſſermaßen in vier gleiche Stücke AB, BC, CB und BA zer-

Fig. 72.



theilt, ſo trägt in dem Falle, daß die Balkenenden am Aufbiegen verhindert werden, jede Säule $\frac{Q}{4}$ und jede der beiden Widerlager oder Stützen am Ende, $\frac{Q}{8}$, und es iſt folglich die Tragkraft dieſes Balkens:

$$Q = 4 . 4 . \frac{2bh^2}{l} T = 16 . \frac{2bh^2}{l} T,$$

d. i. 16mal ſo groß, als wenn der Balken ununterſtützt wäre. Bei gleicher Tragkraft ſind daher die erforderlichen Querſchnittsdimenſionen des ſo unterſtützten Balkens $\sqrt[3]{1/_{16}} = 0{,}4$mal ſo groß als die des Balkens ohne Säulen.

Wird ferner unter denſelben Umſtänden der Balken oder Träger durch vier Zwiſchenſäulen unterſtützt, ſo trägt ſeine Tragkraft:

$$Q = 25 . \frac{2bh^2}{l} T.$$

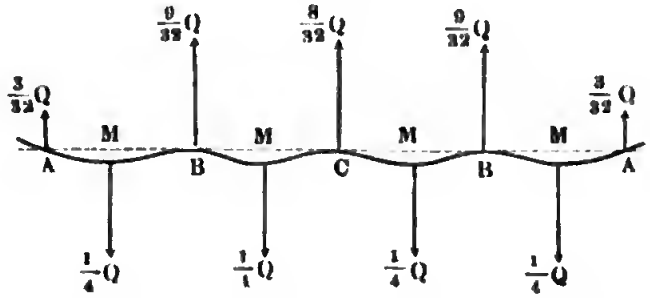
Hat der Balken außer den zwei Endpfeilern noch n Stützen, ſo trägt jeder Endpfeiler $^1/_2 . \frac{Q}{n+1}$, dagegen jede Stütze $\frac{Q}{n+1}$, und es iſt die ganze Tragkraft:

$$Q = (n+1)^2 \frac{2bh^2}{l} T,$$

alſo $(n+1)^2$ mal ſo groß als ohne Stützen, und es ſind folglich bei ähnlichen Querſchnitten die erforderlichen Querſchnittsdimenſionen b und h in dieſem Falle $\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3}}$ mal ſo groß als bei dem gleich belaſteten Balken ohne Säulen zu machen.

Liegen bei dem in B, C und B durch drei Säulen unterstützten Balken $ABCBA$, Fig. 73, die Enden A und A frei auf, so können wir wieder

Fig. 73.



annehmen, daß jeder Endpfeiler die Last $^3/_8 . \frac{Q}{4} = {}^3/_{32}\ Q$, daß ferner jede der Säulen in B, B die Last $^5/_8\ \frac{Q}{4} + {}^1/_2 . \frac{Q}{4} = {}^9/_{32}\ Q$, und daß endlich die mittlere Säule die Last $\frac{Q}{4} = {}^8/_{32}\ Q$ aufnimmt.

Das Kraftmoment des Balkenstückes AB in Hinsicht auf seinen Stützpunkt B ist:

$$^1/_4\ Q . \overline{MB} - {}^3/_{32}\ Q . \overline{AB} = {}^1/_4\ Q . \frac{l}{8} - {}^3/_{32}\ Q . \frac{l}{4}$$
$$= \frac{Ql}{32} - \frac{3\,Ql}{128} = \frac{Ql}{128};$$

folglich ist die Tragkraft dieses Balkenstückes:

$$Q = 128 . \frac{bh^2}{l} . \frac{T}{6} = {}^{64}/_3\ \frac{bh^2}{l}\ T = 16 . {}^4/_3\ \frac{bh^2}{l}\ T,$$

d. i. 16mal so groß als bei einem solchen Balken ohne Stützen oder Säulen.

Für ein Mittelstück BC ist unter der Voraussetzung, daß dessen Enden B und C horizontal laufen, wie oben, die Tragkraft:

$$Q = 16 . \frac{2\,bh^2}{l}\ T,$$

d. i. $^3/_2$mal so groß als für ein Endstück AB.

Ist die Anzahl der Zwischenpfeiler $= n$, so trägt jeder Endpfeiler die Last $^3/_8\ \frac{Q}{n+1}$, ferner jede den Endpfeilern zunächst befindliche Säule die Last

$$({}^5/_8 + {}^1/_2)\ \frac{Q}{n+1} = {}^9/_8\ \frac{Q}{n+1},$$

und jede der übrigen Säulen, $= \frac{Q}{n+1}$; es iſt hiernach das Moment der Tragkraft der Endſtücke des Balkens:

$$\frac{Q}{n+1} \cdot \frac{{}^1/_2 l}{n+1} - {}^3/_8 \frac{Q}{n+1} \cdot \frac{l}{n+1} = {}^1/_8 \cdot \frac{Ql}{(n+1)^2},$$

folglich die Tragkraft ſelbſt:

$$Q = 8\,(n+1)^2 \cdot \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = (n+1)^2 \cdot {}^4/_3 \frac{bh^2}{l} \cdot T,$$

d. i. $(n+1)^2$ mal ſo groß als für einen ſolchen Balken ohne Säulen.

Die Tragkraft der Mittelſtücke bleibt wie oben:

$$Q = (n+1)^2 \cdot \frac{2bh^2}{l}\, T.$$

Wäre die Laſt Q nicht auf den ganzen Balken vertheilt, ſondern nur in den Mittelpunkten M zwiſchen je zwei Stützpunkten wirkſam, ſo würden im erſten Falle (Fig. 72) ſich zwar die Drücke auf die Stützpunkte nicht ändern, allein es wäre die Tragkraft des Balkens (ſ. Band I., §. 246) nur ${}^2/_3$ mal ſo groß als bei gleichmäßiger Vertheilung der Laſt, d. i.

$$Q = {}^2/_3\,(n+1)^2 \cdot \frac{2bh^2}{l}\, T.$$

Im zweiten Falle (Fig. 73) wäre auch der Druck auf die Stützpunkte ein anderer, nämlich (Band I., §. 221 und §. 247) der Druck auf je ein Widerlager

$${}^5/_{16} \cdot \frac{Q}{n+1},$$

ferner der auf je eine Säule zunächſt eines Widerlagers:

$${}^{11}/_{16}\, \frac{Q}{n+1} + {}^8/_{16} \cdot \frac{Q}{n+1} = {}^{19}/_{16} \cdot \frac{Q}{n+1},$$

und dagegen der auf je eine der übrigen Säulen, wie oben, $= \frac{Q}{n+1}$.

Hiernach wäre nun auch das Moment der Tragkraft der äußerſten Balkenſtücke AB:

$$\frac{Q}{n+1} \cdot \frac{{}^1/_2 l}{n+1} - {}^5/_{16} \cdot \frac{Q}{n+1} \cdot \frac{l}{n+1} = {}^3/_{16}\, \frac{Ql}{(n+1)^2},$$

und daher die Tragkraft ſelbſt:

$$Q = {}^{16}/_3\,(n+1)^2 \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^8/_9\,(n+1)^2 \frac{bh^2}{l}\, T.$$

Die Tragkraft der Zwiſchenſtücke bliebe:

$$Q = {}^4/_3\,(n+1)^2 \cdot \frac{bh^2}{l} \cdot T.$$

Aus den im Vorſtehenden gefundenen Ergebniſſen iſt folgende Tabelle hervorgegangen, welche vorausſetzt, daß die Anzahl n der Zwiſchenſäulen mindeſtens zwei beträgt.

	Eine auf den ganzen Balken gleichmäßig vertheilte Laſt Q		Eine auf die Mittelpunkte zwiſchen je zwei Stützpunkten gleich vertheilte Laſt Q	
	mit feſten Enden.	mit frei aufliegenden Enden.	mit feſten Enden.	mit frei aufliegenden Enden.
Druck auf ein Widerlager.	$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{3}{8}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{5}{16}\,\frac{Q}{n+1}$
Druck auf eine Säule, zunächſt einem Widerlager.	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{9}{8}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{19}{16}\,\frac{Q}{n+1}$
Druck auf eine der inneren Säulen.	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$
Product bh^2 für die Balkenenden.	$\frac{1}{2}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{9}{8}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$
Product bh^2 für die mittleren Balkenſtücke.	$\frac{1}{2}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{1}{2}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Ql}{(n+1)^2\,T}$

In dieſer Tabelle bedeutet l die ganze Länge, b die Breite, h die Dicke oder Höhe des Balkens, Q die Belaſtung deſſelben, n die Anzahl der ſtützenden Säulen, und T den Tragmodul (Band I., §. 205 und 240) des Balkenmaterials.

Beiſpiel. Wenn der Balken von 40 Fuß = 480 Zoll Länge aus dem Beiſpiel von §. 41 von $n = 3$ Säulen unterſtützt wird, ſo iſt:

$$bh^2 = \tfrac{3}{4}\,\frac{Ql}{n^2\,T} = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{Ql}{16\,T} = \tfrac{3}{64}\,\frac{Ql}{T} = \tfrac{3}{64}\cdot\frac{500\,.\,40\,.\,480}{1000}$$
$$= 15\,.\,30 = 450,$$

daher die erforderliche Balkenbreite:

$$b = \sqrt[3]{450/2} = \sqrt[3]{225} = 6{,}08 \text{ Zoll},$$

und die Balkenhöhe:

$$h = 1{,}414\,.\,6{,}08 = 8{,}60 \text{ Zoll}.$$

Von der gegebenen Laſt $Q = 20000$ Pfund trägt jede der äußeren Säulen:

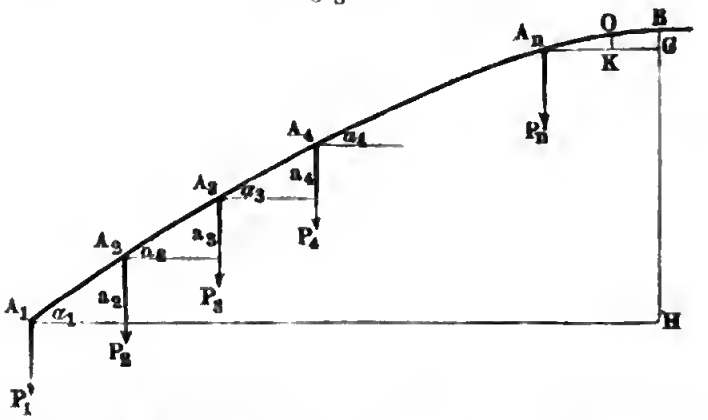
$$P = \tfrac{9}{8}\,\frac{Q}{n} = \tfrac{9}{8}\cdot\frac{20000}{4} = \frac{45000}{8} = 5625 \text{ Pfund},$$

und es iſt daher der erforderliche Querſchnitt einer ſolchen Säule, wenn man hier $T = 250$ Pfund annimmt:

$$F = \frac{P}{T} = \frac{5625}{250} = 22{,}5 \text{ Quadratzoll}.$$

(§. 44) **Allgemeine Theorie der Biegung durch mehrere Kräfte.** Im Vorſtehenden iſt angenommen worden, daß die Balken auf den Säulen platt aufliegen, und daher die Balkenaxe an den durch die Säulen unterſtützten Stellen eine horizontale Lage annehmen; in Folgendem wollen wir aber vorausſetzen, daß die Balken nur in Punkten auf den Säulen aufruhen, wobei die Balkenaxen an dieſen Stellen geneigte Lagen annehmen können. Um allgemeine Formeln für die Gleichgewichtsverhältniſſe eines ſolchen Balkens zu finden, legen wir den allgemeinen Fall zu Grunde, wo ein an einem Ende B, Fig. 74, feſtgehaltener Balken in gleichen Abſtänden

Fig. 74.



von einander durch Gewichte P_1, P_2, P_3, ... P_n gebogen wird. Bezeichnet c die Abſtände $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 \ldots = A_nB$ der Aufhängepunkte von einander, ſo iſt für einen Punkt O in der neutralen Axe des letzten Balkenſtückes, welcher um die variable Abſciſſe $A_nK = x$ vom letzten Aufhängepunkte A_n abſteht, das Biegungsmoment:

$$M = P_n\,x + P_{n-1}\,(x+c) + P_{n-2}\,(x+2c) + P_{n-3}\,(x+3c) + \cdots + P_1\,(x+(n-1)c).$$

Nun iſt aber auch $M = \frac{WE}{r} = -\,WE\,\frac{d\alpha}{dx}$, wenn α den Neigungswinkel der Balkenaxe in O bezeichnet (ſ. Band I., §. 216 u. f. w.), daher hat man

$$\begin{aligned} WE\,d\alpha &= -\,[P_n x + P_{n-1}(x+c) + \cdots + P_1\,(x+(n-1)c)]\,dx \\ &= -(P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots + P_1)\,x\,dx \\ &\quad -(P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3} + \cdots + (n-1)\,P_1)\,c\,dx, \end{aligned}$$

und es folgt durch Integriren

$$\begin{aligned} WE\alpha &= -\,(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\,\frac{x^2}{2} \\ &\quad -\,(P_{n-1} + 2P_{n-2} + \cdots + (n-1)\,P_1)\,cx + \mathit{Const.} \end{aligned}$$

Iſt nun im Fixpunkte B d. i. für $x = c$, der Neigungswinkel der Balkenaxe $\alpha = \alpha_{n+1}$, ſo folgt

1.) $WE(\alpha - \alpha_{n+1}) = (P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots + P_1)\left(\frac{c^2 - x^2}{2}\right)$
$+ (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3} + \cdots + (n-1)P_1)[(c-x)c].$

Da noch $\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, wenn dx und dy die Elemente der Coordinaten $A_n K = x$ und $KO = y$ des Punktes O bezeichnen, so hat man

$$WE(dy - \alpha_{n+1}dx) = (P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\frac{c^2 - x^2}{2}dx$$
$$+ (P_{n-1} + 2P_{n-2} + \cdots + (n-1)P_1)(c-x)c\,dx,$$

und es folgt durch Integration die Gleichung des Axenstückes $A_n B$:

2.) $WE(y - \alpha_{n+1}x) = (P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots$
$+ P_1)\left(\frac{c^2 x - {}^1/_3 x^3}{2}\right) + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3}$
$+ \cdots + (n-1)P_1)(c - {}^1/_2 x)cx.$

Setzt man endlich in der ersten Hauptgleichung $x = 0$, so erhält man den Neigungswinkel in A_n:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + \frac{(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1).{}^1/_2 c^2 + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + \cdots + (n-1)P_1)c^2}{WE}$$

d. i.

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + (P_n + 3P_{n-1} + 5P_{n-2} + 7P_{n-3} + \cdots$$
$$+ (2n-1)P_1)\frac{c^2}{2WE},$$

und führt man in der zweiten Hauptgleichung $x = c$ ein, so giebt diese die Bogenhöhe CB in B,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}c + \frac{(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1).{}^1/_3 c^3 + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3} + \cdots + (n-1)P_1).{}^1/_2 c^3}{WE}$$

d. i.

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}c + (2P_n + 5P_{n-1} + 8P_{n-2} + 11P_{n-3} + \cdots$$
$$+ (3n-1)P_1)\frac{c^3}{6WE}.$$

Wenn der Balken außer den Kräften noch eine gleichmäßig vertheilte Last aufnimmt, welche pr. Längeneinheit des Balkens q, also für jedes Balkenstück von der Länge c, qc beträgt, so fällt das Moment M_1 noch um $[(n-1)c + x]q \cdot \frac{(n-1)c + x}{2} = \frac{[(n-1)c + x]^2 q}{2}$ größer als das Moment M ohne diese Belastung q aus, und es ist diesem entsprechend auch $WE(\alpha - \alpha_{n+1})$ um

$$\int_x^c {}^1/_2\, q\, [(n-1)\, c + x]^2\, dx = \frac{q}{6}\, [n^3 c^3 - ((n-1)\, c + x)^3],$$

ſowie $WE\,(y - \alpha_{n+1}\, x)$ um

$$\int_o^x \frac{q}{6}\, [n^3\, c^3 - ((n-1)\, c + x)^3]\, dx$$

$$= \frac{q}{6}\left(n^3\, c^3\, x - \frac{[(n-1)\, c + x]^4 - (n-1)^4 c^4}{4}\right)$$

größer.

Setzt man für dieſen allgemeinen Fall, $x = o$, ſo folgt der Neigungswinkel in A_n:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + [P_n + 3\, P_{n-1} + 5\, P_{n-2} + \cdots + (2n-1)\, P_1]\, \frac{c^2}{2\, WE}$$

$$+ \frac{q\, c^3\, [n^3 - (n-1)^3]}{6\, WE};$$

und führt man $x = c$ ein, ſo ergiebt ſich die Bogenhöhe des letzten Balkenſtückes:

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1}\, c + [2\, P_n + 5\, P_{n-1} + 8\, P_{n-2} + \cdots + (3n-1)\, P_1]\, \frac{c^3}{6\, WE}$$

$$+ \frac{q\, c^4}{6\, WE}\left(n^3 - \frac{n^4 - (n-1)^4}{4}\right).$$

Haben die Kräfte q, P_1, P_2, $P_3 \cdots$, wie z. B. angehangene Gewichte, eine und dieſelbe Richtung, ſo iſt das Biegungsmoment im Befeſtigungspunkte B,

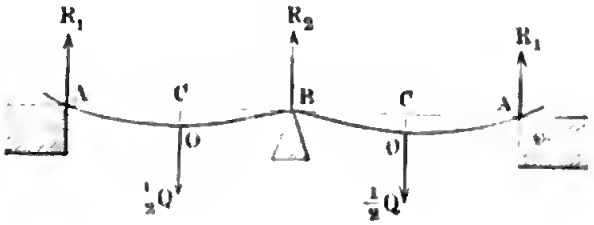
$$M = (P_1 + 2\, P_2 + 3\, P_3 + \cdots + n\, P_n)\, c + (n+1)^2\, \frac{q\, c^2}{2}$$ am

größten, und daher $= \frac{WT}{c}$ zu ſetzen, wenn es darauf ankommt, die Tragfähigkeit des Balkens zu ermitteln oder die erforderliche Stärke deſſelben zu beſtimmen. Wirken dagegen die Kräfte q, P_1, P_2, P_3 ... zum Theil einander entgegengeſetzt, ſo kann das größte Biegungsmoment des Balkens auch an einer anderen Stelle ſtattfinden, und es erfordert deshalb die Ermittelung der Tragfähigkeit deſſelben eine ſpecielle Unterſuchung.

Mit Hülfe der vorſtehenden Formeln laſſen ſich natürlich auch die Neigungswinkel und Bogenhöhen aller übrigen Balkenſtücke, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ ... beſtimmen, wenn man in denſelben $n = 1, 2, 3 \ldots$ einſetzt. Sind einige dieſer Größen bekannt, ſo kann man mittels dieſer Formeln auch die Drücke R_1, R_2, ... in den Stützpunkten ermitteln, wie in Folgendem zur Ausführung kommt.

Balken mit Zwischensäulen. Für jede Balkenhälfte des mit einer Zwischensäule unterstützten Balkens AA, Fig. 75, ist, wenn die Last Q in der Mitte zwischen den Stützpunkten wirkt, §. 45

Fig. 75.



$$\alpha_3 = o,\ a_2 + a_3 = o,\ c = \frac{l}{4},\ P_1 = -R_1 \text{ und } P_2 = \frac{Q}{2}$$

zu setzen, daher man hier

$$\alpha_2 = \alpha_3 + (P_2 + 3P_1)\frac{c^2}{2WE} = o + \left(\frac{Q}{2} - 3R_1\right)\frac{c^2}{2WE};$$

ferner $a_2 = \alpha_2 c - \frac{2R_1c^3}{6WE} = \left(\frac{Q}{2} - 3R_1\right)\frac{c^3}{2WE} - \frac{R_1c^3}{3WE}$

$$= (3/2\,Q - 11R_1)\frac{c^3}{6WE}, \text{ und}$$

$$a_3 = \alpha_3 c + \left(2\frac{Q}{2} - 5R_1\right)\frac{c^3}{6WE} = (Q - 5R_1)\frac{c^3}{6WE},$$

daher ist zu setzen: $a_2 + a_3 = o$, $= (5/2\,Q - 16R_1)\frac{c^3}{6WE}$, und es folgt der Druck auf einen Endpfeiler:

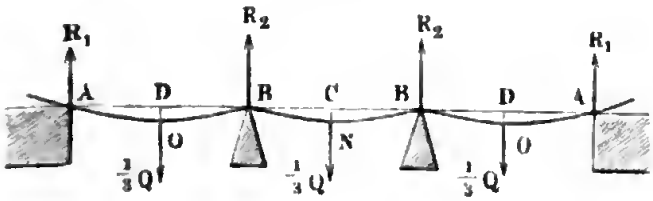
$R_1 = 5/32\,Q$, so wie der Druck auf die Mittelsäule:

$R_2 = Q - 2R_1 = 22/32\,Q = 11/16\,Q$.

Bei gleichmäßiger Belastung ist $\alpha_2 = o$, $a_2 = o$, $P_1 = -R_1$ und $P_2 = o$, daher

$$a_2 = o = -\frac{2R_1c^3}{6WE} + (1 - 1/4)\frac{qc^4}{6WE}, \text{ woraus nun}$$

Fig. 76.



$R_1 = 3/8\,qc = 3/16\,Q$, so wie

$R_2 = Q - 3/8\,Q = 5/8\,Q$ folgt. (Vergl. §. 41.)

Ist der Balken, wie Fig. 76 darstellt, durch zwei Zwischensäulen unterstützt, so hat man

im erſteren Falle, wo in jedem der Mittelpunkte zwiſchen den Stützpunkten die Laſt $\frac{Q}{3}$ aufruht,

$$P_1 = -R_1,\ P_2 = \frac{Q}{3},\ P_3 = -R_2 = -\left(\frac{Q}{2} - R_1\right) = R_1 - \frac{Q}{2},$$

ferner $\alpha_4 = o$, und $a_2 + a_3 = o$. Hiernach folgt

$$a_2 = \alpha_2 c - 2R_1 \frac{c^3}{6WE},\ a_3 = \alpha_3 c + \left(2\frac{Q}{3} - 5R_1\right)\frac{c^3}{6WE},$$

und es iſt daher

$$o = (\alpha_2 + \alpha_3)\, c + (^2/_3\, Q - 7R_1)\frac{c^3}{6WE}.$$

Ferner iſt $\alpha_3 = \alpha_4 + \left(-R_2 + 3\frac{Q}{3} - 5R_1\right)\frac{c^2}{2WE}$

$$= \left(\frac{Q}{2} - 4R_1\right)\frac{c^2}{2WE},$$

ſowie $\alpha_2 = \alpha_3 + \left(\frac{Q}{3} - 3R_1\right)\frac{c^2}{2WE} = (^5/_6\, Q - 7R_1)\frac{c^2}{2WE}$,

daher läßt ſich ſetzen,

$o = (^8/_6\, Q - 11R_1)\frac{c^3}{2WE} + (^2/_3\, Q - 7R_1)\frac{c^3}{6WE}$, oder

$o = 4Q - 33R_1 + {}^2/_3\, Q - 7R_1$, und es folgt der Druck auf je einen Endpfeiler:

$R_1 = \frac{7Q}{60}$; dagegen der auf je einen Zwiſchenpfeiler: $R_2 = \frac{Q}{2} - R_1$

$$= \left(\frac{30-7}{60}\right) Q = {}^{23}/_{60}\, Q.$$

Schließlich ergiebt ſich das Biegungsmoment in Hinſicht auf D, $M_1 = -R_1 c = -{}^7/_{60}\, Qc$, das in Hinſicht auf B,

$M_2 = \frac{Q}{3} c - 2R_1 c = (^1/_3 - {}^7/_{30})\, Qc = {}^1/_{10}\, Qc$, und das in Hinſicht auf C,

$M_3 = -R_2 c + {}^2/_3\, Qc - 3R_1 c = -(^{23}/_{60} - {}^{40}/_{60} + {}^{21}/_{60})\, Qc$

$= -{}^1/_{15}\, Qc.$

Da das Moment M_1 das größere iſt, ſo hat man für die zuläſſige Belaſtung Q die Beſtimmungsgleichung:

$${}^7/_{60}\, Qc = {}^7/_{60}\frac{Ql}{6} = \frac{WT}{e} = \frac{bh^2}{6}\, T,$$

und daher dieſe Belaſtung ſelbſt:

$$Q = {}^{60}/_{7}\frac{bh^2}{l}\, T,$$ wogegen wir §. 42, annähernd,

$$Q = 8\,\frac{bh^2}{l}\,T \text{ gefunden haben.}$$

Ist hingegen die Last $Q = 6\,qc$ auf den ganzen Balken gleichförmig vertheilt, so hat man $P_1 = -R_1$, $P_2 = o$, $P_3 = -R_2$, $\alpha_4 = o$, und $\alpha_2 + \alpha_3 = o$, wonach folgt:

$$\alpha_2 = \alpha_2\, c - 2\,\frac{R_1 c^3}{6\,WE} + {}^3/_4\,\frac{q c^4}{6\,WE}, \text{ und}$$

$$\alpha_3 = \alpha_3\, c - 5\,\frac{R_1 c^3}{6\,WE} + {}^{17}/_4\,\frac{q c^4}{6\,WE}, \text{ daher}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = (\alpha_2 + \alpha_3)\, c - 7\,\frac{R_1 c^3}{6\,WE} + 5\,\frac{q c^4}{6\,WE}.$$

Ferner $\alpha_2 = \alpha_3 - 3\,\dfrac{R_1 c^2}{2\,WE} + 7\,\dfrac{q c^3}{6\,WE}$,

$$\alpha_3 = -\,(R_2 + 5\,R_1)\,\frac{c^2}{2\,WE} + 19\,\frac{q c^3}{6\,WE}, \text{ daher}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = -\,(3\,qc + 4\,R_1)\,\frac{c^2}{WE} + \frac{38\,q c^3}{6\,WE} - \frac{3\,R_1 c^2}{2\,WE} + \frac{7\,q c^3}{6\,WE}$$

$$= \frac{27\,qc^3}{6\,WE} - \frac{33\,R_1 c^3}{6\,WE}, \text{ daher}$$

$(\alpha_2 + \alpha_3)\,c = 27\,\dfrac{q c^4}{6\,WE} - 33\,\dfrac{R_1 c^3}{6\,WE}$; und es ergiebt sich nun die Bestimmungsgleichung

$$o = 27qc - 33\,R_1 - 7\,R_1 + 5\,q\,c, \text{ woraus}$$

$$R_1 = {}^{32}/_{40}\,qc = {}^4/_5\,\frac{Q}{6} = {}^4/_{30}\,Q, \text{ sowie}$$

$$R_2 = ({}^{15}/_{30} - {}^4/_{30})\,Q = {}^{11}/_{30}\,Q \text{ folgt.}$$

Nun ergiebt sich das Biegungsmoment im Stützpunkt B.

$$M_1 = R_1 \,.\, 2\,c - 2\,qc^2 = {}^4/_{15}\,Q\,c - \frac{Q}{3}\,c = -\,\frac{Qc}{15} = -\,\frac{Ql}{90},$$

und das in einem Zwischenpunkte

$M_2 = R_1\,x - \dfrac{qx^2}{2}$. Letzteres ist für $x = \dfrac{R_1}{q} = {}^4/_5\,c$ im Maximum, und zwar

$$M_2 = {}^{16}/_{25}\,q\,c^2 - {}^{16}/_{25} \,.\, \frac{qc^2}{2} = {}^8/_{25}\,qc^2 = {}^8/_{25}\,\frac{Ql}{36} = {}^2/_{225}\,Ql,$$

also kleiner als M_1. Endlich folgt nun die zulässige Belastung

$$Q = 90\,\frac{WT}{el} = 90\,\frac{bh^2 T}{6\,l} = 15\,\frac{bh^2 T}{l}$$

Wird der Balken von drei Zwischensäulen unterstützt, so findet man auf demselben Wege

	P_1	P_2	P_3	P_2	P_1
bei concentrirter Belaſtung .	$^{19}/_{224}\,Q$	$^{68}/_{224}\,Q$	$^{50}/_{224}\,Q$	$^{68}/_{224}\,Q$	$^{19}/_{224}\,Q$
bei gleichmäßiger Belaſtung .	$^{11}/_{112}\,Q$	$^{32}/_{112}\,Q$	$^{26}/_{112}\,Q$	$^{32}/_{112}\,Q$	$^{11}/_{112}\,Q$

und es iſt im erſten Falle die zuläſſige Tragkraft

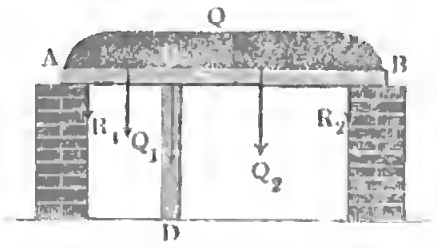
$$Q = \frac{1792}{19}\cdot\frac{WT}{le} = \frac{1792}{19}\cdot\frac{bh^2T}{6l} = \frac{896}{57}\cdot\frac{bk^2T}{l},$$

dagegen im zweiten:

$$Q = \frac{986}{17}\cdot\frac{WT}{le} = \frac{986}{17}\cdot\frac{bh^2T}{6l} = \frac{493}{51}\cdot\frac{bh^2T}{l}.$$

§ 46 **Ungleichmässige Unterstützung durch Säulen.** Wenn ein belaſteter Balken AB, Fig. 77, nicht in der Mitte, ſondern an einer anderen Stelle C von einer Säule CD unterſtützt wird, ſo läßt ſich der Druck auf ſeine Stützpunkte u. ſ. w. wie folgt ermitteln. Es ſei die ganze Belaſtung des Balkens $= Q$, die ganze Länge deſſelben $= l$, der Abſtand der Säule von einem Endpfeiler A, $AC = l_1$, und der vom anderen Endpfeiler B, $BC = l_2$, alſo $l_1 + l_2 = l$. Setzen wir wieder voraus, daß der Balken die ganze Kopffläche der Säule berührt, und folglich ſeine neutrale Axe an dieſer Stelle horizontal iſt, ſo können wir auch jedes Balkenſtück AC und BC für ſich allein betrachten und daher annehmen, daß es bei einer gleichmäßigen Belaſtung auf die ganze Balkenlänge einen ſeiner Länge proportionalen Theil von Q trägt, daß alſo AC die Laſt $Q_1 = \frac{l_1}{l}\,Q$ und BC die Laſt $Q_2 = \frac{l_2}{l}\,Q$ aufnimmt.

Fig. 77.



Werden auch die Balkenenden A und C horizontal gehalten, ſo trägt folglich das Lager A die Laſt:

$$R_1 = {}^1/_2\,Q_1 = {}^1/_2\,\frac{l_1}{l}\,Q,$$

ebenſo das Lager B die Laſt:

$$R_2 = {}^1/_2\,Q_2 = {}^1/_2\,\frac{l_2}{l}\,Q;$$

und es bleibt für die Säule CD der aufzunehmende Druck

$$P = {}^1/_2\,(Q_1 + Q_2) = {}^1/_2\,Q \text{ übrig.}$$

Sind nun wieder b und h die Querſchnittsdimenſionen des Trägers, ſo hat man für das Balkenſtück AC:

$$Q_1 = \frac{l_1}{l}\,Q = 2\,\frac{bh^2}{l_1}\,T, \text{ ſowie für das Balkenſtück } BC:$$

$$Q_2 = \frac{l_2}{l}\,Q = 2\,\frac{bh^2}{l_2}\,T, \text{ und daher:}$$

$$bh^2 = {}^1/_2\,\frac{Ql_1^2}{Tl}, \text{ ſowie } bh^2 = {}^1/_2\,\frac{Ql_2^2}{Tl}.$$

Wenn folglich die Abſtände l_1 und l_2 von einander verſchieden ſind, ſo fallen bei gleicher Sicherheit auch die Querſchnittsdimenſionen b und h der beiden Balkenſtücke ungleich aus. Liegt der Balken mit ſeinen Enden frei auf, ſo können wir dagegen den Druck in A:

$$R_1 = {}^3/_8\,Q_1 = {}^3/_8\,\frac{l_1}{l}\,Q, \text{ ſowie den in } B:$$

$$R_2 = {}^3/_8\,Q_2 = {}^3/_8\,\frac{l_2}{l}\,Q,$$

und daher den auf die Säule:

$$P = {}^5/_8\,(Q_1 + Q_2) = {}^5/_8\,Q$$

ſetzen, und es iſt nun die Tragkraft für AC:

$$Q_1 = \frac{l_1}{l}\,Q = {}^4/_3\,\frac{bh^2}{l_1}\,T, \text{ und für } BC:$$

$$Q_2 = \frac{l_2}{l}\,Q = {}^4/_3\,\frac{bh^2}{l_2}\,T, \text{ wonach für } AC:$$

$$bh^2 = {}^3/_4\,\frac{Ql_1^2}{Tl}, \text{ ſowie für } BC:$$

$$bh^2 = {}^3/_4\,\frac{Ql_2^2}{Tl} \text{ folgt.}$$

Wäre die Laſt $Q = Q_1 + Q_2$ auf die Mitten M_1 und M_2 beider Theile AC und BC vertheilt, ſo hätte man im erſten Falle den Druck auf die Endpfeiler A und B:

$$R_1 = {}^1/_2\,Q_1 \text{ und } R_2 = {}^1/_2\,Q_2, \text{ ſowie auf die Säule:}$$

$$P = {}^1/_2\,(Q_1 + Q_2) = {}^1/_2\,Q, \text{ und es wäre:}$$

$$Q_1 = {}^4/_3\,\frac{bh^2}{l_1}T, \text{ ſowie } Q_2 = {}^4/_3\,\frac{bh^2}{l_2}\,T, \text{ folglich für } AC:$$

$$bh^2 = {}^3/_4\,\frac{Q_1 l_1}{T}, \text{ ſowie für } BC:$$

$$bh^2 = {}^3/_4\,\frac{Q_2 l_2}{T} \text{ zu ſetzen.}$$

Im zweiten Falle, wenn der Balken bloß in A und C aufliegt, iſt der Druck:

in A, $R_1 = {}^5/_{16}\, Q_1$, und in B, $R_2 = {}^5/_{16}\, Q_2$,

folglich der Druck auf die Säule:

$$P = {}^{11}/_{16}\,(Q_1 + Q_2) = {}^{11}/_{16}\, Q.$$

Es iſt hiernach die Tragkraft des Stückes AC:

$$Q_1 = {}^8/_9 \cdot \frac{bh^2}{l_1}\, T, \text{ ſowie die des Stückes } BC:$$

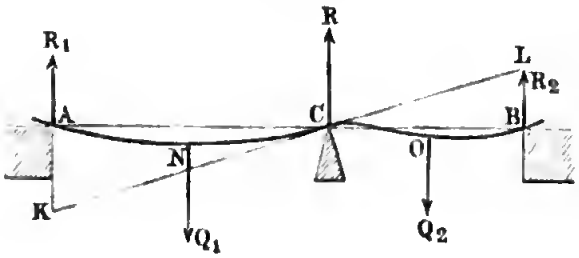
$$Q_2 = {}^8/_9 \cdot \frac{bh^2}{l_2}\, T, \text{ alſo ein Mal:}$$

$$bh^2 = {}^9/_8\, \frac{Q_1 l_1}{T}, \text{ und das andere Mal:}$$

$$bh^2 = {}^9/_8\, \frac{Q_2 l_2}{T}.$$

§. 47 Wenn der Balken AB, Fig. 78, nicht platt auf dem Kopf C der Säule CD, ſondern nur in einem Punkte deſſelben aufliegt, ſo nimmt durch die Wirkung der in den Mittelpunkten N und O der Balkenſtücke AC und BC niederziehenden Gewichte Q_1 und Q_2 die Balkenaxe die Geſtalt einer in Fig. 78 dargeſtellten Curve $ANCOB$ an. Die Drücke R_1, R_2 und R, welche in dieſem Falle die Stützpunkte A, B und C auszuhalten haben, ſind wie folgt zu beſtimmen. Es iſt

Fig. 78.



1) $R_1 + R_2 + R = Q_1 + Q_2$, ferner, wenn l_1 und l_2 die Längen der Balkenſtücke CA und CB bezeichnen,

2) $R_1 l_1 - {}^1/_2\, Q_1 l_1 = R_2 l_2 - {}^1/_2\, Q_2 l_2$, und, wenn a_1 und a_2 die Bogenhöhen AK und BL in Hinſicht auf die Tangente KL durch den Stützpunkt bezeichnen:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Ferner hat man noch nach §. 44,

$$AK = a_1 = (5\, Q_1 - 16\, R_1)\, \frac{l_1^3}{48\, WE}, \text{ und}$$

$$BL = a_2 = (16\, R_2 - 5\, Q_2)\, \frac{l_2^3}{48\, WE},$$

daher geht die letzte Proportion in folgende über

$$\frac{5\,Q_1 - 16\,R_1}{16\,R_2 - 5\,Q_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2},$$

und giebt folgende Beſtimmungsgleichung.

3) $16\,(R_1\,l_1^2 + R_2\,l_2^2) = 5\,(Q_1\,l_1^2 + Q_2\,l_2^2)$.

Nun läßt ſich Gleichung 2) auch ſchreiben:

$$2\,(R_1\,l_1 - R_2\,l_2) = Q_1\,l_1 - Q_2\,l_2, \text{ oder}$$
$$16\,(R_1\,l_1\,l_2 - R_2\,l_2^2) = 8\,l_2\,(Q_1\,l_1 - Q_2\,l_2),$$

daher ergiebt ſich durch Addition

$$16\,R_1\,l_1\,(l_1 + l_2) = Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2,$$

und es folgen die Drücke

$$R_1 = \frac{Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2}{16\,l_1\,(l_1 + l_2)},$$

$$R_2 = \frac{Q_2\,l_2\,(5\,l_2 + 8\,l_1) - 3\,Q_1\,l_1^2}{16\,l_2\,(l_1 + l_2)} \text{ und}$$

$$R = Q_1 + Q_2 - (R_1 + R_2)$$
$$= \frac{Q_1\,l_1\,(11\,l_1\,l_2 + 8\,l_2^2 + 3\,l_1^2) + Q_2\,l_2\,(11\,l_1\,l_2 + 8\,l_1^2 + 3\,l_2^2)}{16\,l_1\,l_2\,(l_1 + l_2)}$$
$$= \frac{Q_1\,l_1\,(8\,l_2 + 3\,l_1) + Q_2\,l_2\,(8\,l_1 + 3\,l_2)}{16\,l_1\,l_2}.$$

Noch hat man das Biegungsmoment im Punkte N:

$$\tfrac{1}{2}\,R_1\,l_1 = \frac{Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2}{32\,(l_1 + l_2)}, \text{ das im Punkte } O:$$

$$\tfrac{1}{2}\,R_2\,l_2 = \frac{Q_2\,l_2\,(5\,l_2 + 8\,l_1) - 3\,Q_1\,l_1^2}{32\,(l_1 + l_2)}, \text{ und das in } C:$$

$$(Q_1 - 2\,R_1)\,\frac{l_1}{2} = \frac{3\,(Q_1\,l_1^2 + Q_2\,l_2^2)}{16\,(l_1 + l_2)}.$$

Setzt man den größten dieſer drei Werthe $= \frac{W\,T}{e}$, ſo erhält man die Gleichung zur Berechnung der nöthigen Stärke des Balkens.

Für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ iſt $R_1 = \frac{13\,Q_1 - 3\,Q_2}{32}$, $R_2 = \frac{13\,Q_2 - 3\,Q_1}{32}$,

$$R = \frac{11\,(Q_1 + Q_2)}{16},\ \tfrac{1}{2}\,R_1\,l_1 = \left(\frac{13\,Q_1 - 3\,Q_2}{128}\right) l,$$

$$\tfrac{1}{2}\,R_2\,l_2 = \left(\frac{13\,Q_2 - 3\,Q_1}{128}\right) l \text{ und } (Q_1 - 2\,R_1)\,\frac{l_1}{2} = \frac{3\,(Q_1 + Q_2)\,l}{64}.$$

Iſt der Balken **gleichmäßig**, und zwar jede Längeneinheit deſſelben mit q belaſtet, ſo hat man die ganze Laſt $Q = q\,l$, und es iſt zu ſetzen:

1) $R_1 + R_2 + R = q\,l$.

Ferner iſt, da die Momente auf beiden Seiten von C einander gleich ſind,

$$R_1\,l_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_1^2 = R_2\,l_2 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_2^2, \text{ oder}$$

2) $R_1 l_1 - R_2 l_2 = {}^1/_2 q (l_1^2 - l_2^2)$.

Nun ſind die Bogenhöhen

$$AK = a_1 = \left(\frac{R_1}{3} - \frac{q l_1}{8}\right) \frac{l_1^3}{WE} \text{ und}$$

$$BL = a_2 = \left(\frac{q l_2}{8} - \frac{R_2}{3}\right) \frac{l_2^3}{WE}; \text{ daher hat man hier}$$

$$\frac{\frac{R_1}{3} - \frac{q l_1}{8}}{\frac{q l_2}{8} - \frac{R_2}{3}} = \frac{l_2^2}{l_1^2}, \text{ oder}$$

3) $8 (R_1 l_1^2 + R_2 l_2^2) = 3 q (l_1^3 + l_2^3)$.

Aendert man die Gleichung Nr. 2 in folgende um:

$$8 R_1 l_1 l_2 - 8 R_2 l_2^2 = 4 q (l_1^2 - l_2^2) l_2,$$

und addirt dieſelbe nun zu Nr. 3, ſo erhält man

$$8 R_1 l_1 (l_1 + l_2) = q (3 l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 - l_2^3),$$

und hiernach folgende Formeln für die Drücke auf die Stützpunkte

$$R_1 = \frac{q (3 l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 - l_2^3)}{8 l_1 (l_1 + l_2)},$$

$$R_2 = \frac{q (3 l_2^3 + 4 l_2^2 l_1 - l_1^3)}{8 l_2 (l_1 + l_2)} \text{ und}$$

$$R = q l - (R_1 + R_2)$$

$$= \frac{q (l_1^4 + 5 l_1^3 l_2 + 8 l_1^2 l_2^2 + 5 l_2^3 l_1 + l_2^4)}{8 l_1 l_2 (l_1 + l_2)}$$

$$= \frac{q (l_1^3 + 4 l_1 l_2 (l_1 + l_2) + l_2^3)}{8 l_1 l_2}.$$

Die Biegungsmomente für die Stellen, welche um x_1 und x_2 von den Stützpunkten A und B abſtehen, ſind

$M_1 = R_1 x_1 - \frac{q x_1^2}{2}$ und $M_2 = R_2 x_2 - \frac{q x_2^2}{2}$, und haben ſowohl für $x_1 = \frac{R_1}{q}$ und $x_2 = \frac{R_2}{q}$, als auch für $x_1 = l_1$ und $x_2 = l_2$ ihre Maximalwerthe, nämlich im erſten Falle

$M_1 = \frac{R_1^2}{2q}$ und $M_2 = \frac{R_2^2}{2q}$, und im zweiten Falle

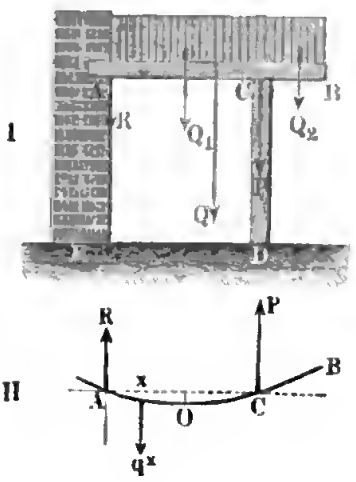
$M_1 = R_1 l_1 - \frac{q l_1^2}{2}$ und $M_2 = R_2 l_2 - \frac{q l_2^2}{2}$.

Um die nöthige Stärke des Balkens zu finden, iſt, wie bekannt, der größte dieſer Maximalwerthe $= \frac{WT}{e}$, z. B. $= \frac{b h^2 T}{6}$ zu ſetzen.

Unterstützung durch eine Aussensäule. Zuweilen ruht ein Balken oder Träger AB, Fig. 79 I., nur mit einem Endpunkte A auf einem Widerlager auf und ist außerdem noch von einer Säule CD unterstützt. Ist dann wieder der Balken auf seiner ganzen Länge durch das Gewicht Q gleichmäßig belastet, und die Säule im Abstande $AC = l_1$ von Widerlager A angebracht, so kann man, unter der Voraussetzung, daß der Druck P auf die Säule den im Schwerpunkte, also am Hebelarm $\frac{l}{2}$ wirkenden Gewichte Q der Last in Hinsicht auf A als Drehungspunkt, das Gleichgewicht hält, setzen: $Pl_1 = Q\frac{l}{2}$, und daher den Druck auf die Säule:

§. 48

Fig. 79.



$$P = {}^1/_2\,\frac{Ql}{l_1},$$

sowie den Druck im Stützpunkte A:

$$R = Q - P = \left(1 - {}^1/_2\,\frac{l}{l_1}\right) Q.$$

Ferner trägt das Balkenstück AC von der Länge l_1 die Last: $Q_1 = \frac{l_1}{l}\,Q$, und dagegen das freie Endstück BC von der Länge l_2 die Last: $Q_2 = \frac{l_2}{l}\,Q$.

Das Biegungsmoment des Balkens in Hinsicht auf einen Punkt O, Fig. 79, II., welcher um $AO = x$ vom Stützpunkte A absteht, ist $M = \pm\left(Rx - \frac{qx^2}{2}\right)$, und zwar ein Maximum für $x = \frac{R}{q}$ und für $x = l_1$. Die entsprechenden Maximalwerthe sind

$$\frac{R^2}{2q} = \left(1 - {}^1/_2\,\frac{l}{l_1}\right)^2 \frac{Ql}{2} \text{ und } Rl_1 - \frac{ql_1^2}{2} = (l - l_1)^2\,\frac{Q}{2l}.$$

Setzt man das eine oder andere dieser Momente dem Tragmomente $\frac{bh^2T}{6}$ gleich, so erhält man zur Bestimmung der Balkenstärke bh^2 entweder

$$= 3\left(1 - {}^1/_2\,\frac{l}{l_1}\right)^2 \frac{Ql}{T} \text{ oder } = 3\,(l - l_1)^2\,\frac{Q}{lT}.$$

Z. B. für $l_1 = l$ ist nach der ersten Formel, so wie für $l_1 = {}^1/_2 l$, nach der zweiten Formel:

$$bh^2 = {}^3/_4 \frac{Ql}{T}.$$

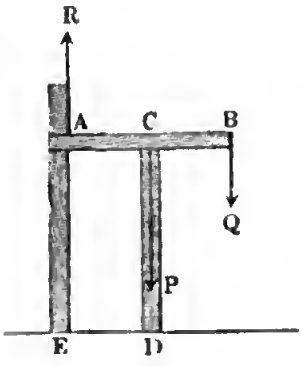
Für das zweite Balkenstück BC hat man dagegen (s. Band I., §. 240):

$$Q_2 = \frac{2bh^2}{l_2} \cdot \frac{T}{6} = {}^1/_3 \cdot \frac{bh^2}{l_2} T, \text{ und daher:}$$

$$bh^2 = 3 \cdot \frac{Q_2 l_2}{T} = 3 \cdot \frac{Q l_2^2}{Tl}.$$

In vielen Fällen der Anwendung hängt die Last Q am Ende B Fig. 80, eines Trägers AB, wobei sich der Druck auf die Säule A

Fig. 80.



$$P = \frac{l}{l_1} Q,$$

und daher der auf das Widerlager AE

$$R = P - Q = \left(\frac{l}{l_1} - 1\right) Q$$

$$= \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) Q = \frac{l_2}{l_1} Q$$

setzen läßt. Es wirkt natürlich die letztere Kraft negativ, d. i. von unten nach oben.

Das Balkenstück AC wird durch die Kraft R gebogen, es ist daher für dasselbe:

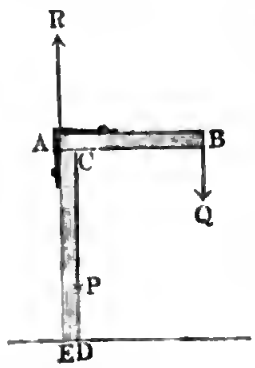
$$R = \frac{bh^2}{l_1} \cdot \frac{T}{6}, \text{ und } bh^2 = 6 \frac{Rl_1}{T} = 6 \frac{Ql_2}{T},$$

und das Stück BC wird durch die Kraft Q gebogen, folglich ist für dasselbe,

$$Q = \frac{bh^2}{l_2} \cdot \frac{T}{6}, \text{ und } bh^2 = 6 \frac{Ql_2}{T}.$$

Ist der Balken AB in dem einen oder dem anderen Falle bei A fest eingemauert, so läßt sich die Tragfähigkeit desselben nach Band I., §. 247 beurtheilen.

Fig. 81.



Hat endlich der Balken AB, Fig. 81, nur eine Stütze oder Säule AD, so wirkt er auf den Kopf AC derselben genau so wie im letzten Falle auf das Widerlager A und die Säule CD zusammen. Ist dann l_1 die Breite AC des Säulenkopfes, und l_2 die Länge BC des freiliegenden Balkenstückes, so hat man den Druck längs der inneren Seite CD der Säule:

$$P = \frac{l}{l_1} Q,$$

und den Zug längs der äußeren Seite AE, welche durch eine beſondere Befeſtigung, z. B. durch ein Band oder eine Klammer vom Balken auf die Säule überzutragen iſt:

$$R = \frac{l_2}{l}\,Q = \frac{l - l_1}{l_1}\,Q.$$

Die Säule AD wird nicht allein durch die Kraft Q zuſammengedrückt, ſondern auch mit dem Momente Ql gebogen, und es iſt daher der Querſchnitt derſelben nach einer Formel (ſ. Band I., §. 271) der zuſammengeſetzten Feſtigkeit zu berechnen.

Beiſpiel. Wenn der 20 Fuß lange gußeiſerne Träger AB, Fig. 80, an ſeinem Ende B eine Laſt $Q = 5000$ Pfund tragen und hierbei in ſeiner Mitte von einer Säule CD unterſtützt werden ſoll, ſo läßt ſich unter der Vorausſetzung, daß derſelbe in A nicht feſtgehalten wird, ſondern nur oben anliegt, der Druck auf die Säule: $P = 2\,Q = 10000$ Pfund, und folglich der im Stützpunkte A, $R = P - Q = 5000$ Pfund ſetzen, und es iſt für die Querſchnittsdimenſionen dieſes Trägers:

$$bh^2 = 6 \cdot \frac{Ql}{2\,T} = 3 \cdot \frac{5000 \cdot 240}{T} = \frac{3600000}{T},$$

folglich, wenn man $h = 3\,b$ und $T = 9000$ ſetzt:

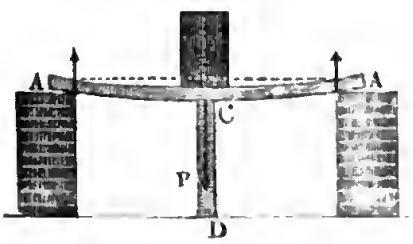
$$9\,b^3 = \frac{3600000}{9000} = 400,$$

woraus nun die Trägerbreite: $b = \sqrt[3]{400/9} = \sqrt[3]{44{,}4} = 3{,}55$ Zoll, und die Trägerdicke: $h = 3\,b = 10{,}65$ Zoll folgt.

Zuſammendrückung der Säulen. Die im Vorſtehenden entwickelte Theorie der Vertheilung des Druckes eines Trägers oder Balkens auf die ihn unterſtützenden Säulen iſt nur unter der Vorausſetzung ſtreng begründet, daß man es mit vollkommen ſtarren Säulen zu thun habe, welche ſich durch die von ihnen aufgenommenen Kräfte in ihrer Länge nicht verändern. Da dies aber nicht der Fall iſt, ſo müſſen wir noch unterſuchen, welchen Einfluß noch die Zuſammendrückung und die Ausdehnung der Trag- und Hängeſäulen auf die Vertheilung des Druckes eines Trägers hat. §. 49

Trägt der an beiden Enden aufliegende Balken in ſeiner Mitte C, Fig. 82, eine Laſt P und iſt er auch daſelbſt von einer Säule CD unterſtützt, ſo nimmt ein Theil P_1 dieſer Kraft die Druckelaſticität der Säule, und ein Theil P_2 derſelben die Biegungselaſticität des Balkens in ſich auf. Es iſt, wenn F_1 den Querſchnitt, E_1 den Elaſticitätsmodul, l_1 die Länge und λ die Größe der Zuſammendrückung dieſer Säule bezeichnen:

Fig. 82.



$$P_1 = \frac{\lambda}{l_1} F_1 E_1 \text{ (s. Band I., §. 204).}$$

Da λ zugleich die Pfeilhöhe oder Durchbiegung a der vom Balken gebildeten elastischen Linie $A\,C\,A$ ist, so ist die Kraft zum Biegen des Balkens:

$$P_2 = 48 \frac{a\,W\,E}{l^3} = 4\,\lambda \frac{b\,h^3}{l^3} E \text{ (s. Band I., §. 217),}$$

und es folgt nun durch Division der letzten Ausdrücke in einander:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4\,b\,h^3}{l^3} \cdot \frac{l_1}{F_1} \frac{E}{E_1}.$$

Da $P_1 + P_2 = P$ ist, so hat man auch:

$$P_1 \left(1 + \frac{4\,b\,h^3}{l^3} \cdot \frac{l_1\,E}{F_1\,E_1}\right) = P, \text{ und es folgt:}$$

$$P_1 = \frac{l^3 F_1 E_1 . P}{l^3 F_1 E_1 + 4\,l_1\,b\,h^3 E}, \text{ sowie:}$$

$$P_2 = \frac{4\,b\,h^3 l_1 E}{l^3 F_1 E_1 + 4\,l_1\,b\,h^3 E} \cdot P.$$

In der Regel ist $l^3 F_1 E_1$ viel größer als $4\,l_1\,b\,h^3 E$, so daß der letztere Werth gegen den ersten vernachlässigt werden kann; deshalb ist auch meistens $P_1 = P$, dagegen aber $P_2 = 0$ zu setzen.

Sollten beide Körper, der Balken und die Säule, gleichmäßig, und zwar bis zur Elasticitätsgrenze gespannt werden, so hätte man, wenn T und T_1 die Tragmodul für dieselben bezeichnen:

$$P_1 = F_1\,T_1 \quad \text{und} \quad P_2 = {}^2/_3 \frac{b\,h^2}{l} T$$

zu setzen, und es wäre folglich auch:

$$\frac{P_2}{P_1} = {}^2/_3 \frac{b\,h^2}{F_1\,l} \frac{T}{T_1}.$$

Setzt man dieses Verhältniß dem obigen Werthe für $\frac{P_2}{P_1}$ gleich, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{4\,b\,h^3}{l^3} \frac{l_1}{F_1} \frac{E}{E_1} = {}^2/_3 \frac{b\,h^2}{F_1\,l} \cdot \frac{T}{T_1},$$

woraus die Balkenhöhe $h = {}^1/_6 \cdot \frac{l^2\,T\,E_1}{l_1\,T_1\,E}$ folgt.

Wäre noch $T_1 = T$, sowie $E_1 = E$, so hätte man einfach $h = {}^1/_6 \frac{l^2}{l_1}$, und daher z. B. für $l_1 = l$, $h = {}^1/_6\,l$ zu nehmen.

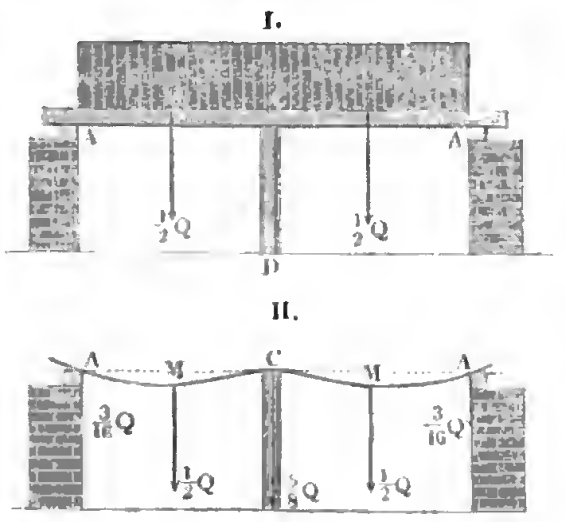
In der Praxis wird man immer von der Säule den größten Theil der Last tragen lassen, und daher den Querschnitt der Säule durch den Aus-

druck $F_1 = \frac{P}{T_1}$ bestimmen können, wobei die Querschnittsdimensionen des Balkens ganz außer Betracht kommen.

§. 50

Sehr gewöhnlich besteht die Kraft P, welche mittels jenes Balkens auf eine Säule wirkt, in der Summe zweier anderen Kräfte, welche aus einer zu beiden Seiten der Säule auf dem Balken ruhenden Last hervorgehen. Hat man es z. B. mit dem aus §. 41 bekannten Falle in Figur 83 zu thun, wo die Last Q zu beiden Seiten der Säule CD auf den Balken gleichmäßig vertheilt ist, und letzterer mit seinen Enden auf Widerlagern aufruht, so trägt die Säule, wenn sie vollkommen starr ist, den Theil $^5/_8\ Q$.

Fig. 83.



Da aber in Wirklichkeit die Säule elastisch ist, und sich um die Größe $\lambda = \frac{P l_1}{F_1 E_1}$ zusammendrückt, so bleibt auch die Balkenmitte C mit den Enden A, A nicht in einerlei Niveau und es ist also die Bogenhöhe des Balkenstückes MC, Fig. 83, II., nicht mehr so groß als die des Balkenstückes MA, sondern die eine um λ größer als die andere.

Setzen wir deshalb im Ausdrucke

$$y = \frac{P_1 (l^2 x - {}^1/_3 x^3)}{2\,WE} - \frac{q (l^3 x - {}^1/_4 x^4)}{6\,WE}$$ des §. 217 u. §. 223 Bd. I.,

$$y = \lambda,\ x = l,\ P_1 = R \text{ und } ql = Q,$$

so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung:

$$\lambda = \frac{R l^3}{3\,WE} - \frac{Q l^3}{8\,WE},$$

woraus sich der Druck auf ein Widerlager

$$R = {}^3/_8\ Q + \frac{3\,\lambda\,WE}{l^3}$$ ergiebt.

Wenn wir diese Formel auf unseren Fall, wo der Balken statt an einem Ende mit beiden Enden aufruht, anwenden wollen, so müssen wir

$$\frac{Q}{2} \text{ ſtatt } Q \text{ und } \frac{l}{2} \text{ ſtatt } l$$

ſetzen, ſo daß nun

$$R = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{\lambda\, WE}{l^3} = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{Pl_1}{F_1 E_1} \cdot \frac{WE}{l^3} \text{ folgt.}$$

Hieraus ergiebt ſich nun für den Druck P auf die Säule in der Mitte des Balkens:

$$P = Q - 2R = {}^5/_8\, Q - 48\, \frac{Pl_1}{F_1 E_1}\, \frac{WE}{l^3}, \text{ oder}$$

$$P\left(1 + 48\, \frac{WEl_1}{F_1 E_1 l^3}\right) = {}^5/_8\, Q.$$

Daher iſt dieſer Druck ſelbſt:

$$P = \frac{{}^5/_8\, Q}{1 + 48\, \frac{WEl_1}{F_1 E_1 l^3}},$$

und der Druck auf ein Widerlager:

$$R = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{WEl_1}{F_1 E_1 l^3} \cdot \frac{{}^5/_8\, Q}{1 + 48\, \frac{WEl_1}{F_1 E_1 l^3}}$$

$$= {}^3/_{16}\, Q \left(1 + \frac{80\, WEl_1}{F_1 E_1 l^3 + 48\, WEl_1}\right).$$

Hat man es mit einem parallelepipediſchen Balken zu thun, ſo iſt

$$W = \frac{bh^3}{12} \text{ (ſ. Band I., §. 226) zu ſetzen.}$$

In den meiſten Fällen der Anwendung iſt die Länge l des Balkens ſo groß, daß $\frac{48\, WEl_1}{F_1 El^3}$ gegen 1 vernachläſſigt, und daher

$$P = {}^5/_8\, Q \text{ und } R = {}^3/_{16}\, Q$$

geſetzt werden kann (ſ. §. 41).

Um die Querſchnittsdimenſionen b und h des Balkens, ſowie den Querſchnitt F_1 der Säule zu ermitteln, ſetzen wir wieder das Biegungsmoment einer Balkenhälfte in Hinſicht auf die Mitte:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - R\, \frac{l}{2} = bh^2\, \frac{T}{6}, \text{ ſo daß wir}$$

$$Q - 4R = {}^4/_3\, \frac{bh^2}{l}\, T, \text{ oder}$$

$$Q - {}^3/_4\, Q \left(1 + \frac{80\, WEl_1}{F_1 E_1 l^3 + 48\, WEl_1}\right) = {}^4/_3\, \frac{bh^2}{l}\, T \text{ erhalten.}$$

Setzen wir dann noch in

$$P = \frac{{}^5/_8\, Q}{1 + 48\,\frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}} = \frac{{}^5/_8\, Q F_1 E_1 l^3}{F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1},$$

$P = F_1 T_1$, so ergiebt sich

$$F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1 = {}^5/_8\,\frac{Q E_1 l^3}{T_1}, \text{ daher:}$$

$$\frac{Q}{4}\left(1 - \frac{384\, W E T_1 l_1}{Q E_1 l^3}\right) = {}^4/_3\,\frac{b h^2}{l}\, T, \text{ und}$$

$$b h^2 = {}^3/_{16}\,\frac{Q l}{T}\left(1 - \frac{32\, b h^3 l_1 E T_1}{l^3 Q E_1}\right).$$

Hat man mittels dieser Formel die Querschnittsdimensionen des Balkens gefunden, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß das Verhältniß $\frac{h}{b}$ zwischen denselben gegeben ist, so kann man dann auch leicht den Querschnitt der Säule mittels der Formel:

$$F_1 = \frac{P}{T_1} = \frac{{}^5/_8\,\frac{Q}{T_1}}{1 + \frac{4\, b h^3 l_1 E}{F_1 E_1 l^3}} \text{ berechnen.}$$

Wäre die Last Q nicht gleichmäßig auf den ganzen Balken, sondern nur auf die Mittelpunkte M und M zwischen je zwei Stützpunkten vertheilt, so hätte man (s. Band I., §. 247).

$$P_1 = {}^5/_{32}\, Q + 24\,\lambda\,\frac{W E}{l^3}, \text{ folglich:}$$

$$P = Q - 2\, P_1 = {}^{11}/_{16}\, Q - 48\,\frac{P l_1}{F_1 l^3}\cdot\frac{W E}{E_1},$$

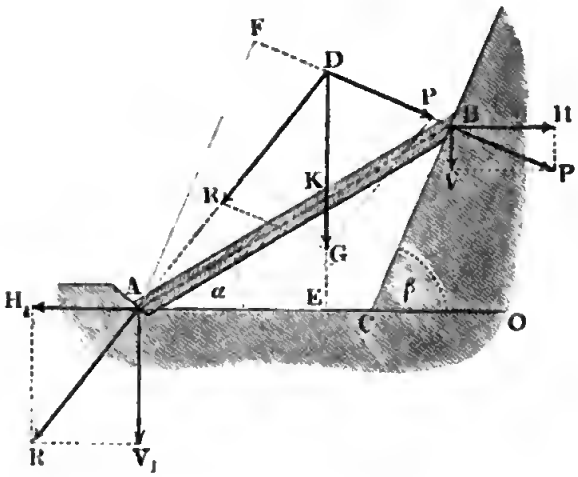
so daß nun der Druck auf die Säule

$$P = \frac{{}^{11}/_{16}\, Q}{1 + 48\,\frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}} \text{ folgen würde.}$$

Grundformeln für Sparren und Streben. Wenn ein Sparren oder eine Strebe AB, Fig. 84 (a. f. S.), in einem Endpunkte A unterstützt ist und sich mit dem anderen Endpunkte B gegen eine schräge Wand BC anlehnt, so lassen sich die Kräfte, mit welchen er in diesen Punkten gegen seine Unterstützungen drückt, wie folgt bestimmen. Da wir von der Reibung absehen wollen, so ist die Kraft P, mit welcher er gegen die Ebene BC drückt, rechtwinkelig gegen BC gerichtet anzunehmen. Ist nun G das Gewicht des Körpers AB sammt seiner Belastung und K der Schwerpunkt desselben, so kann man dasselbe in dem Durchschnitte D der verticalen Schwerlinie DE mit der Normalen DB zu BC angreifen las- §. 51.

ſen und hier in zwei Seitenkräfte P und R zerlegen, wovon P die von BC aufzunehmende Normalkraft und R eine nach dem Stützpunkte A gerichtete und von dieſem Punkte aufzunehmende Seitenkraft iſt. Um die Kraft P zu finden, denken wir uns G und P als die Kräfte eines Winkelhebels mit dem Stützpunkte A und den gegen DK und DB winkelrecht gelegten Hebelarmen AE und AF. Da die Momente $G \cdot \overline{AE}$ und $P \cdot \overline{AF}$ dieſer Kräfte einander gleich ſind, ſo erhalten wir folgenden Ausdruck für die geſuchte Seitenkraft, mit welcher der Hebel in B gegen die Unterſtützungsebene drückt:

Fig. 84.



$$P = \frac{G \cdot \overline{AE}}{AF}.$$

Iſt noch l die Länge AB des Körpers, s der Abſtand AK ſeines Schwerpunktes K vom Stützpunkte A, in der Axenrichtung des Körpers gemeſſen, ferner α der Neigungswinkel BAO des Körpers AB und β der Neigungswinkel BCO der Stützebene BC gegen den Horizont AO, ſo hat man:

$$AE = AK \cos. BAO = s \cos. \alpha \text{ und}$$
$$AF = AB \cos. BAF = AB \cos. ABC = l \cos. (\beta - \alpha),$$

und daher die geſuchte Kraft:

$$\text{I.)} \quad P = \frac{Gs \cos. \alpha}{l \cos. (\beta - \alpha)}.$$

Der horizontale Component dieſer Kraft iſt:

$$H = P \sin. GDP = P \sin. BCO = P \sin. \beta, \text{ d. i.}$$
$$H = \frac{Gs \cos. \alpha \sin. \beta}{l \cos. (\beta - \alpha)},$$

und dagegen der verticale Component:

$$V = P \cos. BCO = P \cos. \beta, \text{ d. i.}$$
$$V = \frac{Gs \cos. \alpha \cos. \beta}{l \cos. (\beta - \alpha)} = H \operatorname{cotang}. \beta.$$

Für den Druck R im Stützpunkte A hat man den horizontalen Componenten ebenfalls:

$$H = \frac{G s \cos.\alpha \sin.\beta}{l \cos.(\beta - \alpha)};$$

dagegen iſt der verticale Component:

$$V_1 = G - V = G\left(1 - \frac{s \cos.\alpha \cos.\beta}{l \cos.(\beta - \alpha)}\right) = G - H \operatorname{cotang.}\beta.$$

Dieſer Druck ſelbſt iſt:

II.) $R = \sqrt{H^2 + V_1^2} = \sqrt{H^2 + (G - H \operatorname{cotang.}\beta)^2}$,

und für den Neigungswinkel $DAC = \delta$ ſeiner Richtung gegen den Horizont iſt:

$$\operatorname{tang.}\delta = \frac{V_1}{H} = \frac{G}{H} - \operatorname{cotang.}\beta = \frac{l}{s}\frac{\cos.(\beta - \alpha)}{\cos.\alpha \sin.\beta} - \operatorname{cotang.}\beta.$$

Wenn ſich der Körper AB, Fig. 85, in B an eine verticale Wand

Fig. 85.

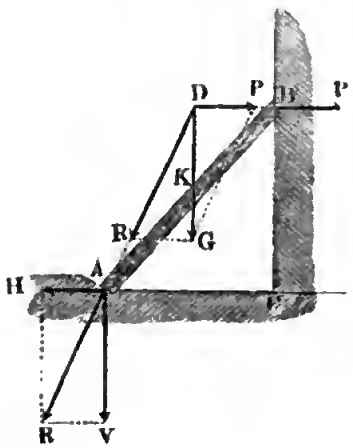
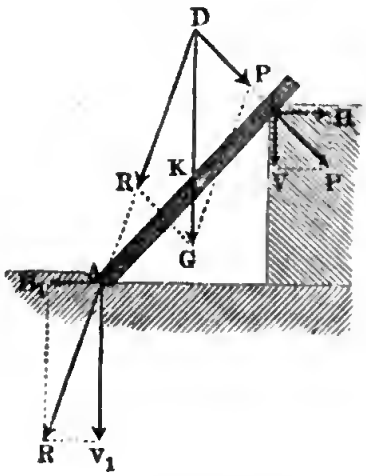


Fig. 86.



BC anlehnt, ſo iſt $\beta = 90^0$, und daher:

$$P = H = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.(90 - \alpha)} = \frac{G s \cos.\alpha}{l \sin.\alpha} = \frac{G s}{l} \operatorname{cotang.}\alpha,$$

ferner:

$$V = P \cos.\beta = P \cos. 90^0 = 0, \text{ wogegen:}$$
$$V_1 = G - V = G,$$

folglich:

$$R = \sqrt{\left(G \frac{s}{l} \operatorname{cotang.}\alpha\right)^2 + G^2} = G\sqrt{\left(\frac{s}{l}\operatorname{cotang.}\alpha\right)^2 + 1} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang.}\delta = \frac{l}{s} \operatorname{tang.}\alpha$$

ſich herausſtellen.

Fällt die Neigung β der Ebene BC, Fig. 86, mit der des Balkens AB zuſammen, iſt alſo $\beta = \alpha$, ſo iſt:

$$P = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos. 0} = G \frac{s}{l} \cos.\alpha,$$

$$H = G \frac{s}{l} \sin.\alpha \cos.\alpha = {}^1/_2 G \frac{s}{l} \sin. 2\alpha,$$

$$V = G \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2,$$

$$V_1 = G \left(1 - \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2\right), \text{ daher:}$$

$$R = G \sqrt{\left(\frac{s}{l} \sin.\alpha \cos.\alpha\right)^2 + \left(1 - \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2\right)^2} \text{ und}$$

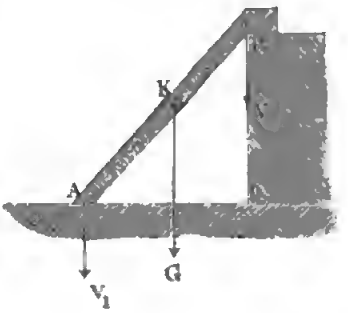
$$\tang.\delta = \frac{2l}{s \sin. 2\alpha} - \cotang.\alpha.$$

Liegt dagegen das zu diesem Zwecke besonders geformte Ende B des Balkens AB, Fig. 87, auf einer **horizontalen Ebene**, ist also $\beta = 0^0$, so hat man:

$$P = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.(0 - \alpha)} = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.\alpha} = G \frac{s}{l},$$

ferner:

Fig. 87.



$$H = P \sin.\beta = 0,$$

$$V = P \cos.\beta = P = G \frac{s}{l},$$

$$V_1 = G - V = G \left(1 - \frac{s}{l}\right),$$

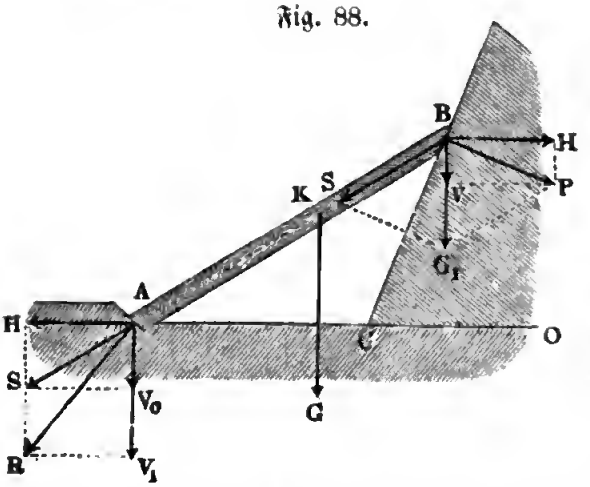
ferner

$$R = V_1 = G \left(1 - \frac{s}{l}\right) \text{ und}$$

$$\tang.\delta = \infty, \text{ also}$$

$$\delta = 90^0.$$

Fig. 88.



Anmerkung. Man kann die Bedingungen des Gleichgewichtes eines unterstützten Sparrens oder anderen Holzkörpers auch leicht dadurch finden, daß man sich das Gewicht G, Fig. 88, desselben vom Schwerpunkte K weg, und auf die beiden End- oder Stützpunkte verlegt denkt. Es ist dann der Theil des Gewichtes G, welcher in B niederzieht:

$$G_1 = G \frac{AK}{AB} = \frac{Gs}{l},$$

und der andere Theil desselben, welcher in A wirksam ist:

$$G_2 = G - G_1 = G\left(1 - \frac{s}{l}\right).$$

Das Gewicht G_1 läßt sich in die Seitenkraft P, welche rechtwinkelig gegen die Stützebene BC wirkt, und in die Seitenkraft S, welche in der Axe des Sparrens wirkt, und daher die Spannung des letzteren ausdrückt, zerlegen, und es ist:

$$\frac{P}{G_1} = \frac{sin.\, B\, G_1\, P}{sin.\, B\, P\, G_1} = \frac{sin.\,(90^0 - \alpha)}{sin.\,(\alpha + 90^0 - \beta)} = \frac{cos.\,\alpha}{cos.\,(\beta - \alpha)}, \text{ daher}$$

$$P = \frac{G_1\ cos.\,\alpha}{cos.\,(\beta - \alpha)} = \frac{G\,s\ cos.\,\alpha}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)}, \text{ und}$$

$$H = P\ sin.\,\beta = \frac{G\,s\ cos.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)}, \text{ sowie:}$$

$$V = P\ cos.\,\beta = \frac{G\,s\ cos.\,\alpha\ cos.\,\beta}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)}.$$

Für die Spannung S ist:

$$\frac{S}{G_1} = \frac{sin.\, P\, B\, G_1}{sin.\, B\, P\, G_1} = \frac{sin.\,\beta}{cos.\,(\beta - \alpha)}, \text{ folglich:}$$

$$S = \frac{G_1\ sin.\,\beta}{cos.\,(\beta - \alpha)} = \frac{G\,s\ sin.\,\beta}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)},$$

deren Componenten

$$H = S\ cos.\,\alpha = \frac{G\,s\ cos.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)} \text{ und}$$

$$V_0 = S\ sin.\,\alpha = \frac{G\,s\ sin.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.\,(\beta - \alpha)} \text{ sind.}$$

Vereinigt man die letztere Kraft mit dem Gewichtstheile $G_2 = G - \frac{s}{l}\,G$, durch Addition, so erhält man ebenfalls, wie oben, den gesammten Verticaldruck im Stützpunkte A:

$$V_1 = G - \frac{s}{l}\,G + V_0 = G\left[1 - \frac{s}{l}\left(1 - \frac{sin.\,\alpha\ sin.\,\beta}{cos.\,(\beta - \alpha)}\right)\right]$$

$$= G\left(1 - \frac{s}{l} \cdot \frac{cos.\,\alpha\ cos.\,\beta}{cos.\,(\beta - \alpha)}\right).$$

Sparrenschub. Die im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln finden nun ihre Anwendung bei der Theorie der Dach- oder Sparrenconstructionen. Es ist hiernach bei den Dächern ohne Säule, Fig. 89 u. Fig. 90, der horizontale Sparrenschub sowohl im unteren als im oberen Ende: §. 52

Fig. 89.

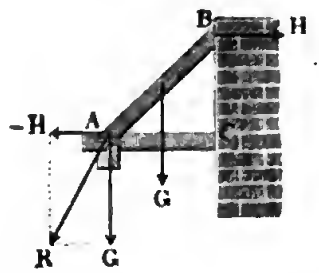
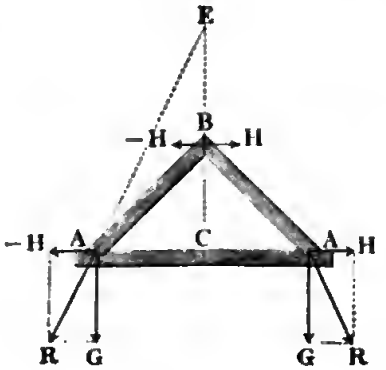


Fig. 90.



$$H = \frac{G\,s}{l}\ \mathit{cotang.}\,\alpha,$$

oder, da hier $s = {}^1/_2\,l$ geſetzt werden kann:

$$H = {}^1/_2\,G\ \mathit{cotang.}\,\alpha;$$

ferner der Verticaldruck im oberen Ende, = Null, und im unteren, gleich dem Gewichte G des belaſteten Sparrens. Setzt man die Dachhöhe $BC = h$ und die (halbe) Breite $AC = b$, ſo hat man $\mathit{cotang.}\,\alpha = \frac{b}{h}$, daher den Sparrenſchub:

$$H = {}^1/_2\,G\,\frac{b}{h}.$$

Es wächſt alſo der (horizontale) Sparrenſchub direct wie die Breite oder Tiefe des Hauſes und umgekehrt wie die Dachhöhe. Gewöhnlich liegt h zwiſchen den Grenzen $2\,b$ und ${}^1/_2\,b$. Erſteres Verhältniß findet bei den hohen Kirchdächern, letzteres bei den flachen italieniſchen Hausdächern ſtatt; dort iſt $\alpha = 63^0\,26'$, hier aber $\alpha = 26^0\,34'$. Der Sparrenſchub iſt bei flachen Dächern ſehr groß, er iſt z. B. für die letzte Sparrenlage gleich der ganzen, dagegen bei der erſten Sparrenneigung nur ein Viertel der Belaſtung des Sparrens. Um den, zumal bei flachen Dächern Gefahr drohenden Sparrenſchub aufzuheben, werden die Sparrenfüße in die Balkenenden eingezapft, oder wohl auch noch durch andere Mittel, z. B. durch beſondere Sparrenſchuhe, vor dem Ausgleiten geſchützt.

Der vollſtändige Druck des Sparrens in ſeinem Fußpunkte A iſt:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{1 + {}^1/_4\,(\mathit{cotang.}\,\alpha)^2}\,.\,G = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2}\,.\,G,$$

und für den Winkel $RAH = \delta$, welchen die Drucklinie mit dem Horizonte einſchließt, hat man:

$$\mathit{tang.}\,\delta = \frac{G}{H} = \frac{G}{{}^1/_2\,G\,\frac{b}{h}} = \frac{2h}{b} = 2\,\mathit{tang.}\,\alpha.$$

Man findet alſo hiernach die Richtung des ganzen Sparrenſchubes im Fußpunkte, wenn man die Sparrenhöhe CB verdoppelt (Fig. 90), alſo $CE = 2\,.\,CB$ macht, und eine Linie ER durch den Fußpunkt A und durch den Endpunkt E der Verlängerung zieht.

Beiſpiel. Das Dach ABA, Fig. 90, iſt 40 Fuß tief und 30 Fuß hoch und beſteht aus je 4 Fuß von einander abſtehenden Sparren von 6 Zoll Breite und 8 Zoll Höhe; man ſucht den Sparrenſchub. Nimmt man an, daß jeder Quadratfuß Bedachung 15 Pfund wiegt, ſo erhält man für die Belaſtung eines Sparrens:

$$= 15\,.\,4\,\sqrt{20^2 + 30^2} = 600\,.\,\sqrt{13} = 2163\ \text{Pfund};$$

nun wiegt aber der Sparren ſelbſt, wenn man das Gewicht eines Cubikfußes Holz $= {}^2/_3\,.\,61{,}75 = 41{,}17$ Pfund annimmt:

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 41{,}17 \sqrt{20^2 + 30^2} = \frac{41{,}17}{3} \sqrt{13} = 494{,}8$ Pfund,

es folgt daher der Verticaldruck eines Sparrens

$$V = G = 2163 + 494{,}8 = 2657{,}8 \text{ Pfund},$$

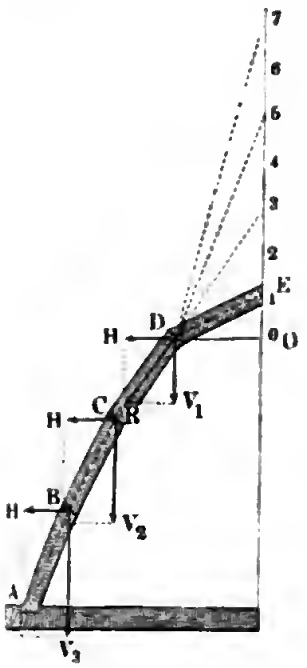
und der Horizontalschub

$$H = \frac{1}{2} G \frac{b}{h} = \frac{1}{2} \cdot 2692 \cdot \frac{20}{30} = 897 \text{ Pfund}.$$

§. 53

Bei manchen Constructionen, zumal bei den sogenannten Mansard-dächern ruht der Sparren DE, Fig. 91, nicht auf einem Balken oder Bundtramen, sondern auf einem zweiten Sparren CD, dieser nach Befinden, wieder auf einem dritten BC u. s. w. Damit nun in diesem Falle die Kraft von einem Sparren auf den anderen vollkommen übertragen werde, ist es nöthig, daß diese Balken gewisse Stellungen gegen einander einnehmen.

Fig. 91.



Diese Stellungen lassen sich mit Hülfe der obigen Theorie wie folgt ermitteln.

Ist G das Gewicht und α der Neigungswinkel EDO des ersten Sparrens, so hat man die Horizontalspannung desselben

$$H = \frac{1}{2} G \,.\, cotang.\, \alpha.$$

und den Verticaldruck desselben in E:

$$V = \frac{1}{2} G.$$

Da sich nun aber in D zu V noch die Hälften der Gewichte beider Sparren DE und CD gesellen, so ist, wenn G_1 das Gewicht und α_1 den Neigungswinkel des Sparrens CD bezeichnen, der Verticaldruck in D:

$$V_1 = V + \frac{G + G_1}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2},$$

und daher für den Neigungswinkel α_1 der Richtung der Mittelkraft R aus H und V_1, welche zugleich die erforderliche Neigung des Sparrens CD ist:

$$tang.\, \alpha_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{G}{2H} + \frac{G + G_1}{2H} = tang.\, \alpha + \frac{\frac{1}{2}(G + G_1)}{H}.$$

Denkt man sich wieder die Componenten H und V_1 im Eckpunkte C angreifend und zu V_1 die halbe Summe $\frac{G_1 + G_2}{2}$ der Gewichte G_1 und G_2 der Sparren CD und BC addirt, so erhält man für diesen Punkt die Horizontalkraft wieder $= H$, und dagegen die Verticalkraft:

$$V_2 = V_1 + \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2} + \frac{G_1 + G_2}{2},$$

und daher für den Neigungswinkel α_2 des folgenden Sparrens BC:

$$tang.\ \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = tang.\ \alpha + \frac{{}^1/_2(G + G_1) + {}^1/_2(G_1 + G_2)}{H}.$$

Ebenso folgt für den Eckpunkt B die Horizontalkraft $= H$ und die Verticalkraft:

$$V_3 = V_2 + \frac{G_2 + G_3}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2} + \frac{G_1 + G_2}{2} + \frac{G_2 + G_3}{2},$$

und daher die Tangente des Neigungswinkels α_3 für den Sparren AB:

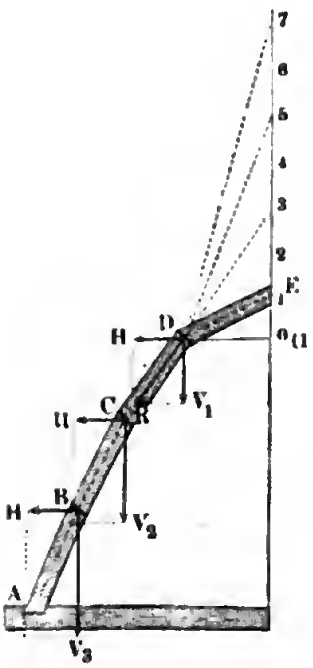
$$tg.\ \alpha_3 = \frac{V_3}{H} = tg.\ \alpha + \frac{{}^1/_2(G + G_1) + {}^1/_2(G_1 + G_2) + {}^1/_2(G_2 + G_3)}{H},$$

u. s. w.

Haben die sämmtlichen Sparren einerlei Gewicht G, so ist
$tang.\ \alpha_1 = 3\ tang.\ \alpha$, $tang.\ \alpha_2 = 5\ tang.\ \alpha$, $tang.\ \alpha_3 = 7\ tang.\ \alpha$,
$tang.\ \alpha_4 = 9\ tang.\ \alpha$ u. s. w.

Wenn man daher in diesem Falle die Dachhöhe EO, Fig. 92, welche dem ersten Sparren DE entspricht, wiederholt nach obenzu aufträgt, und durch die Theilpunkte 1, 3, 5, 7 u. s. w. Linien $D1$, $D3$, $D5$, $D7$ u. s. w. zieht, so geben diese die Neigungen der Sparren DE, CD, BC, AB u. s. w. an. Man sieht übrigens sogleich ein, daß die Gestalt dieser Sparrenverbindung mit einem den Gewichten G_1, G_2, G_3 u. s. w. entsprechenden Seilpolygone vollkommen übereinstimmt (vergl. Band I., §. 154), und es ist diese Uebereinstimmung auch vollkommen erklärlich, wenn man sich die beiden Hälften von dem Gewichte G eines jeden Sparrens in den End- oder Eckpunkten D, C, B, A u. s. w. niederziehend denkt, also annimmt, daß in jedem dieser Punkte das Gewicht G wirkt.

Fig. 92.



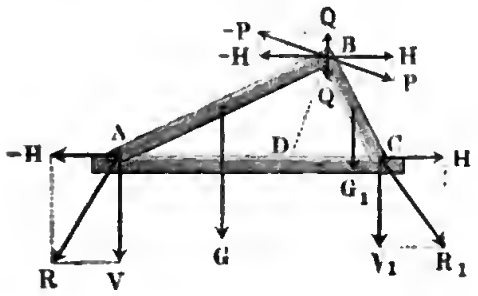
Denkt man sich die Sparren sehr kurz und in sehr großer Anzahl vorhanden, so erhält man in der Axe dieser Construction eine Kettenlinie.

Die hier nachgewiesene Unveränderlichkeit des Horizontalschubes H längs einer ganzen Sparrenverbindung haben wir auch schon im zweiten Capitel (§. 20) bei den Gewölben gefunden, als wir die Reibung zwischen den Gewölbsteinen außer Acht ließen.

Bei dem Dachgespärre in Fig. 90 mit gleichlangen Sparren wirken die Sparren im Scheitel B nur durch den Horizontalschub auf einander; sind aber die Sparren von ungleicher Länge, wie in Fig. 93, so weicht die Kraft P, womit ein Sparren gegen den anderen drückt, von der Horizontallinie um einen gewissen Winkel ab. Es sei G das Gewicht des einen Sparrens AB, G_1 das Gewicht des anderen Sparrens CB, es seien ferner α und α_1 die Neigungswinkel BAC und BCA dieser Sparren gegen den Horizont und es bezeichne β den Neigungswinkel HBP der Kräfte P, $-P$, womit diese Sparren in B gegen einander drücken. Denken wir uns diese Kräfte in ihre horizontalen und verticalen Componenten H, $-H$, und Q, $-Q$ zerlegt, und setzen wir wieder voraus, daß die halben Sparrengewichte $\frac{1}{2}G$ und $\frac{1}{2}G_1$ in den Endpunkten B, B von AB und CB angreifen. Dann läßt sich die ganze Verticalkraft des Balkenendes B von AB:

§. 54

Fig. 93.



$$H\ tang.\alpha = \tfrac{1}{2}G - Q,$$

und dagegen die ganze Verticalkraft des Balkenendes B von CB:

$$H\ tang.\alpha_1 = \tfrac{1}{2}G_1 + Q$$

setzen, so daß sich nun durch Addition dieser Ausdrücke

$$H\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1) = \tfrac{1}{2}(G + G_1),$$

also der Horizontalschub:

$$H = \frac{\tfrac{1}{2}(G + G_1)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

ergiebt, woraus wieder der verticale Component:

$$Q = \tfrac{1}{2}G - H\ tang.\alpha = \tfrac{1}{2}\,\frac{(G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

folgt.

Der Neigungswinkel β ist bestimmt durch den Ausdruck

$$tang.\beta = \frac{Q}{H} = \frac{G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha}{G + G_1}.$$

Damit sich die Kräfte P und $-P$ das Gleichgewicht halten, ist nöthig, daß die Ebene, in welcher sich die beiden Sparrenenden in B berühren, rechtwinkelig auf der Richtung dieser Kräfte steht, daß also der Neigungswinkel dieser Ebene:

$$\angle\ BDC = \beta_1 = 90^0 - \beta \text{ ist.}$$

Die Sparrenschübe an den Sparrenfüßen sind die Mittelkräfte R und R_1

aus den unveränderlichen Horizontalſchuben H und $-H$, und aus den Verticalkräften:

$$V = G - Q = G - {}^1/_2 \frac{(G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

und

$$V_1 = G_1 + Q = G_1 + {}^1{}_2 \frac{(G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}.$$

Die Neigungen δ und δ_1 derſelben gegen den Horizont laſſen ſich durch die Ausdrücke:

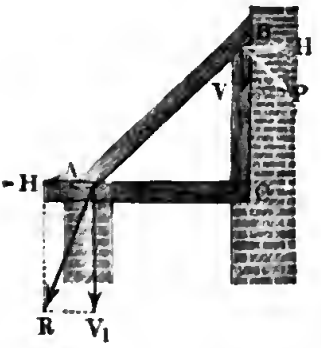
$$tang.\,\delta = \frac{V}{H} = \frac{(2\,G + G_1)\ tang.\alpha + G\ tang.\alpha_1}{2\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)}$$

und $tang.\,\delta_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{G_1\ tang.\alpha + (2\,G_1 + G)\ tang.\alpha_1}{2\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)}$

beſtimmen.

§. 55 **Geſtützte Sparren.** Ruht der Sparrenkopf B, Fig. 94, auf einer Säule $B\,C$, ſo fällt der Sparrenſchub kleiner aus, als wenn er ſich an eine verticale Wand oder Säule anlehnt. Es iſt hier nach §. 51 der Druck gegen den Kopf dieſer Säule:

Fig. 94.



$$P = G\,\frac{s}{l}\,cos.\,\alpha = {}^1/_2\,G\,cos.\,\alpha,$$

und der Horizontalſchub:

$$H = P\,sin.\,\alpha = {}^1/_2\,G\,cos.\,\alpha\,sin.\,\alpha$$
$$= {}^1/_4\,G\,sin.\,2\,\alpha.$$

Da die Säule von dem Gewichte G den Theil

$$V = P\,cos.\,\alpha = {}^1/_2\,G\,(cos.\,\alpha)^2$$

trägt, ſo drückt allerdings der Balken nicht mit ſeinem ganzen Gewichte G, ſondern nur mit der Kraft:

$$V_1 = G - {}^1/_2\,G\,(cos.\,\alpha)^2 = G\,[1 - {}^1/_2\,(cos.\,\alpha)^2]$$
$$= {}^1/_2\,G\,[1 + (sin.\,\alpha)^2]$$

im Fuß A vertical abwärts. Aus dieſer Verticalkraft und aus dem Horizontalſchube H folgt nun für den Winkel δ, welchen die Mittelkraft R mit dem Horizonte einſchließt:

$$tang.\,\delta = \frac{H}{V_1} = {}^1/_2 \cdot \frac{sin.\,2\,\alpha}{1 + (sin.\,\alpha)^2}.$$

Führen wir die Tiefe $A\,C = b$ und die Höhe $B\,C = h$ ein, ſo erhalten wir:

$$H = \frac{b\,h}{b^2 + h^2} \cdot \frac{G}{2},$$

während wir beim Anlehnen des Sparrens, $H = \frac{b}{h} \cdot \frac{G}{2}$ gefunden haben.

Trägt jede Längeneinheit des Sparrens das Gewicht q, so hat man:

$$G = \sqrt{b^2 + h^2} \cdot q$$

zu setzen, weshalb für den einen Fall:

$$H = \frac{bh}{2\sqrt{b^2 + h^2}} \cdot q$$

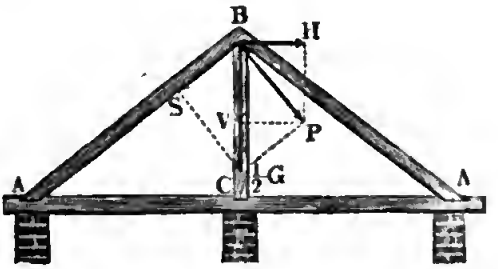
und für den anderen:

$$H = \frac{b\sqrt{b^2 + h^2}}{2h} \cdot q$$

folgt, und nun zu ersehen ist, daß bei dem Sparren mit Säule der Horizontalschub um so kleiner und dagegen bei Sparren ohne Säule, derselbe um so größer ausfällt, je niedriger das Dach oder Gespärre ist.

Damit die Säule BC von der Horizontalkraft H nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von hinten, z. B. durch eine Mauer, noch besonders zu unterstützen.

Fig. 95.



Dieselben Kraftverhältnisse kommen übrigens auch bei dem Lehrgespärre ABA, Figur 95, vor, wo zwei gegen einander gestellte Sparren durch eine Säule gemeinschaftlich unterstützt sind. Es nimmt auch hier die Säule die Normalkräfte P und $P = \frac{G}{2} \cos. \alpha$ auf, aus welchen die Verticalkraft:

$$V = 2 P \cos. \alpha = G (\cos. \alpha)^2$$

resultirt, während in den Sparren die Schube S und $S = \frac{G}{2} \sin. \alpha$ zurückbleiben, aus welchen wieder die Horizontalschube

$$H \text{ und } H = S \cos. \alpha = \frac{G}{2} \sin. \alpha \cos. \alpha = \frac{G}{4} \sin. 2\alpha$$

hervorgehen.

Uebrigens braucht hier die Säule keine Seitenunterstützung, weil sich die Horizontalkräfte im Scheitel aufheben.

Beispiel. Bei dem Dache im Beispiele zu §. 52 war die Belastung eines Sparrens: $G = 2657{,}8$ Pfund, $b = 20$ und $h = 30$ Fuß, also $tang. \alpha = 3/2$, $\alpha = 56^0\,18'\,36''$; es ist daher bei Anwendung einer Säule, der Horizontalschub:

$H = {}^{2657{,}8}/_{4} \sin. 112^0\,37'\,12'' = 664{,}4 \sin. 67^0\,22'\,48'' = 613{,}3$ Pfund,

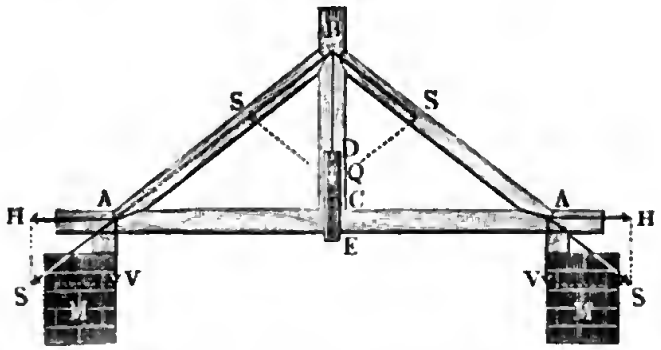
und der Verticaldruck, welchen die Säule aufnimmt:

$V = {}^{2657{,}8}/_{2} (\cos. 56^0\,18'\,36'')^2 = 408{,}9$ Pfund.

Es trägt daher der Balken nur die Last $2657{,}8 - 408{,}9 = 2248{,}9$ Pfund.

§. 56 **Hängewerke.** Während in dem seither betrachteten Falle die Standsäule oder Stütze BC einen Theil des Sparrendruckes in sich aufnimmt und auf ihre eigene Unterstützung überträgt, wirkt die Hängesäule BC, Fig. 96, auf umgekehrte Weise; sie nimmt nämlich einen Theil der Belastung eines Balkens AA oder Tramens auf und trägt denselben vermittels der Sparren oder Streben AB und AB auf die Seitenmauern M und M über. Die Kraft Q, welche die Hängesäule mittels des Hängeeisens DE aufnimmt, ergiebt sich aus der Größe und Art der Belastung des Balkens AA. Ist die Last auf den Balken gleichmäßig vertheilt, so läßt sich annehmen, daß drei Achtel der Last von den Umfangsmauern unmittelbar, und die übrigen fünf Achtel von der Hängesäule aufgenommen werden; ist sie aber in der Mitte oder über dem Unterzugbalken concentrirt, so hat man auch anzunehmen, daß sie vollständig von der Hängesäule getragen werde. Die Kraft Q in der Hängesäule zerlegt sich in zwei nach den Sparrenrichtungen wirkende Seitenkräfte, wovon jede den Werth:

Fig. 96.



$$S = \frac{Q}{2\ sin.\ \alpha}$$

hat, und giebt den Horizontalschub:

$$H = S\ cos.\ \alpha = \frac{Q}{2}\ cotang.\ \alpha,$$

sowie den Verticalschub:

$$V = S\ sin.\ \alpha = \frac{Q}{2}.$$

Mit Berücksichtigung der Sparrengewichte G, G erhält man:

$$S = \frac{Q + G}{2\ sin.\ \alpha}, \text{ daher:}$$

$$H = \left(\frac{Q + G}{2}\right) cotang.\ \alpha, \text{ sowie:}$$

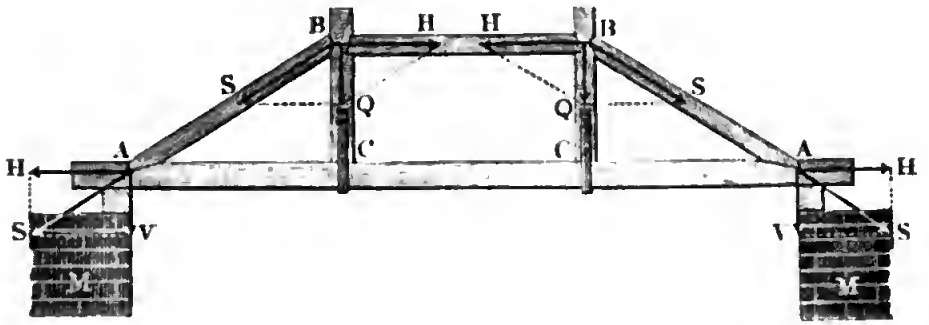
$$V = \frac{Q + G}{2},$$

und folglich die Verticalkraft im Stützpunkt A:

$$V_1 = V + \frac{G}{2} = {}^1/_2\, Q + G.$$

Bei langen Brücken und tiefen Gebäuden kommen zusammengesetzte Hängewerke mit zwei oder mehreren Hängesäulen vor. Fig. 97 repräsen-

Fig. 97.



tirt ein solches Hängewerk mit zwei Hängesäulen $B\,C$ und $B\,C$, und einem zwischen beiden befindlichen Spannriegel $B\,B$. Die Berechnung dieser Construction ist übrigens vollkommen in Uebereinstimmung mit der des einfachen Hängewerkes. Aus der Belastung Q einer Hängesäule folgt die Horizontalkraft im Spannriegel und in den Balkenenden A und A, $H = Q\ cotang.\ \alpha$, wenn α die Neigung der Streben $A\,B$ und $A\,B$ gegen den Horizont bezeichnet. Da dieser Winkel oft ziemlich klein ist, so hat man es dann mit einem bedeutenden Horizontalschube zu thun und daher Sorge zu tragen, daß den Streben an den Fußpunkten ein hinreichender Widerstand entgegengesetzt werde (vergl. §. 52). Uebrigens hat man den Streben und Spannriegeln Stärken zu geben, welche ein Biegen oder Zerbrechen derselben durch die Kräfte:

$$S = \frac{Q}{sin.\ \alpha} \text{ und } H = Q\ cotang.\ \alpha$$

nicht zulassen, und nach der Lehre von der rückwirkenden Festigkeit (Band I., §. 268 und 269) zu berechnen sind.

Die Kraft Q ist von der Belastung der Brücke abhängig. Ist die Last gleichförmig auf der Brücke vertheilt, so rechnen wir ziemlich sicher, wenn wir annehmen, jede Hängesäule trägt drei Achtel, und jede der beiden Seitenmauern ein Achtel der Belastung (s. §. 43).

Beispiel. Wenn das doppelte Hängewerk in Fig. 97 eine 60 Fuß lange und 12 Fuß breite Brücke zu tragen bestimmt ist, und angenommen wird, daß jeder Quadratfuß dieser Brücke sammt Belastung 50 Pfund wiegt, so ergiebt sich das Gewicht der Brücke

$$= 60 . 12 . 50 = 36000 \text{ Pfund},$$

und die Belastung der Hängesäulen

$Q = {}^3/_8 . 36000 = 13500$;

daher bei $22^1/_2{}^0$ Neigung der Streben, der Horizontalſchub

$H = 13500\ cotang\ 22^1/_2{}^0 = 13500 . 2{,}4142 = 32592$ Pfund,

und der Schub in einer Strebe

$$S = \frac{13500}{sin.\ 22^1/_2{}^0} = 35277 \text{ Pfund.}$$

Jedenfalls vertheilen ſich dieſe Spannungen auf zwei Riegel und auf zwei Streben, die ſich auf beiden Seiten der Brücke befinden; es iſt alſo die von einem Spannriegel aufzunehmende Kraft 16296 Pfund, und die von einer Strebe 17638 Pfund. Nehmen wir nun (nach Band I, §. 212) den Feſtigkeitsmodul des Holzes = 6500 Pfund an und geben wir zwanzigfache Sicherheit, ſo erhalten wir für den nöthigen Querſchnitt eines Spannriegels:

$$F = \frac{16296 . 20}{6500} = \frac{3259{,}2}{65} = 50 \text{ Quadratzoll,}$$

und für eine Strebe:

$$F_1 = \frac{17638 . 20}{6500} = \frac{3527{,}7}{65} = 54{,}3 \text{ Quadratzoll.}$$

Zuſammengeſetztere Hängewerke, wie die Figuren 98 und 99 vor Augen führen, laſſen ſich leicht nach dem Obigen berechnen. In beiden Fällen läßt ſich nach §. 43 annehmen, daß jede der äußeren Hängeſäulen B, B, neun, und jede der inneren Säulen C, C, acht Vierzigſtel der ganzen Belaſtung tragen und die übrigen ſechs Vierzigſtel zu gleichen Theilen von den Seitenmauern unmittelbar aufgenommen werden. Bei der letzteren Conſtruction iſt die Neigung der einen Strebe nicht willkürlich, ſondern von der Neigung der anderen abhängig. Iſt Q die Kraft und α die Neigung der Strebe BC, ſowie Q_1 die Kraft und α_1 die Neigung der Strebe AB, ſo hat man die Horizontalſpannung:

Fig. 98.

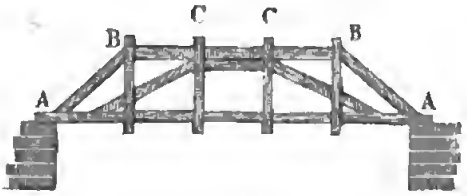
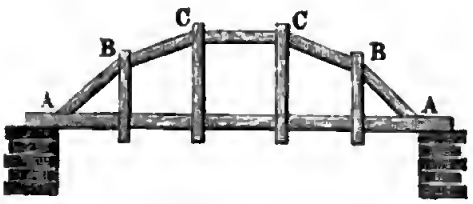


Fig. 99.



$$H = Q . cotang.\ \alpha = (Q + Q_1)\ cotang.\ \alpha_1,$$

daher:

$$tang.\ \alpha_1 = \frac{Q + Q_1}{Q}\ tang.\ \alpha.$$

§. 57 **Sprengwerke.** Während die Hängewerke einen Boden oder eine Brücke von oben unterſtützen, dienen die ſogenannten Sprengwerke dazu, eine Unterſtützung von unten zu bewirken. Die Vertheilung des Druckes erfolgt übrigens bei den Sprengwerken genau ſo wie bei den Hängewerken. Bei dem ein-

fachen Sprengwerk in Fig. 100 ergiebt sich aus der Verticalkraft Q in der Mitte C der Brücke $A\,A$ der Horizontalschub:

$$H = {}^1/_2\, Q\ cotang.\ \alpha$$

und die Spannung der Strebe $B\,C$:

$$S = {}^1/_2\, \frac{Q}{sin.\ \alpha},$$

wenn α die Neigung der Strebe gegen den Horizont bezeichnet.

Fig. 100.

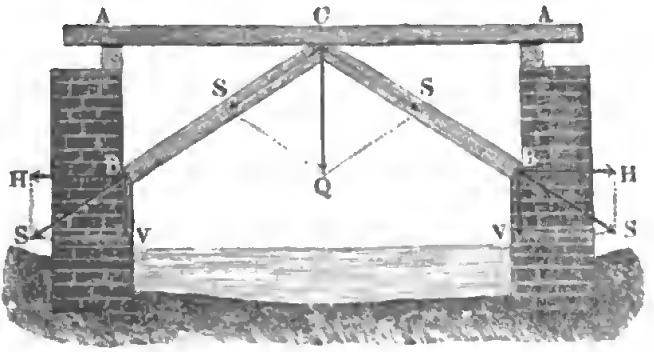
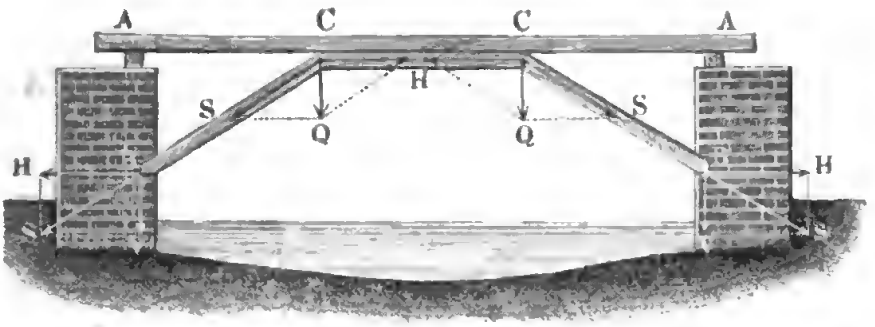


Fig 101.



Bei dem Sprengwerke mit Spannriegel, Fig. 101, sind die Kräfte dieselben, nur läßt sich hier $Q = {}^3/_8$ der ganzen Belastung setzen, während dort für Q, ${}^5/_8$ derselben anzunehmen ist. Ist das Sprengwerk doppelt, wie Fig. 102 vor Augen führt, so hat man vier Streben und es läßt sich nun setzen, daß jede reichlich ein Fünftel der ganzen Belastung G trägt, also

$$Q = {}^1/_5\, G \text{ ist.}$$

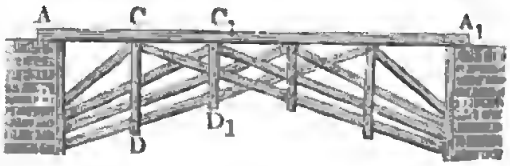
Fig. 102.

Um das Biegen der längeren Streben zu verhüten, bringt man noch sogenannte Zangen $A\,D$ $A\,D$ an, zumal wenn die Zahl der Streben noch größer ist.

Die Vertheilung des Druckes bei einer aus ungleichschenkeligen Spreng-

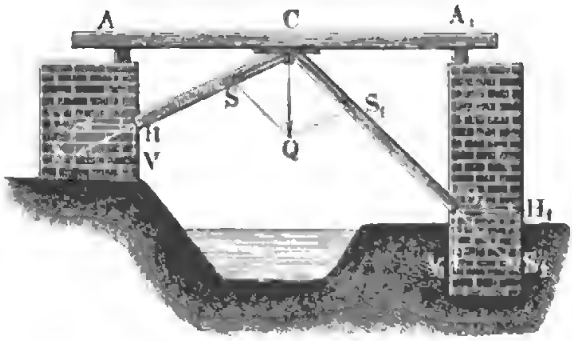
werken bestehenden Construction, Fig. 103, ist genau so wie bei dem Sprengwerke Fig. 102 anzunehmen, nur sind hier die Bänder oder Zangen CD, $C_1 D_1$ ... um so nöthiger, da die Streben zum Theil sehr lang ausfallen. Uebrigens ist es sicherer, wenn man die Gewichte der sämmtlichen Constructionstheile mit in Rechnung zieht, indem man die Hälfte eines jeden Theiles an seinen Enden niederziehend annimmt.

Fig. 103.



Haben je zwei gegen einander gestellte Streben BC und $B_1 C$, Fig. 104, verschiedene Neigungswinkel α und α_1 gegen den Horizont, so lassen sich die aus dem Verticaldrucke Q erwachsenden Spannungen S und S_1 der Streben durch die bekannten Proportionen:

Fig. 104.



$$\frac{S}{Q} = \frac{sin.\, S\,Q\,C}{sin.\, C\,S\,Q}$$

und

$$\frac{S_1}{Q} = \frac{sin.\, S_1\,Q\,C}{sin.\, C\,S_1\,Q}$$

finden; es ist hiernach:

$$S = \frac{Q\ cos.\,\alpha_1}{sin.\,(\alpha + \alpha_1)} \text{ und } S_1 = \frac{Q\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\alpha + \alpha_1)},$$

und die Horizontalspannung beider Streben:

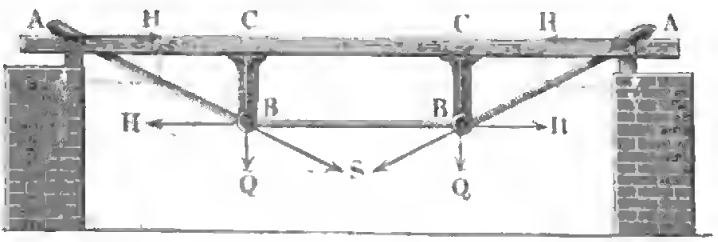
$$H = S\ cos.\,\alpha = S_1\ cos.\,\alpha_1 = \frac{Q\ cos.\,\alpha\ cos.\,\alpha_1}{sin.\,(\alpha + \alpha_1)} = \frac{Q}{tang.\,\alpha + tang.\,\alpha_1}$$

(vergl. §. 54).

§. 58 **Häng- und Sprengwerke.** Bei den im Vorstehenden abgehandelten Häng- und Sprengwerken erfolgt die Uebertragung einer Balkenlast auf die Enden der Balken oder auf die Unterstützungsmauern derselben durch Druck, so daß auch die diesen Druck aufzunehmenden Sparren oder Streben durch ihre Druckfestigkeit widerstehen müssen. Man kann aber auch die umgekehrte Anordnung treffen, nämlich den Druck durch einen Zug ersetzen, wenn man diese Uebertragung einer Kraft statt der hölzernen oder gußeisernen Streben, durch schmiedeeiserne Zugstangen oder Spannschienen ersetzt, welche dann durch ihre absolute Festigkeit widerstehen müssen. Es entstehen dadurch gewissermaßen umgekehrte Häng- und Sprengwerke. In Fig. 105 ist z. B. $ABBA$ ein solches umgekehrtes Hängewerk, welches seiner Stellung nach zu den

Sprengwerken gehört, da es den Balken AA von unten unterſtützt. Iſt auch hier α der Neigungswinkel CAB der Zugſtangen AB, AB gegen

Fig. 105.



den Horizont, und Q die Kraft, mit welcher jede gußeiſerne Säule BC, BC den Balken unterſtützt, ſo hat man die durch Q bewirkte Zugkraft einer ſolchen Zugſtange:

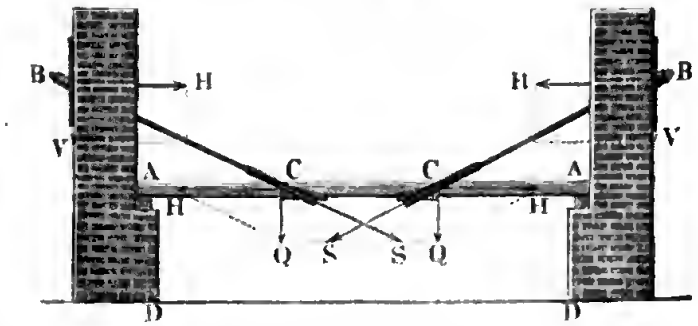
$$S = \frac{Q}{\sin.\alpha},$$

und dagegen die Horizontalkraft, mit welcher die Spannſchiene BB zwiſchen den Säulen BC, BC ausgedehnt, und folglich der Balken ſelbſt comprimirt wird:

$$H = Q\ cotang.\ \alpha.$$

Bei dem Hängewerke $BCCB$, Fig. 106, welches aus zwei einfachen Zugbändern BC, BC beſteht, wodurch der Träger AA in zwei Zwiſchen-

Fig. 106.

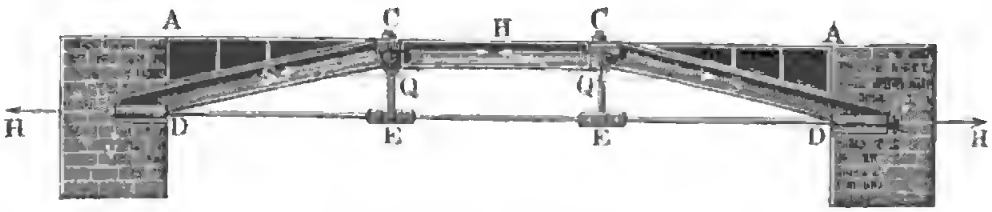


punkten C, C unterſtützt wird, kommen genau dieſelben Kraftzerlegungen vor, wobei das die Spannſchiene erſetzende Balkenſtück CC mit der Kraft $H = Q\ cotang.\ \alpha$ ausgedehnt wird. Der Zug $S = \frac{Q}{\sin.\alpha}$ der Zugbänder iſt aber hier nicht auf die Balkenenden, ſondern auf die Unterſtützungsmauern BD, BD übergetragen, welches allerdings auch bei der erſteren Conſtruction geſchehen kann. In dieſem Falle iſt natürlich die Mauer ſo dick zu machen, daß ſie durch ihr Gewicht ſowohl dem Ausgleiten als dem Kippen widerſtehen kann. Die Wirkungen der Spannkräfte H, H auf einen belaſteten Balken ſind nach Band I., §. 272 u. f. w. zu beurtheilen, und

die Wirkungen dieser Kräfte auf die Unterstützungen sind dieselben wie die eines Gewölbes auf seine Widerlager; es lassen sich folglich auch die Stärken dieser Mauern wie die der Widerlagsmauern bei Gewölben (s. §. 27) ermitteln.

Ein gänzlich eisernes Sprengwerk ist in Fig. 107 abgebildet. Es sind hier BC, BC die beiden gußeisernen Streben, zwischen welchen der

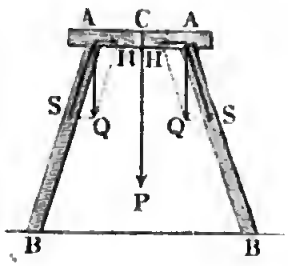
Fig. 107.



gußeiserne Spannriegel CC gespannt ist, und es ist BB eine lange schmiedeeiserne Zugstange, welche den Horizontalschub $H = Q\ cotang.\ \alpha$ in sich aufnimmt, der außerdem von den Widerlagsmauern aufgenommen werden müßte. Die Zugstange geht durch die Muffen BD, BD, welche die Enden der Streben ausmachen, und lassen sich durch die Schraubenmuttern B, B anspannen. Um dem Biegen dieser Stangen durch ihre eigene Schwere entgegenzuwirken, setzt man dieselben aus mehreren Theilen DE, EE, DE zusammen und hängt sie mittels schmiedeeiserner Hängestäbe CE, CE an den Enden des Spannriegels CC auf.

§. 59 **Säulen und Streben.** Da die Tragkraft eines Balkens der Länge desselben umgekehrt proportional ist, so muß man die letztere so viel wie möglich herabzuziehen suchen. Dies kann z. B. geschehen, wenn man den Balken AA, Fig. 108, auf schiefstehende Säulen AB, AB legt. Die

Fig. 108.



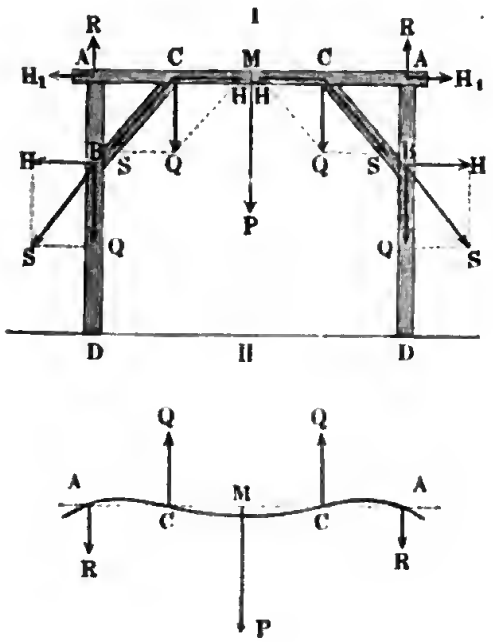
Kraft $Q = \frac{P}{2}$, mit welcher die Last P des ganzen Balkens unmittelbar über einer solchen Säule vertical abwärts wirkt, zerlegt sich in eine Kraft S, welche als Axenschub auf die Säule übergeht, und in einen Horizontalschub, welchen der Balken aufnimmt, indem er von derselben zusammengedrückt wird. Ist α der Neigungswinkel der Säule gegen den Horizont, so folgt wie bei einer Strebe:

$$S = \frac{Q}{sin.\ \alpha} = \frac{P}{2\ sin.\ \alpha} \text{ und } H = Q\ cotang.\ \alpha = \frac{P}{2}\ cotang.\ \alpha.$$

Sind, wie in Fig. 109, I., die beiden Säulen AD, AD zwar vertical, ist aber der Balken außerdem noch durch zwei Streben BC, BC unter-

ſtützt, ſo können wir annehmen, daß die neutrale Axe deſſelben die in Figur 109, II., dargeſtellte Curve $ACMCA$ bilde.

Fig. 109.



Wir können uns hier vorſtellen, daß der Balken AA aus zwei Hälften AM, AM beſtehe, welche in der Mitte M feſtgehalten und durch zwei Kräfte R und Q nach entgegengeſetzten Richtungen gebogen werden. Da hierbei die Angriffspunkte A und C unverändert bleiben, ſo iſt die Bogenhöhe des Balkenſtückes AC, $= 0$, und folglich nach Band I., §. 220, wenn man dort $l_1 = l$, ſowie ſtatt P_1, $— Q$ und ſtatt P, R einſetzt:

$$R + {}^1/_2 (R — Q) + \frac{R}{3} = 0,$$

ſo daß nun ${}^{11}/_6 R = \frac{Q}{2}$, ſowie $Q = {}^{11}/_3 R$ folgt.

Nun iſt aber $P + 2R — 2Q = 0$, daher auch $P + 2R — {}^{22}/_3 R = 0$, und es ergiebt ſich:

$$R = {}^3/_{16} P, \text{ ſowie } Q = {}^{11}/_3 . {}^3/_{16} P = {}^{11}/_{16} P.$$

Es wirkt alſo in jeder Strebe die Kraft ${}^{11}/_{16} P$ abwärts, ſo daß der entſprechende Axenſchub:

$$S = {}^{11}/_{16} \frac{P}{sin.\,\alpha},$$

und die Horizontalſpannung:

$$H = {}^{11}/_{16} P\, cotang.\,\alpha$$

folgt, wofern α den Neigungswinkel einer Strebe gegen den Horizont bezeichnet.

Die Kraft S zerlegt ſich in der Säule AD wieder in eine Verticalkraft

$$Q = {}^{11}/_{16} P,$$

und in die Horizontalkraft:

$$H = {}^{11}/_{16} P\, cotang.\,\alpha.$$

Da die Kraft $R = {}^3/_{16} P$ des Balkens auf die Säule von unten nach oben wirkt, ſo muß natürlich das Balkenende mit dem Säulenkopfe z. B.

durch ein eiſernes Band feſt verbunden werden. Das Stück AB der Säule AD wird hiernach durch die Kraft $R = {}^{3}/_{16}\,P$ ausgedehnt, wogegen das Stück BD deſſelben die Compreſſionskraft $Q - R = \frac{P}{2}$ auszuhalten hat.

Außerdem muß natürlich auch die Säule die Biegungskraft

$$H = {}^{11}/_{16}\,P\,cotang.\,\alpha$$

aushalten.

Iſt noch l die Länge AD der ganzen Säule und l_1 die Länge BD des Säulenſtückes unterhalb der Streben, ſo folgt die Horizontalkraft, mit welcher die Säule auf den Balken wirkt,

$$H_1 = \frac{l_1}{l}\,H = {}^{11}/_{16} \cdot \frac{l_1}{l}\,P\,cotang.\,\alpha.$$

Es wird alſo das Balkenſtück AC durch dieſe Kraft H_1 ausgedehnt, und dagegen das mittlere Balkenſtück CC durch die Kraft

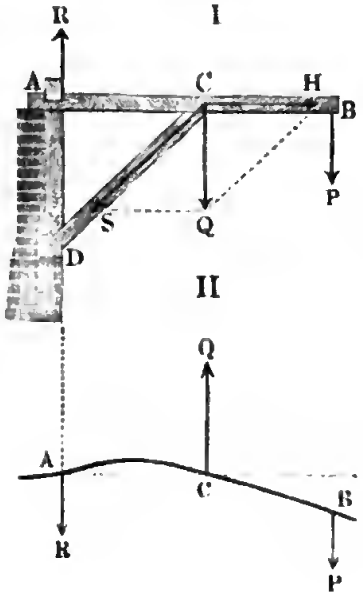
$$H - H_1 = {}^{11}/_{16}\left(\frac{l - l_1}{l}\right) P\,cotang.\,\alpha$$

comprimirt, übrigens aber auch noch durch die in M angreifende Kraft P gebogen. Man hat daher nicht allein die Stärke einer Säule, ſondern auch die des Balkens in Hinſicht auf zuſammengeſetzte Feſtigkeit zu berechnen.

§. 60 **Einſeitig unterſtützte Träger.** Man hat die Balken oder Träger beſonders dann durch Streben und Bänder zu unterſtützen, wenn ſie nur an einem Ende befeſtigt ſind.

Der mit einem Ende A, Fig. 110, von oben unterſtützte Balken AB trage eine am anderen Ende B angreifende Laſt P und ſei darin durch eine Strebe CD unterſtützt. Es ſei l die ganze Länge AB, l_1 die Länge AC des Balkenſtückes zwiſchen den beiden Stützpunkten A und C, und α der Neigungswinkel ACD der Strebe gegen den Horizont. Sehen wir den Stützpunkt A als Drehungspunkt eines Hebels an, deſſen Kräfte P und Q an den Hebelarmen l und l_1 ſich das Gleichgewicht halten, ſo iſt $Ql_1 = Pl$ zu ſetzen, und es folgt der Verticaldruck im Stützpunkte C:

Fig. 110.



$$Q = \frac{l}{l_1}\,P,$$

und dagegen der Druck im Stützpunkte A:

$$R = Q - P = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) P.$$

Der Druck Q zerlegt ſich in die Kraft

$$S = \frac{Q}{\sin.\alpha} = \frac{l\,P}{l_1\,\sin.\alpha},$$

welche die Strebe nach der Mauer führt, und in den Balkenschub:

$$H = Q\,\cotang.\alpha = \frac{l}{l_1}\,P\,\cotang.\alpha,$$

welcher den Balken ausdehnt und aus der Mauer herauszuziehen sucht.

Ist dagegen der Balken am Ende A fest eingemauert, so können wir nach Band I., §. 220, wenn wir dort statt l, $l - l_1$, und statt P_1, Q einführen, da hier die Bogenhöhe a_1 des Balkenstückes AC, Fig. 110, II., Null ist, setzen:

$$^1/_2\,P\,(l - l_1)\,l_1^2 + {}^1/_3\,(P - Q)\,l_1^3 = 0,$$

oder

$$P\,(3\,l - l_1) = 2\,Q\,l_1, \text{ woraus}$$

$$Q = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P, \text{ und}$$

$$R = Q - P = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P - P = 3\left(\frac{l - l_1}{2\,l_1}\right) P \text{ folgt.}$$

Wenn z. B. die Strebe in der Mitte des Balkens angreift, also $l_1 = {}^1/_2\,l$ ist, so ergiebt sich:

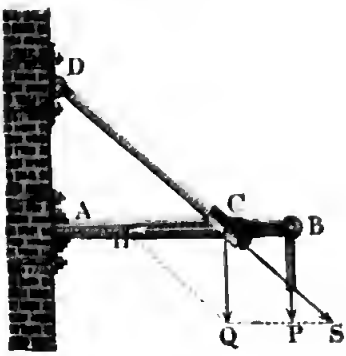
$$Q = {}^5/_2\,P \text{ und } R = {}^3/_2\,P,$$

während sich nach der obigen Voraussetzung

$$Q = \frac{l}{l_1}\,P = 2\,P \text{ und } R = P \text{ setzen läßt.}$$

Ganz auf dieselbe Weise ist auch der Fall zu behandeln, wenn der Balken AB, Fig. 111, durch eine Hängestange CD unterstützt wird. Es ist bei denselben Bezeichnungen auch hier die Spannung der Hängestange:

Fig. 111.



$$S = \frac{Q}{\sin.\alpha} = \frac{l\,P}{l_1\,\sin.\alpha},$$

und die Kraft, mit welcher der Balken zusammengedrückt und gegen die Mauer gepreßt wird:

$$H = Q\,\cotang.\alpha = \frac{l}{l_1}\,P\,\cotang.\alpha.$$

Nach der zweiten Annahme ist:

$$S = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right)\frac{P}{\sin.\alpha}$$

und

$$H = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P\,\cotang.\alpha.$$

Während das Balkenſtück BC der Kraft durch ſeine Biegungsfeſtigkeit der Kraft P widerſtehen muß, hat das Balkenſtück AC die Kraft:

$$R = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) P,$$

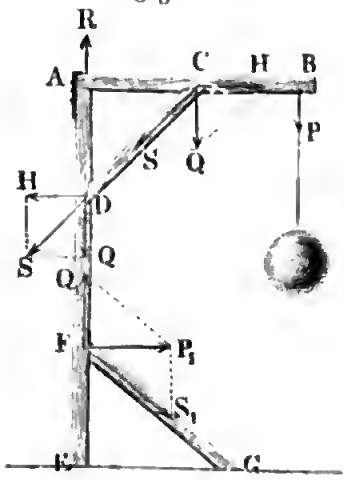
oder, nach der letzteren Annahme, die Kraft:

$$R = \frac{3(l - l_1)}{2 l_1} P,$$

durch ſeine Biegungs- ſowie die Kraft H durch ſeine Druckfeſtigkeit aufzunehmen.

Iſt der Balken AB, Fig. 112, auf dem Kopfe einer Säule AE befeſtigt, ſo hat dieſe in dem Theile AD der Ausdehnungskraft

Fig. 112.



$$R = \frac{l - l_1}{l_1} P$$

und in dem Theile DE der Compreſſionskraft P, in beiden aber überdies noch dem Biegungsmomente Pl zu widerſtehen.

Iſt endlich die Säule am Fuße mit einer Strebe FG ausgerüſtet, ſo nimmt dieſe eine Kraft S_1 auf, welche ſich aus dem Neigungswinkel $EGF = \beta$ und der Höhe $EF = a$ des Angriffspunktes F über der Sohle wie folgt beſtimmen läßt. Dem Umdrehungsmoment Pl der Kraft P in Hinſicht auf E wird durch ein Umdrehungsmoment $P_1 . \overline{EF} = P_1 a$ das Gleichgewicht gehalten; es iſt folglich die Horizontal- oder Normalkraft in F:

$$P_1 = \frac{Pl}{a},$$

und es ſind daher die Componenten derſelben, nach der Axe der Säule und der der Fußſtrebe gerichtet:

$$Q_1 = P_1 \, tang. \beta = \frac{Pl}{a} \, tang. \beta$$

und

$$S_1 = \frac{P_1}{cosin. \beta} = \frac{Pl}{a \, cosin. \beta}.$$

Hiernach wird alſo das Stück EF der Säule entweder durch die Kraft $P - Q_1 = P\left(1 - \frac{l}{a} \, tang. \beta\right)$ comprimirt, oder mit der Kraft $Q_1 - P = P\left(\frac{l}{a} \, tang. \beta - 1\right)$ ausgedehnt, und zwar erſteres, wenn $a \, cotang. \beta > l$ iſt, alſo der Fußpunkt G der Fußſtrebe über dem Auf-

hängepunkte B hinausliegt, und letzteres, wenn $a\ cotang.\ \beta < l$, also $EG < AB$ ist.

Beispiel. Bei einem hölzernen Galgengerüste, Fig. 112, betrage die Last $P = 1500$ Pfund, die Armlänge $AB = l = 12$ Fuß, die Neigung beider Streben $\alpha = \beta = 45^0$, und die Länge einer jeden $8\frac{1}{2}$ Fuß; man sucht die nöthigen Stärken dieser Construction. Die Horizontal- und Verticalprojectionen der Streben sind $l_1 = a = 8{,}5\ sin.\ 45^0 = 6$ Fuß, folglich ist die Spannkraft der Strebe CD:

$$S = \frac{l\,P}{l_1\ sin.\,\alpha} = \frac{12\,.\,1500}{6\ sin.\,45^0} = \frac{3000}{0{,}7071} = 4243 \text{ Pfund};$$

und daher der nöthige Querschnitt, wenn man den Tragmodul $T = 250$ Pfund annimmt:

$$F = \frac{S}{T} = \frac{4243}{250} = 17 \text{ Quadratzoll.}$$

Für den Arm oder Balken haben wir nach Band I., §. 272, wenn wir hier $T = 500$ Pfund annehmen,

$$b\,h = \left(\frac{l}{l_1}\ cotang.\ \alpha + \frac{6\,(l - l_1)}{h}\right)\frac{P}{T} = \left(2 + \frac{6\,.\,72}{h}\right)\cdot\frac{1500}{500},$$

d. i.
$$b\,h = 6 + \frac{1296}{h},$$

und wenn wir die Höhe h der doppelten Breite $2\,b$ des Balkens gleich nehmen:

$$2\,b^2 = 6 + \frac{648}{b} \text{ oder } b^3 - 3\,b = 324, \text{ woraus nun}$$

$b = \sqrt[3]{324 + 3\,b}$, zunächst annähernd $b = 7$, und dann genauer

$b = \sqrt[3]{371 + 21} = \sqrt[3]{345} = 7{,}01$ Zoll, und $h = 14{,}02$ Zoll folgt.

Für die Säule, namentlich für deren Mittelstück DF derselben hat man nach §. 271 des ersten Bandes, wenn man $T = 500$ Pfund annimmt:

$$b_1\,h_1 = \left(1 + \frac{6\,l}{h_1}\right)\frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6\,.\,144}{h_1}\right)\cdot\frac{1500}{500} = 3 + \frac{2592}{h_1},$$

und macht man hier die Dicke oder Dimension h_1 in der Ebene durch den Balken um die Hälfte größer als die Breite b_1, so ist

$$\tfrac{3}{2}\,b_1^2 = 3 + \frac{1728}{b_1} \text{ oder } b_1^3 = 2\,b_1 + 1152,$$

weshalb $b_1 = \sqrt[3]{1152 + 2\,b_1}$, annähernd $= 10{,}5$, dann genauer

$$b_1 = \sqrt[3]{1152 + 21} = \sqrt[3]{1173} = 10{,}55 \text{ Zoll},$$

und daher $h_1 = \tfrac{3}{2}\,b_1 = 15{,}83$ Zoll sich ergiebt.

Für den oberen Theil AD der Säule, welcher statt der Compressionskraft P eine Ausdehnungskraft $R = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right)P$ auszuhalten hat, ist der Querschnitt:

$$b_1\,h_1 = \left(\frac{l - l_1}{l_1} + \frac{6\,l}{h_1}\right)\frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6\,.\,144}{h_1}\right).\,3 = 3 + \frac{2592}{h_1},$$

genau der vorige, und für den Theil EF, welcher die Ausdehnungskraft

$$Q_1 - P = P\left(\frac{l}{a}\ tang.\ \beta - 1\right) = 1500\ (2 - 1) = 1500 \text{ Pfund, und}$$

das Moment $P_1\,a = P\,l$ aufzunehmen hat, ergiebt sich gleichfalls

$$b_1 h_1 = \frac{Q_1 - P}{T} + \frac{6l}{h} \cdot \frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6 . 144}{h_1}\right) \frac{P}{T} = 3 + \frac{2592}{h_1}.$$

Es iſt alſo der erforderliche Querſchnitt der ganzen Säule AE:

$$F = b_1 h_1 = 10{,}55 . 15{,}83 = 167 \text{ Quadratzoll.}$$

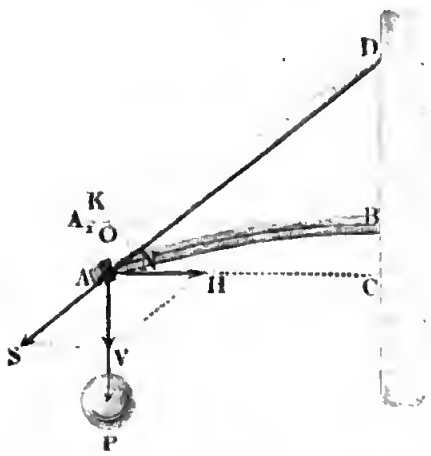
Die Fußſpreize FG erleidet endlich den Arendruck

$$S = \frac{Pl}{a \cos in. \beta} = \frac{12 . 1500}{6 \cos in. 45^0} = 4243 \text{ Pfund,}$$

wie die Balkenſtrebe, weshalb ihr auch derſelbe Querſchnitt von 17 Quadratzoll zu geben iſt.

§. 61 **Ausdehnung der Zugſtangen.** Wenn man die durch Streben oder Zugſtangen unterſtützten Balken nicht als ſtarre Körper anſieht, ſondern auch die Biegung derſelben mit in Betracht zieht, wie wir es oben (§. 49) bei den durch Säulen unterſtützten Balken gethan haben, ſo muß natürlich auch die Kraftzerlegung an denſelben eine Aenderung erleiden. Da wir unter der letzten Vorausſetzung Formeln zur Beſtimmung der Kräfte eines auf genannte Weiſe unterſtützten Balkens gefunden haben, ſo können wir dann noch ſehen, ob die im Obigen, bei Annahme vollkommen ſtarrer Körper gefundenen Formeln, in der Praxis noch ausreichen. Der einfachſte Fall einer ſolchen Balkenunterſtützung beſteht in einem an einem Ende B eingemauerten und am anderen Ende A von einem Gewichte P ergriffenen Balken AB, Fig. 113, mit einer Zugſtange AD. Vor Allem entſteht hier die Frage, welchen Theil der Kraft P am Ende des Balkens nimmt dieſe Stange auf und welchen Theil hat der Balken ſelbſt zu tragen? Es ſei P das angehängte Gewicht, S die Spannung der Zugſtange AD, l die Länge AB des Balkens, $F = bh$ der Querſchnitt deſſelben, ferner F_1 der Querſchnitt der Stange und α der Neigungswinkel CAD derſelben gegen den Horizont, endlich ſeien E der Elaſticitätsmodul des Balkens, ſowie E_1 der der Stange und W das Biegungsmoment des erſteren. Die Spannkraft S zerlegt ſich in die Verticalkraft

Fig. 113.



$$V = S \sin. \alpha$$

und in die Horizontalkraft

$$H = S \cos. \alpha;$$

es wird daher der Balken durch die Kraft

$$P - V = P - S \sin. \alpha$$

gebogen und durch die Kraft

$$H = S \cos. \alpha$$

zuſammengedrückt. Wenn nun der urſprünglich gerade Balken $A_1 B$ durch dieſe Kräfte die Bogengeſtalt AB annimmt, ſo iſt für dieſelbe die Höhe:

$$BC = OA = a = \frac{(P - S \sin. \alpha)\, l^3}{3\, WE} \text{ (ſ. Band I., §. 217),}$$

und die Verkürzung:

$$A_1 O = b = \frac{H}{EF} \cdot l = \frac{Sl \cos. \alpha}{EF} \text{ (ſ. Band I., §. 204).}$$

Projicirt man die Höhe AO auf die Richtung AD der Zugſtange, ſo erhält man in der Projection:

$$AN = AO \sin. AON = AO \sin. BOD = a \sin. \alpha$$

die der Biegung entſprechende Verlängerung der Zugſtange, und projicirt man die Verkürzung $A_1 O = b$ des Balkens auf die Richtung $A_1 D$, ſo ergiebt ſich in der Projection $A_1 K$ die entſprechende Verlängerung der Stange, nämlich:

$$A_1 K = A_1 O \cos. BA_1 D = b \cos. \alpha.$$

Es folgt daher die ganze Ausdehnung der Zugſtange

$$\lambda = AN - A_1 K = a \sin. \alpha - b \cos. \alpha.$$

Nun iſt aber die Spannung:

$$= \frac{\lambda}{AD} E_1 F_1 = \frac{\lambda \cos. \alpha}{l} \cdot E_1 F_1 = \left(\frac{a \sin. \alpha - b \cos. \alpha}{l}\right) \cos. \alpha \,.\, E_1 F_1$$

$$= \left(\frac{(P - S \sin. \alpha)\, l^2 \sin. \alpha}{3\, WE} - \frac{S \cos. \alpha^2}{FE}\right) \cos. \alpha \,.\, E_1 F_1,$$

daher folgt:

$$S \left(\frac{1}{E_1 F_1 \cos. \alpha} + \frac{\cos. \alpha^2}{EF} + \frac{l^2 \sin. \alpha^2}{3\, WE}\right) = \frac{Pl^2 \sin. \alpha}{3\, WE},$$

alſo die geſuchte Spannkraft des Zugbandes

$$S = \frac{Pl^2 \sin. \alpha}{3\, WE \left(\frac{1}{E_1 F_1 \cos. \alpha} + \frac{\cos. \alpha^2}{EF}\right) + l^2 \sin. \alpha^2}$$

oder, wenn man $W = \frac{bh^3}{12}$ und $F = bh$ einführt:

$$1) \quad S = \frac{Pl^2 \sin. \alpha}{{}^1/_4 \frac{bh^3 E}{E_1 F_1 \cos. \alpha} + {}^1/_4 h^2 \cos. \alpha^2 + l^2 \sin. \alpha^2}.$$

Annähernd:

$$S = \frac{P}{\sin.\alpha}\left[1 - {}^1/_4\left(\frac{F\,E}{F_1\,E_1\cos\,\alpha} + \cos.\alpha^2\right)\frac{h^2}{l^2\,\sin.\alpha^2}\right].$$

Die Querſchnitte F und F_1 des Balkens und der Schiene ergeben ſich nun mittels der entſprechenden Tragmodel T und T_1 durch die Formeln:

$$T = \frac{S\cos.\alpha}{F} + \frac{(P - S\sin.\alpha)\,hl}{2\,W} \text{ und } T_1 = \frac{S}{F_1},$$

und zwar der Querſchnitt des Balkens:

$$2)\quad F = bh = \frac{S\cos.\alpha}{T} + \frac{6\,(P - S\sin.\alpha)\,l}{Th}$$

und der Querſchnitt der Zugſtange:

$$3)\quad F_1 = \frac{S}{T_1}.$$

Wenn α einen mittleren Werth hat, alſo ſich weder 0^0 noch 90^0 ſehr nähert, und wenn das Querſchnittsverhältniß $\frac{F}{F_1} = \frac{bh}{F_1}$ nicht ſehr groß iſt, ſo kann man in der Formel (1) nicht nur das Glied ${}^1/_4\,h^2\cos.\alpha^2$, ſondern auch das Glied ${}^1/_4\,\frac{bh^3\,E}{E_1\,F_1\cos.\alpha}$ vernachläſſigen, weshalb für die meiſten Fälle $S = \frac{P}{\sin.\alpha}$ zu ſetzen und anzunehmen iſt, daß die Zugſtange die ganze Laſt P trägt, und der Balken nur in der Richtung ſeiner Axe mit der Kraft

$$H = S\cos.\alpha = P\,cotang.\,\alpha$$

zuſammengedrückt wird.

Wird der Balken auf gleiche Weiſe durch eine Strebe von unten unterſtützt, ſo gelten dieſelben Formeln, nur iſt dann S eine Druck- und H eine Zugkraft, folglich $\lambda = a\,sin.\,\alpha - b\,cos.\,\alpha$ eine Verkürzung, und in $F_1 = \frac{S}{T_1}$, ſtatt T_1 der Tragmodul für Druckfeſtigkeit einzuführen.

Beiſpiel. Wenn ein Balken AB, Fig. 113, von 100 Zoll Länge eine Laſt P von 5000 Pfund tragen und hierbei von einer ſchmiedeeiſernen Zugſtange oder einer ſogenannten Helfſchiene AD unterſtützt werden ſoll, deren Axe um 25 Grad von der Axe des Balkens abweicht, welchen Querſchnitt hat man dieſer Schiene und dem Balken zu geben? Es iſt hier:

$$S = \frac{P}{\sin.\alpha} = \frac{5000}{\sin.25^0} = \frac{5000}{0{,}4226} = 11831 \text{ Pfund.}$$

und daher der nöthige Querſchnitt der Zugſtange, $F_1 = \frac{S}{T_1}$, alſo für $T_1 = 5000$ Pfd.:

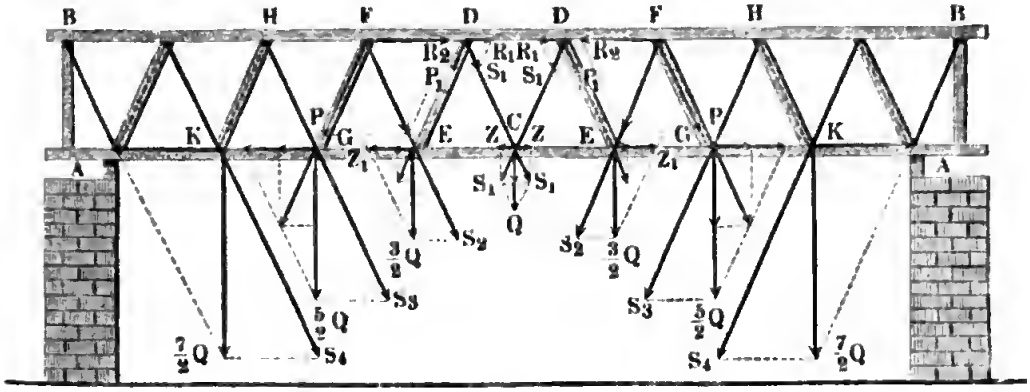
$$\frac{S}{T_1} = \frac{11831}{5000} = 2{,}366 \text{ Quadratzoll,}$$

dagegen der Querschnitt des Balkens, wenn man $T = 250$ Pfund einführt:

$$F = \frac{H}{T} = \frac{P\,cotang.\,\alpha}{T} = \frac{5000\,.\,cotang.25^0}{250} = 42{,}8 \text{ Quadratzoll.}$$

Fachwerksträger. Die sogenannten Fachwerksträger sind im Wesentlichsten zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerke. In der einfachsten Gestalt besteht ein solcher Balken aus zwei einfachen Balken AA, BB, Fig. 114, welche durch Streben, wie DE, FG u. s. w., und durch Zug- §. 62

Fig. 114.



stangen CD, EF u. s. w. mit einander verbunden sind. Die Art und Weise, wie ein solcher Balken dem Biegen und Zerbrechen Widerstand leistet, ist aus Folgendem zu ersehen. Denken wir uns den Balken der Länge nach in $2n$ gleiche Theile getheilt, und nehmen wir an, daß in jedem der $2n-1$ Theilpunkte, sowie in jedem der beiden Endpunkte A, A eine gleiche Last Q niederziehe, und folglich die ganze Balkenlast $(2n-1)\,Q$ sei. Die Last Q im Mittelpunkte C zerlegt sich nach den Richtungen der beiden Zugstangen CD, CD, deren Neigung gegen den Horizont $= \alpha$ sein möge, in die Zugkräfte

$$S_1 = \frac{Q}{2\,sin.\,\alpha} \text{ und } S_1 = \frac{Q}{2\,sin.\,\alpha}.$$

Diese Kräfte pflanzen sich bis D, D in dem oberen Balken BB fort und zerlegen sich hier in eine Druckkraft R_1 nach der Axe des Balkens BB und in eine Druckkraft P_1 in der Richtung der Strebe DE. Ist β der Neigungswinkel einer solchen Strebe gegen die Balkenaxe, so hat man:

$$\frac{R_1}{S_1} = \frac{sin.(\alpha+\beta)}{sin.\,\beta}, \text{ daher } R_1 = \frac{S_1\,sin.(\alpha+\beta)}{sin.\,\beta} = \frac{Q}{2}\frac{sin.\,(\alpha+\beta)}{sin.\,\alpha\,sin.\,\beta},$$

und

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}, \text{ daher } P_1 = \frac{S_1\,sin.\,\alpha}{sin.\,\beta} = \frac{Q}{2\,sin.\,\beta}.$$

Die Kraft P_1, welche ſich durch die Strebe hindurch bis zum Punkte E in dem unteren Balken fortpflanzt, zerlegt ſich hier in eine Verticalkraft

$$V = P_1 \sin.\beta = S_1 \sin.\alpha = \frac{Q}{2},$$

und in eine Horizontalkraft:

$$H = P_1 \cos.\beta = S_1 \sin.\alpha \operatorname{cotang}.\beta = \frac{Q}{2} \operatorname{cotang}.\beta.$$

Die Verticalkraft $V = \frac{Q}{2}$ vereinigt ſich mit der in E angehängten Laſt Q, es zieht daher hier im Ganzen $^3/_2\ Q$ ſenkrecht nieder, und es ergiebt ſich durch Zerlegung dieſer Kraft die Spannung der Zugſtange EF:

$$S_2 = {}^3/_2 \frac{Q}{\sin.\alpha},$$

ſowie die Zugkraft in der Richtung des Balkens AA:

$$= \frac{3\,Q}{2} \operatorname{cotang}.\alpha,$$

alſo, wenn man noch H hinzufügt, die ganze Zugkraft:

$$Z_1 = {}^3/_2\ Q \operatorname{cotang}.\alpha + \frac{Q}{2} \operatorname{cotang}.\beta.$$

Die Zugkraft S_2 pflanzt ſich durch die Zugſtange EF bis F im oberen Balken fort, und zerlegt ſich hier wieder in eine Druckkraft nach der Balkenaxe:

$$R_2 = \frac{S_2 \sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\beta} = {}^3/_2 \frac{Q \sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta},$$

und in eine Druckkraft nach der Strebe FG:

$$P_2 = \frac{S_2 \sin.\alpha}{\sin.\beta} = {}^3/_2 \frac{Q}{\sin.\beta}.$$

Wenn man auf dieſe Weiſe, von der Mitte nach den Balkenenden fortſchreitend, die übrigen Spannkräfte ermittelt, ſo findet man folgende Regeln:

1) Die Zugſtangen CD, EF, GH u. ſ. w. ſind durch die Kräfte

$$S_1 = \frac{Q}{2\sin.\alpha},\ S_2 = {}^3/_2 \frac{Q}{\sin.\alpha},\ S_3 = {}^5/_2 \frac{Q}{\sin.\alpha} \text{ u. ſ. w.,}$$

und die Streben DE, FG, HK u. ſ. w. durch die Kräfte

$$P_1 = \frac{Q}{2\sin.\beta},\ P_2 = {}^3/_2 \frac{Q}{\sin.\beta},\ P_3 = {}^5/_2 \frac{Q}{\sin.\beta} \text{ u. ſ. w.}$$

geſpannt.

2) Jede Hälfte des oberen Balkens BB wird durch die Kräfte

$$R_1 = \frac{Q}{2}\frac{\sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha\sin.\beta},\ R_2 = {}^3/_2 \frac{Q\sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha\ \sin.\beta},\ R_3 = {}^5/_2 \frac{Q\sin.(\alpha+\beta)}{\sin.\alpha\ \sin.\beta}$$

oder

$$R_1 = \frac{Q}{2}\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),\quad R_2 = {}^3/_2\,Q\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

$$R_3 = {}^5/_2\,Q\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta)\text{ u. ſ. w.}$$

zuſammengedrückt, dergeſtalt alſo, daß die ganze zuſammendrückende Kraft in der Mitte zwiſchen D und D am größten, nämlich

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots = [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]\,\frac{Q}{2}\,\frac{sin.(\alpha+\beta)}{sin.\,\alpha\,sin.\,\beta}$$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]\,\frac{Q}{2}\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

$$= \frac{n^2\,Q}{2}\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

und daß ſie dagegen an den äußeren Balkenenden B, B nur

$$(2n-1)\,\frac{Q}{2}\,\frac{sin.(\alpha+\beta)}{sin.\,\alpha\,sin.\,\beta} = (2n-1)\,\frac{Q}{2}\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta)$$

ausfällt.

3) Jede Hälfte des unteren Balkens $A\,A$ wird durch die Zugkräfte

$$Z_1 = {}^3/_2\,Q\,cotang.\,\alpha + \frac{Q}{2}\,cotang.\,\beta,$$

$$Z_2 = {}^5/_2\,Q\,cotang.\,\alpha + {}^3/_2\,Q\,cotang.\,\beta\text{ u. ſ. w.}$$

ausgedehnt, ſo daß folglich die ganze Zugkraft in der Mitte C am größten nämlich

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots = [+ 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]\,\frac{Q}{2}\,cotang.\,\alpha$$

$$+ [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]\,\frac{Q}{2}\,cotang.\,\beta$$

$$= [(n^2-1)\,cotang.\,\alpha + n^2\,.\,cotang.\,\beta]\,\frac{Q}{2}$$

iſt, und nach den Enden zu immer kleiner und kleiner wird, ſo daß ſie an einem Ende die Größe

$$(2n-1)\,\frac{Q}{2}\,cotang.\,\beta$$

behält.

§. 63 Iſt die Anzahl n der Streben und Zugbänder ſehr groß, ſo kann man die ganze Zugkraft des unteren Balkens der ganzen Druckkraft des oberen Balkens gleich, und zwar jede

$$R = \frac{n^2}{2}\,Q\,(cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta)$$ ſetzen.

Bezeichnet h die Höhe des ganzen Balkens, oder der Normalabſtand der beiden Balken von einander, und a den Abſtand $CE = DF = EG$ u. ſ. w. der Streben von einander, in der Richtung der Balkenaxen gemeſſen, ſo hat man:

$$a = h\ (cotang.\ \alpha + cotang.\ \beta)$$

und daher

$$R = \frac{n^2 a}{2h}\ Q,$$

oder, wenn man die halbe Balkenlänge $l = n\,a$ einführt

$$R = \frac{l}{2h} \cdot n\,Q.$$

Iſt nun F der Querſchnitt eines Balkens und T der Tragmodul deſſelben, ſo hat man folglich

$$R = FT,$$

und daher die Belaſtung einer Trägerhälfte:

$$n\,Q = \frac{2h}{l}\ FT.$$

Es wächſt alſo hiernach das Tragvermögen eines Fachwerkträgers wie der Querſchnitt F ſeiner Hauptbalken und wie die Höhe h oder der Abſtand der Hauptbalken deſſelben von einander.

Dieſen Ausdruck für die Tragkraft eines zuſammengeſetzten Balkens findet man auch, wenn man den Balken als einen einfachen elaſtiſchen Körper anſieht und ſeine Biegungselaſticität in Betracht zieht. Es wird jede Balkenhälfte an ihrem Ende durch die Unterſtützung mit der Kraft $n\,Q$ von unten nach oben, und in ihrer Mitte durch eine gleiche Kraft $n\,Q$ von oben nach unten gebogen, und es iſt daher das Biegungsmoment jeder Balkenhälfte:

$$n\,Q\,l - n\,Q\,\frac{l}{2} = \frac{n\,Q\,l}{2}\cdot \quad \text{(Vergl. Band I., §. 240).}$$

Nun wirkt aber die Spannung R eines Balkens in Hinſicht auf den Mittelpunkt des Balkens am Hebelarme $\frac{h}{2}$; es iſt daher die Summe der Momente der Spannkräfte beider Balken:

$$2\,R \cdot \frac{h}{2} = Rh,$$

und es folgt daher durch Gleichſetzen dieſer Momente:

$$\frac{n\,Q\,l}{2} = Rh, \text{ und wie oben,}$$

$$n\,Q = \frac{2h}{l}\ R = \frac{2h}{l}\ FT.$$

Lägen die beiden Hauptbalken, wovon jeder die Höhe h_1 haben möge, loſe über einander, ſo würde ihre Tragkraft

$$n\,Q = 2 \cdot 2\,\frac{b\,h_1^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^2/_3\,\frac{h_1}{l}\,F\,T \text{ betragen,}$$

und dieſe Balken zu einem Ganzen feſt mit einander verbunden, ſo hätte man

$$n\,Q = 2 \cdot \frac{b\,(2\,h_1)^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^4/_3\,\frac{h_1}{l}\,F\,T \text{ zu ſetzen.}$$

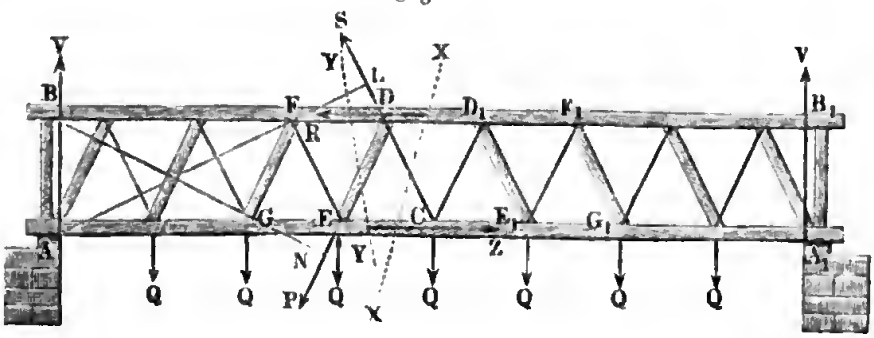
Es trägt hiernach unter übrigens gleichen Umſtänden ein Fachwerksträger wie Fig. 114 darſtellt, $3\,\frac{h}{h_1}$ mal ſoviel als die beiden loſe auf einander gelegten, und $\frac{3\,h}{2\,h_1}$ mal ſoviel als die beiden auf einander gelegten und feſt mit einander verbundenen Balken.

Die Spannungsverhältniſſe fallen nicht weſentlich anders aus, wenn die Anzahl der Tragefelder eine ungerade iſt, ſo wie wenn die Laſt auf dem oberen Balken aufruht, oder zwiſchen beiden Streckbalken angebracht iſt. Da ſich die Streben in Folge der Druckkräfte leicht biegen können, ſo iſt es zweckmäßig, dieſelben möglichſt kurz zu machen, alſo ſenkrecht zu ſtellen, wobei $\beta = 90$ Grad ausfällt.

§. 64

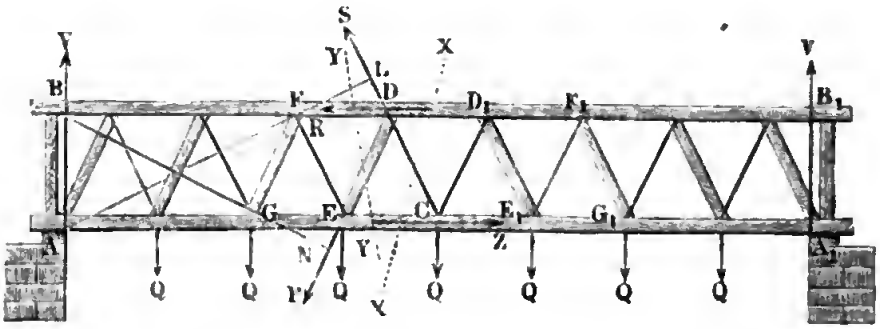
Die Beſtimmung der Spannungen eines Fachwerksträgers läßt ſich auch leicht durch Anwendung der Theorie der Drehungsmomente vollziehen, wenn man ſich den Träger in zwei Theile zerſchnitten denkt, und vorausſetzt, daß der eine Theil nur durch die Spannungen in den Schnittflächen mit den anderen zuſammenhängt. Es bilden dann dieſe Spannungen mit den äußeren Kräften auf der einen Seite des Trägers ein im Gleichgewicht befindliches Kraftſyſtem. Iſt $(2\,n - 1)\,Q$ die ganze Belaſtung der Brücke, ſo beträgt die Kraft, welche jeder der Brückenpfeiler aufnimmt, mit welcher alſo auch jeder der beiden Pfeiler den einzelnen Kräften, Q, Q u. ſ. w. entgegenwirkt, $V = (n - {}^1/_2)\,Q$. Denken wir uns nun durch einen Schnitt $X\,X$ zwiſchen C und D, Fig. 115, den Träger zerſchnitten, ſo kön-

Fig. 115.



nen wir annehmen, daß die in den Schnittflächen wirkenden Spannungen R, Z und S mit den Kräften $(n - 1/2)\,Q$, Q, Q u. s. w. des Balken-

Fig. 116.



stückes $A\,C\,D$ im Gleichgewichte sind. Um die Spannung R des oberen Balkens zu finden, betrachten wir C als Drehungspunkt, und machen die Bedingung, daß die algebraische Summe der Momente sämmtlicher in Rede stehenden Kräfte = Null sei. Nun ist das Moment des Pfeilerdruckes V, $V.\overline{CA} = (n - 1/2)\,Ql$, ferner die Summe der Momente von Q, Q u. s. w.

$$\frac{Ql}{n} + \frac{2\,Ql}{n} + \frac{3\,Ql}{n} + \cdots + (n-1)\,\frac{Ql}{n}$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)\,\frac{Ql}{n} = (n-1)\,\frac{Ql}{2},$$

und das Moment der Stangenspannung S, sowie das des Balkenzuges Z, $= 0$, da die Richtungen beider Kräfte durch C gehen, daher hat man das Moment des am Hebelarme $\overline{AB} = h$ wirkenden Balkendruckes R

$$Rh = (n - 1/2)\,Ql - (n-1)\,\frac{Ql}{2} = \frac{n\,Ql}{2},$$

und diesen Druck selbst

$$R = \frac{n\,Ql}{2h}.$$

Denkt man sich dagegen A als Drehungspunkt, so hat man das Moment der Spannung S,

$S.\overline{AL} = S.l\ sin.\,\alpha$, während die Summe der Momente von R, Q, Q u. s. w. unverändert bleiben und die Momente von V und Z Null ausfallen; es ist daher

$$Sl\ sin.\,\alpha = Rh - (n-1)\,\frac{Ql}{2} = \left(\frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2}\right)Ql = \frac{Ql}{2},$$

und die gesuchte Strebenspannung

$$S = \frac{Q}{2\ sin.\,\alpha}.$$

Denken wir uns nun einen Schnitt YY zwiſchen den Stützpunkten D und E, und nehmen wir zunächſt einen Drehungspunkt in D an, für welchen die Momente von R und S Null ſind. Das Moment von V iſt dann $V.\overline{DB} = (n - {}^1/_2)\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\,Q$, und die Summe der Momente der Belaſtungen Q, Q u. ſ. w.

$$Q\left(\frac{l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right) + Q\left(\frac{2\,l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right)$$

$$+ \cdots Q\left((n-1)\frac{l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right) = (n-1)\left(\frac{l}{2} - h\ cotg.\,\alpha\right)Q.$$

Daher folgt das Moment der Spannung Z des unteren Streckbalkens:

$$Zh = (n - {}^1/_2)\,(l - h\,cotang.\,\alpha)\,Q - (n-1)\left(\frac{l}{2} - h\ cotang.\,\alpha\right)Q$$

$$= (n\,l - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2}, \text{ und dieſe Spannung ſelbſt}$$

$$Z = (n\,l - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2\,h} = \left(\frac{n\,l}{h} - cotang.\,\alpha\right)\frac{Q}{2}.$$

Nehmen wir endlich den Drehungspunkt in B an, ſo daß die Momente von V und R = Null ſind, ſo iſt das Moment von dem Strebendrucke P:

$P.\overline{BN} = P.\overline{BD}.sin.\,\beta = P(l - h\,cotang.\,\alpha)\ sin.\,\beta$, das von Z,

$Zh = (n\,l - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2}$, und die Summe der Momente von

Q, Q u. ſ. w.

$$Q\,\frac{l}{n} + \frac{2\,Q\,l}{n} + \cdots + (n-1)\,\frac{Q\,l}{n} = \left(\frac{n-1}{2}\right)Q\,l,$$

ſo daß ſchließlich

$$P\,(l - h\,cotang.\,\alpha)\ sin.\,\beta = (n\,l - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2} - (n-1)\frac{Q\,l}{2}$$

und der Druck in der Strebe:

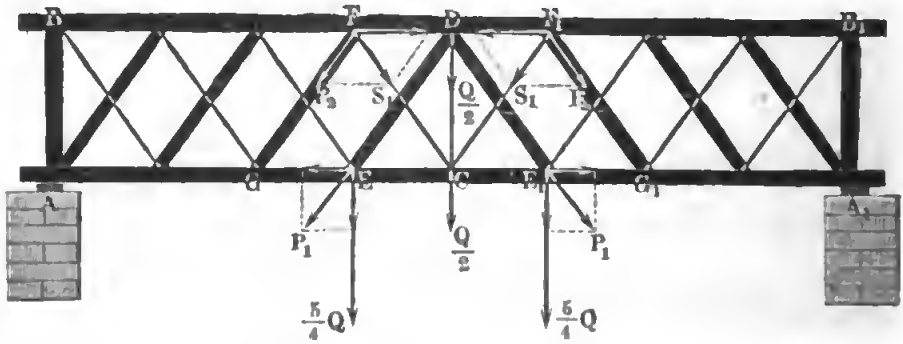
$$P = \frac{(l - h\ cotang.\,\alpha)\ Q}{2\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\,sin.\,\beta} = \frac{Q}{2\,sin.\,\beta} \text{ folgt.}$$

Dieſe Kraftwerthe ſtimmen mit den im vorigen Paragraphen gefundenen vollſtändig überein. Es iſt leicht zu ermeſſen, wie durch Annahme anderer Schnittlinien und anderer Drehungspunkte die Spannungen der übrigen Zugſtangen und Streben, ſo wie die der Streckbalken an anderen Stellen gefunden werden können.

Gekreuzte Fachwerksträger. Wenn zwiſchen je zwei Streben §. 65
und Zugſtangen eine Strebe und Zugſtange eingeſchaltet iſt, wie bei dem Träger in Fig. 117 (a. f. S.), wo jede Strebe ſich mit einer

gleichgeneigten Zugſtange kreuzt, und in der Mitte des Balkens noch eine verticale Zugſtange CD angebracht iſt, ſo kann man annehmen, daß das mittlere Stangenpaar CF, CF ebenſo wie das mittlere Strebenpaar von

Fig. 117.



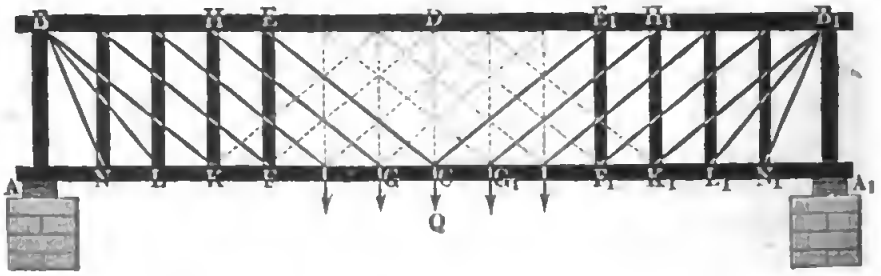
der Laſt Q in der Mitte C, die Hälfte, alſo $\frac{Q}{2}$ trägt, und daß daher von der Mitte C nach den Balkenenden A, A_1 zugegangen, die Stangen- und Strebenſpannungen: $S_1 = P_1 = P_2 = 1/4 \frac{Q}{\sin. \alpha}$, $S_2 = P_3 = 5/4 \frac{Q}{\sin. \alpha}$, $S_3 = P_4 = 9/4 \frac{Q}{\sin. \alpha}$ u. ſ. w. ſind, vorausgeſetzt, daß die Streben und Stangen denſelben Neigungswinkel α haben.

Bei einer ziemlich großen Anzahl von Streben und Stützen iſt die Spannung der Streckbalken in C und D, wie oben,

$$R = Z = \frac{n\,Q\,l}{2\,h}$$ zu ſetzen.

Bei einem Fachwerksträger AB_1, Fig. 118, mit zweifach gekreuzten Streben EF, HK ... und Zugſtangen CE, GH ..., wovon die erſteren vertical ſtehen, ſind die Spannungen der Zugſtangen CE, GH u. ſ. w.

Fig. 118.



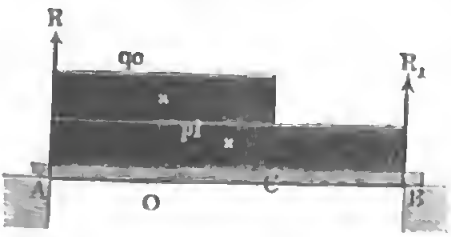
$$S_1 = \frac{Q}{2\sin. \alpha},\ S_2 = S_3 = \frac{Q}{\sin. \alpha},\ S_4 = 3/2 \frac{Q}{\sin. \alpha},\ S_5 = \frac{2\,Q}{\sin. \alpha},$$

und die der äußerſten Stangen, BL und BN, wenn α_1 und α_2 die Neigungswinkel derſelben gegen die Balken bezeichnen, $S_6 = \frac{2\,Q}{sin.\,\alpha_1}$ und $S_7 = \frac{5\,Q}{2\,sin.\,\alpha_2}$; ferner ſind die Drücke in den Streben EF, HK u. ſ. w.

$$P_1 = \frac{Q}{2},\ P_2 = P_3 = Q,\ \text{und}\ P_4 = {}^3/_2\ Q\ \text{u. ſ. w.}$$

Die Spannungen in den Streckbalken laſſen ſich wieder $R = Z = \frac{n\,Q\,l}{2\,h}$ ſetzen, wenigſtens wenn die Anzahl n der Laſtpunkte F, K, L ... ſehr groß iſt. In der Regel, zumal bei langen Brückenträgern, ſchaltet man im mittleren Theile EF_1 derſelben die in der Figur punktirten Verſtrebungen ein, nicht allein um dem Ganzen eine größere Steifigkeit zu geben, ſondern auch aus dem Grunde, weil hier durch die mobile Belaſtung, z. B. durch einen Wagenzug, die ſtärkſte Biegung des Trägers von der Mitte C weg zur Seite, z. B. nach G, rückt. Bezeichnet l die Länge des ganzen Trägers AB, Fig. 119, und p die conſtante Belaſtung deſſelben auf den laufenden Fuß, ferner c die Länge der mobilen Laſt, und die Größe derſelben pr. Fuß $= q$, ſo iſt die ganze conſtante Laſt $= pl$, und die mobile $= qc$, ferner der Druck in einem Stützpunkte B:

Fig. 119.



$$R_1 = \frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l}$$

und der im andern Stützpunkte A:

$$R = \frac{pl}{2} + qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right).$$

Das Biegungsmoment an einer Stelle O, welche um $AO = x$ vom Auflagerungspunkt abſteht, iſt:

$$M = Rx - (p+q)\frac{x^2}{2} = \frac{p+q}{2}\,x\left(\frac{2R}{p+q} - x\right),$$

und fällt am größten aus für $x = \frac{R}{p+q}$, nämlich

$$M = \frac{R^2}{2(p+q)} = \frac{\left[{}^1/_2\,pl + qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right)\right]^2}{2(p+q)}.$$

Da $1 - \frac{c}{2l}$ ſtets poſitiv iſt, ſo giebt $c = l$, den Maximalwerth $M = \frac{(p+q)\,l^2}{8}$, alſo genau denſelben, als wenn der Balken die gleich-

mäßige vertheilte conſtante Laſt $(p+q)\,l$ trägt. Die verticale Schubkraft iſt im Abſtande $x < c$,
$V = R - (p+q)\,x$, und im Abſtande $x_1 > c$,
$V_1 = R - px - qc$; in beiden Fällen am kleinſten für $x = c$, und zwar

$$V = R - (p+q)\,c = \frac{pl}{2} - pc - \frac{qc^2}{2l}.$$

Die Länge c der beweglichen Laſt, bei welcher dieſe Schubkraft Null ausfällt, giebt nun die Auflöſung der Gleichung $c^2 + \frac{2pcl}{q} = \frac{pl^2}{q}$, nämlich

$$c = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l.$$

Für dieſe Länge iſt der Hebelarm des größten Momentes, $x = \frac{R}{p+q} = c$, und das entſprechende größte Moment ſelbſt,

$$M = \frac{R^2}{2(p+q)} = (p+q)\frac{c^2}{2} = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right]^2 \frac{(p+q)\,l^2}{2}.$$

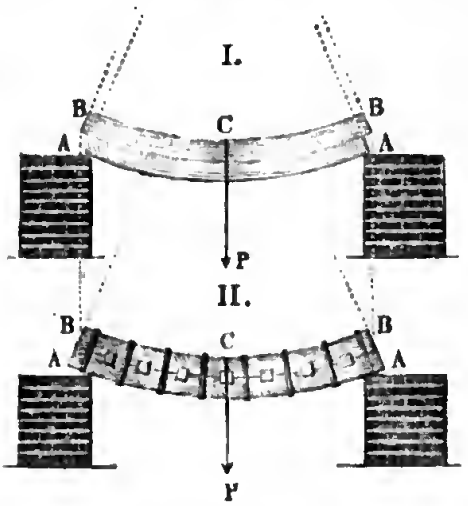
Während bei einer auf den Träger gleichmäßig vertheilten Laſt pl oder $(p+q)\,l$, die größte Durchbiegung in der Mitte des Trägers, d i. im Abſtande $\frac{l}{2}$ von A ſtattfindet, iſt bei einer mobilen Belaſtung die Stelle der größten Durchbiegung im Abſtande $c = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$, rückt alſo dieſer Ort von der Mitte um $\frac{l}{2} - c = \left[\frac{1}{2} + \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$ der mobilen Laſt entgegen, und bewegt ſich nachher ebenſo auf der anderen Seite von der Mitte des Trägers fort, wenn die mobile Laſt die erſte Seite verlaſſen hat.

Aus dem Vorſtehenden folgt, 1) daß man die Spannungen und Querſchnitte der Strebebalken ſo berechnen ſoll, als wenn der ganze Träger die conſtante Laſt $(p+q)\,l$ zu tragen hätte, und 2) daß man ſämmtliche Laſtpunkte, welche nicht über $\frac{l}{2} - c = \left[\frac{1}{2} + \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$ von der Trägermitte C abſtehen, wie dieſe Mitte, d. i. durch Diagonalſtangen, wie Fig. 118 in punktirten Linien angiebt, zu unterſtützen hat.

§. 66 **Ueber einander liegende Balken.** Zur Vergrößerung der Tragkraft werden auch oft zwei oder mehrere Balken über einander gelegt. Wird in dieſem Falle weiter keine Verbindung der Balken mit einander durch Bänder oder Schrauben angewendet, ſo biegt ſich jeder dieſer Balken, wie z. B. AA, Fig. 120, I. unabhängig von dem anderen BB, und es iſt daher

die Tragkraft dieſer Balkenverbindung nur gleich der Summe der Tragkräfte der einzelnen Balken. Iſt z. B. in dem abgebildeten Falle, wo die Balken an den Enden frei aufliegen und in der Mitte eine Laſt P tragen, l die Länge, b die Breite, und h die Höhe eines einzelnen Balkens, ſowie n die Anzahl der über einander liegenden Balken, ſo beträgt die Tragkraft der Verbindung

Fig. 120.



$$P = n \cdot 4 \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6}$$

$$= 4\, n \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6},$$

z. B. für Holz (ſ. Bd. I., §. 240)

$$P = 4\, n \cdot 167 \frac{bh^2}{l}$$

$$= 668\, n \frac{bh^2}{l} \text{ Pfund.}$$

Wenn hingegen die über einander liegenden Balken AA, BB, Fig. 120, II., durch Verzahnung oder eingelegte Dübel, ſowie mittels Bänder oder Schrauben ſo feſt mit einander verbunden ſind, daß in der gemeinſchaftlichen Berührungsfläche kein Verſchieben möglich iſt, und ſich die Verbindung nur im Ganzen, d. i. wie ein einziger Balken biegen kann, ſo iſt die Tragkraft dieſer Verbindung auch gleich der eines einzigen Balkens, welcher zur Höhe h_1 die Summe nh der Höhen h der einzelnen Balken hat. Für den abgebildeten Fall II. iſt folglich die Tragkraft:

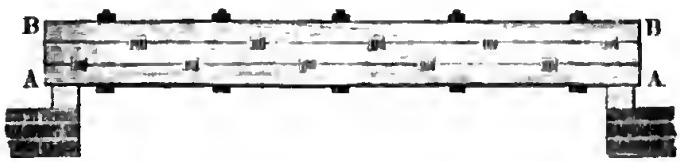
$$P = 4 \cdot \frac{b(nh)^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = 4n^2 \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6},$$

z. B. bei hölzernen Balken:

$$P = 4n^2 \cdot 167 \frac{bh^2}{l} = 668\, n^2 \frac{bh^2}{l} \text{ Pfund.}$$

Es trägt alſo in dieſem Falle der Balken $n$mal ſo viel als im erſteren. Z. B. der in Fig. 121 abgebildete Balken $ABBA$ trägt, da er in einer feſten Verbindung von drei einfachen Balken beſteht, $n^2 = 3^2 = 9$mal ſo

Fig. 121.



viel als der einfache Balken, und $n = 3$mal ſo viel als wenn dieſe drei Balken loſe über einander liegen. Allerdings iſt die künſtliche Verbindung

der Balken durch die Schrauben u. s. w. nie so innig als die natürliche Verbindung, um so mehr, da die Balken auch durch die Verzahnung oder durch die Löcher für die Dübel, sowie durch die Schraubenlöcher geschwächt werden. Deshalb soll man in der Praxis stets auf eine kleinere Tragkraft rechnen, als die letzte Formel angiebt.

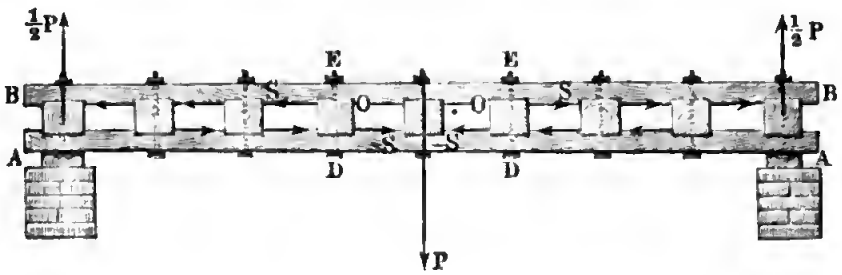
Um auf diese Weise sehr lange Balken herzustellen, ist wohl auch nöthig, die einfachen Balken der Länge nach an einander zu stoßen. Hierbei muß aber dafür gesorgt werden, daß niemals zwei Stoßfugen unmittelbar unter einander, sondern im Gegentheil möglichst entfernt von einander zu liegen kommen. Wegen dieses Zusammenstoßens ist natürlich immer einer von den über einander liegenden n Balken unwirksam, und daher die Tragkraft P nur

$$= 4\,(n-1)^2\,\frac{bh^2}{l}\,\frac{T}{6}.$$

§. 67 **Zusammengebolzte Balken.** Da die Tragkraft eines Balkenelementes um so größer ist, je entfernter dasselbe von der neutralen Axe liegt, so legt man auch oft die Balken nicht unmittelbar über einander, sondern spannt zwischen beide in gewissen Abständen von einander kurze Holzstücke oder Bolzen.

Eine solche Verbindung zweier Balken AA und BB mit einander durch Bolzen O, O ... und mittels Schrauben DE, DE ..., welche durch letztere hindurchgehen, führt Fig. 122 vor Augen. Behalten wir für einen solchen

Fig. 122.



Balken die vorige Bezeichnung bei, nehmen wir aber noch an, daß beide Balkenaxen um die Höhe a von einander abstehen, so haben wir unter der obigen Voraussetzung, daß der ganze Balken an beiden Enden frei aufliegt, und die Last in der Mitte desselben niederzieht (s. Band I., §. 236), die Größe dieser Last oder die sogenannte Tragkraft:

$$P = 4\,\frac{[(a+h)^3-(a-h)^3]\,b}{(a+h)\,l}\,\frac{T}{6} = \frac{8\,(3a^2+h^2)\,bh}{(a+h)\,l}\,\frac{T}{6},$$

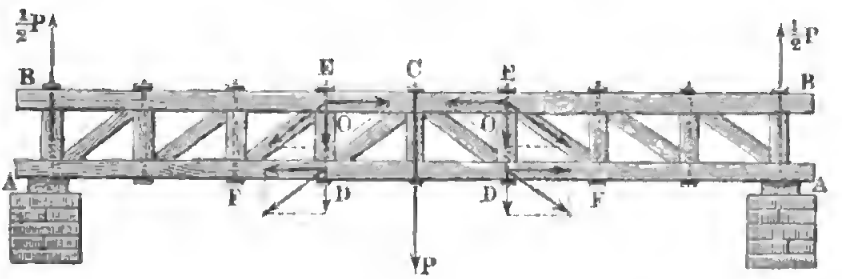
also z. B. für Holz, wo $\frac{T}{6} = 167$ Pfund ist,

$$P = 1336 \cdot \frac{(3a^2 + h^2)bh}{(a + h)l}.$$

Bei gleichem Querſchnitte, und alſo auch bei gleichem Gewichte des Balkens, trägt folglich ein ſolcher zuſammengeſetzter Träger um ſo mehr, je größer der Abſtand zwiſchen beiden Balkenhälften iſt.

Da in Folge der Biegung der untere Balken, Fig. 123, ausgedehnt und der obere Balken BB zuſammengedrückt wird, ſo beſitzt der erſtere ein Be-

Fig. 123.



ſtreben, ſich wieder zu verkürzen, und der zweite ein Beſtreben, auf ſeine urſprüngliche Länge ſich wieder auszudehnen. Dieſen Beſtrebungen müſſen die Bolzen O und Schrauben DE entgegenwirken. Die Spannkräfte S und $-S$, welche dieſen Beſtrebungen entſprechen, bilden ein Kräftepaar $(S, -S)$ mit dem Hebelarm a, welches dem Kräftepaar $\left(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right)$ mit dem Hebelarm $CA = \frac{l}{2}$ das Gleichgewicht hält; es iſt folglich

$$Sa = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}, \text{ daher die Größe einer ſolchen Spannkraft: } S = \frac{Pl}{4a}.$$

Dieſe Kraft vertheilt ſich auf die ſämmtlichen Bolzen je einer Balkenhälfte. Nehmen wir an, daß eine ſolche Hälfte n Bolzen enthalte, und daß ſich S auf dieſe Bolzen gleichmäßig vertheile, ſo erhalten wir die von einem Bolzen aufzunehmenden Kräfte:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{Pl}{4na} \text{ und } -S_1 = -\frac{S}{n} = -\frac{Pl}{4na}.$$

In Folge des Kräftepaares $\left(\frac{S}{n}, -\frac{S}{n}\right)$ erhält ein ſolcher Bolzen ein Beſtreben zum Drehen, wobei er in den diagonal einander gegenüber liegenden Ecken deſſelben gewiſſe Kräfte $R, -R$ ausübt, welchen durch die Schraube DE das Gleichgewicht gehalten wird. Iſt e die Breite eines Bolzens, parallel zur Axe des Balkens gemeſſen, ſo hat man:

$$Re = \frac{S}{n} a = \frac{Pl}{4n},$$

daher die mittlere Zugkraft einer Schraube

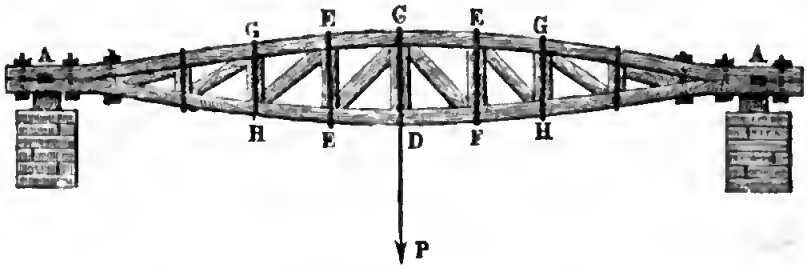
$$R = \frac{Pl}{4ne},$$

Um dem Bestreben zum Umdrehen der Bolzen noch kräftiger entgegenzuwirken, setzt man noch Streben, wie CD, EF, Fig. 123, zwischen je zwei Bolzen ein, auch zieht man wohl noch Hülfsstreben ein, so daß der Zwischenraum zwischen je zwei Bolzen durch ein sogenanntes Andreaskreuz ausgefüllt wird.

§. 68 **Gesprengte Balken.** Da die aus zwei parallelen Balken AA, BB zusammengesetzten Träger an den Enden eine unnöthige große Höhe oder Stärke haben, so giebt man auch wohl diesen Balken eine mäßige Biegung und setzt zwischen dieselben Bolzen, welche von der Mitte des Trägers aus nach den Enden zu allmälig an Höhe abnehmen.

Ein solcher gesprengter Balken ist in Fig. 124 abgebildet. Die beiden Balken ACA und ADA sind an den Enden durch Schrauben fest mit ein-

Fig. 124.



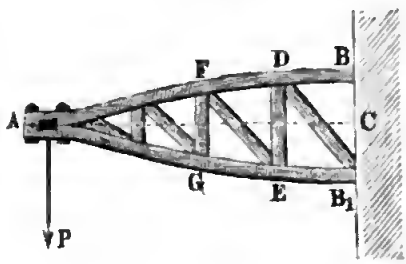
ander verbunden, und werden im Inneren durch Bolzen oder Spreizen GH, EF... auseinander-, sowie durch eiserne Bänder, welche um diese Spreizen herumlaufen, zusammengehalten und durch Streben CF, EH... gehörig abgesteift.

Da das Umdrehungsbestreben der Spreizen zwischen den beiden Balken mit der Höhe derselben wächst und abnimmt, so ist mit diesem Sprengen oder Biegen der Balken unter gewissen Umständen nicht allein ein Ersparniß an Material, sondern auch ein Gewinn an Stabilität verbunden. Allerdings darf man aber auch mit einer solchen Ausbiegung der Balken eine gewisse Grenze nicht überschreiten, da durch dieselbe der Balken einen Theil seines Tragvermögens verliert, welcher mit der Größe der Biegung wächst.

Um den Einfluß des Zusammenbiegens zweier Balken zu einem Ganzen auf die Tragfähigkeit des letzteren kennen zu lernen, denken wir uns wieder den einfachen Fall, welcher auch der Theorie der Biegung einfacher Balken in Band I. zu Grunde gelegt worden ist, wo der ganze Balken ABB_1, Fig. 125, an einem Ende fest eingemauert ist und am anderen Ende eine

Last P trägt. Ist dann wieder b die Breite und h die Höhe der einfachen Balken AB und AB_1, ferner l die Länge AC und a der Abstand zwischen den Axen der beiden einfachen Balken, unmittelbar an der Einmauerungsstelle gemessen, so hat man das Maaß des Biegungsmomentes des Ganzen:

Fig. 125.



$$W = \frac{b\,[(a+h)^3 - (a-h)^3]}{12}$$

$$= \frac{bh}{6}\,(3a^2 + h^2),$$

während das eines einfachen Balkens

$$W_1 = \frac{bh^3}{12} \text{ ist (s. Band I., §. 226).}$$

In Folge des Zusammenbiegens der beiden Balken wirken dieselben in A mit gewissen Kräften P_1 und $-P_1$ auf einander, welche von der Größe der Durchbiegung $CB = CB_1 = \frac{a-h}{2}$ abhängig sind. Wenn die Zusammenbiegung ohne weitere Unterstützung durch Bolzen DE, FG u. s. w. erfolgt, so bildet die neutrale Axe eines jeden einfachen Balkens eine elastische Linie; durch diese Bolzen kann man aber auch dieser Axe eine andere Gestalt, z. B. die Kreisform geben, wobei die Spannung des unbelasteten Trägers an allen Stellen gleich groß ist. Nehmen wir indessen der Sicherheit wegen die elastische Linie zum Anhalten, wenn auch eine innere Verstrebung durch DE, FG u. s. w. statt hat. Es ist dann (s. Band I., §. 217) die Durchbiegung eines einfachen Balken

$$\frac{a-h}{2} = \frac{P_1 l^3}{3\,W_1 E},$$

daher das Kraftmoment:

$$P_1 l = {}^3/_2\,\frac{(a-h)\,W_1 E}{l^2},$$

ferner der Krümmungshalbmesser an der Einmauerungsstelle B oder B_1:

$$r_1 = \frac{W_1 E}{P_1 l} = \frac{2\,l^2}{3\,(a-h)},$$

und das Ausdehnungsverhältniß der äußersten Fasern an eben dieser Stelle:

$$\sigma_1 = \frac{e_1}{r_1} = {}^1/_2\,h : {}^2/_3\,\frac{l^2}{a-h} = {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h}{l^2}.$$

Die relative Ausdehnung an eben dieser Stelle, in Folge der Last P ist hingegen, da der Krümmungshalbmesser der neutralen Axe AC, im Punkte C:

$$r = \frac{WE}{Pl},$$

und der größte Abſtand einer Faſer von dieſer Axe, $e = \frac{a+h}{2}$ geſetzt werden kann:

$$\sigma_2 = \frac{e}{r} = \frac{Pl\,(a+h)}{2\,WE}.$$

Dieſe beiden Ausdehnungen vereinigen ſich in B zur geſammten relativen Ausdehnung

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h}{l^2} + \frac{Pl\,(a+h)}{2\,WE}.$$

Nehmen wir nun an, daß dieſe Größe die Elaſticitätsgrenze erreicht, ſo können wir $\sigma = \frac{T}{E}$, daher auch

$$T = {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h\,E}{l^2} + \frac{Pl\,(a+h)}{2\,W}$$

oder, wenn wir W aus dem Obigen einführen,

$$T = {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h\,E}{l^2} + \frac{3\,(a+h)\,l\,P}{(3\,a^2+h^2)\,bh}$$ ſetzen.

Hieraus folgt nun die geſuchte Tragkraft

$$P = \frac{(3\,a^2+h^2)\,bh}{3\,(a+h)\,l}\left(T - {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h\,E}{l^2}\right).$$

Wir können hiernach ermeſſen, daß das Tragvermögen des geſprengten Balkens Null ausfällt, wenn

$${}^3/_4\,\frac{(a-h)}{l^2}\,hE = T,$$

wenn folglich der größte Abſtand zwiſchen den Axen der einfachen Balken

$$a = h + {}^4/_3\,\frac{Tl^2}{Eh}$$

oder noch größer iſt.

Wenn die beiden Balken unmittelbar über einander liegen, und auf dieſe Weiſe feſt mit einander verbunden ſind, ſo iſt $a = h$ und daher die Tragkraft:

$$P = \frac{4\,bh^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^2/_3\,\frac{bh^2}{l}\,T \text{ (vergl. §. 66).}$$

Zieht man dieſe Tragkraft von der oben gefundenen Tragkraft des geſprengten Balkens ab, ſo erhält man den Ueberſchuß der letzteren über die des einfachen Balkens:

$$P_1 = \frac{bhT}{3l}\left[\left(\frac{3a^2+h^2}{a+h}\right)\left(1-{}^3/_4\,\frac{(a-h)h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right)-2h\right]$$

$$= \frac{bhT}{3l}\left(\frac{3a^2-2ah-h^2}{a+h}-{}^3/_4\,\frac{(3a^2+h^2)}{a+h}\cdot\frac{(a-h)h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right),$$

oder, wenn man den gemeinſchaftlichen Factor $a-h$ abſondert:

$$P_1 = \frac{a-h}{a+h}\cdot\frac{bhT}{3l}\left(3a+h-{}^3/_4\,(3a^2+h^2)\,\frac{h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right).$$

Damit dieſe Kraftdifferenz nicht Null ausfalle, alſo die Sprengung des Balkens in jedem Falle Nutzen gewähre, muß

$${}^3/_4\,(3a^2+h^2)\,\frac{h}{l^2}\,\frac{E}{T} < 3a+h,$$

d. i.

$$a^2-{}^4/_3\,\frac{l^2T}{hE}\,a < {}^4/_9\,\frac{l^2T}{E}-\frac{h^2}{3}\text{ ſein.}$$

Da nun h der kleinſte Werth von a iſt, ſo kann man auch hier $a=h$ ſetzen, ſo daß nun

$$h^2-{}^4/_3\,\frac{l^2T}{E} < {}^4/_9\,\frac{l^2T}{E}-\frac{h^2}{3},\text{ oder }{}^4/_3\,\frac{l^2T}{E} > h^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 > {}^3/_4\,\frac{E}{T},\text{ oder }\frac{l}{h} > \sqrt{{}^3/_4\,\frac{E}{T}}\text{ ſein muß.}$$

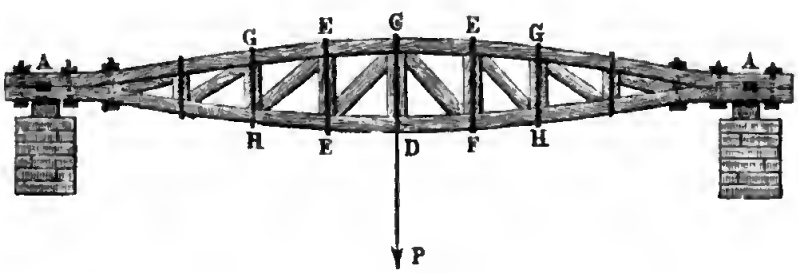
Nun iſt aber für Holz $\frac{T}{E}=\sigma={}^1/_{600}$ (ſ. Band I., §. 212), daher folgt:

$$\frac{l}{h} > \sqrt{{}^3/_4\,.\,600},\text{ oder }\frac{l}{h} > \sqrt{450},\text{ d. i. }\frac{l}{h} > 21{,}21.$$

Es muß alſo der einfache Balken mindeſtens $21{}^1/_4$ mal ſo lang ſein als hoch, wenn aus der Balkenſprengung Nutzen gezogen werden ſoll. Um dieſe Theorie auf einen an beiden Enden unterſtützten Balken, wie Fig. 126 anzuwenden, muß man natürlich ſtatt l, $\frac{l}{2}$ und ſtatt P, $\frac{P}{2}$ einſetzen.

Beiſpiel. Wenn der in Fig. 126 abgebildete Träger aus zwei einfachen

Fig. 126.



Holzbalken von 360 Zoll Länge, 4 Zoll Höhe und 12 Zoll Breite beſteht, ſo ſoll die Sprenghöhe deſſelben

$$a < \tfrac{2}{3}\,\frac{l^2 T}{hE} + \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\,\frac{l^2 T}{hE}\right)^2 + \tfrac{4}{9}\,\frac{l^2 T}{E} - \frac{h^2}{3}},$$

d. i.

$$a < \tfrac{2}{3}\cdot\frac{180^2}{4.600} + \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\cdot\frac{180^2}{4.600}\right)^2 + \tfrac{4}{9}\cdot\frac{180^2}{600} - \tfrac{16}{3}},$$

oder

$$a < 9 + \sqrt{81 + 24 - 5}, \text{ oder } a < 9 + \sqrt{100},$$

d. i. $a < 19$ Zoll ſein.

Machen wir $a = 14$ Zoll, ſo daß der Zwiſchenraum zwiſchen den beiden Balken $= 10$ Zoll ausfällt, ſo folgt für die Tragkraft des ganzen Balkens unter der Vorausſetzung, daß der Tragmodul des zu dieſem Träger verwendeten Holzes nach Bd. I., §. 240, $T = 4000$ Pfund beträgt,

$$\frac{P}{2} = \frac{(588 + 16).48}{3.18.180}\left(1 - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{4.10}{180^2}\cdot 600\right).4000 = 2{,}9827 \,.\, \tfrac{4}{9} \,.\, 4000,$$

$$= 5298,$$

folglich $P = 10596$ Pfund.

Wären die Balken unmittelbar über einander befeſtigt, ſo hätte man

$$\frac{P}{2} = \tfrac{2}{3}\,\frac{bh^2}{l}\cdot T = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{12.16}{180}\cdot 4000 = \tfrac{64}{9}\,.\,400 = 2844,$$

folglich die ganze Tragkraft

$$P = 5688 \text{ Pfund.}$$

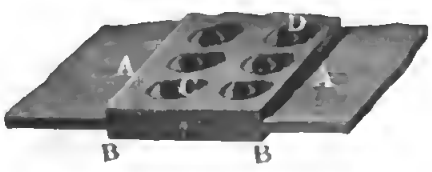
Anmerkung. Zur Beſtimmung derjenigen Sprenghöhe, wobei die Tragkraft ein Maximum iſt, hat man folgende durch Differenziiren gefundene cubiſche Gleichung

$$a^3 + \left(h - \tfrac{2}{3}\,\frac{l^2 T}{hE}\right)a^2 - \left(h^2 + \tfrac{4}{3}\,\frac{l^2 T}{E}\right)a + \tfrac{2}{9}\,hl^2\,\frac{T}{E} + \tfrac{1}{3}\,h^3 = 0$$

anzuwenden.

§. 69 **Eiſenblechverbindungen.** In neueren Zeiten kommen, zumal bei Eiſenbahnbrücken, die Balken aus Eiſenblech häufig in Anwendung. Dieſelben werden aus großen Blechtafeln von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke zuſammengeſetzt, und bilden entweder cylindriſche oder parallelepipediſche Röhren, oder einfache I-förmige Träger. Die Blechtafeln, aus welchen dieſe Balken zuſammengeſetzt ſind, werden ſtumpf an einander geſtoßen und mittels doppelter Blechrippen durch gewöhnliche Nietbolzen feſt mit einander verbunden. An den oberen Verbindungsſtellen haben dieſe Blechrippen entweder die gewöhnliche ſchienenförmige Geſtalt, oder ſie erhalten einen T-förmigen Querſchnitt, um eine größere Steifigkeit zu erzielen. In Fig. 127 iſt eine ſolche Blechverbindung mit zwei einfachen Laſchen AA, BB und den Nieten CD, CD vor Augen geführt, während Fig. 128 eine ſolche Ver-

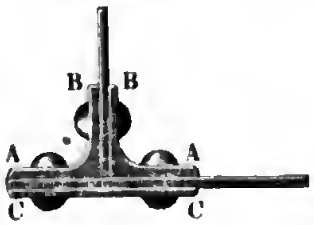
Fig. 127.



bindung mit einer rectangulären Lasche AA und einer T-Rippe BCB darstellt. An den Stellen, wo die Bleche winkelig (gewöhnlich rechtwinkelig) an einander angestoßen sind, werden Winkelrippen mit L-förmigen Quer-

Fig. 128.

Fig. 129.



schnitten angesetzt, wie z. B. aus Fig. 129 zu ersehen ist, wo zwei rechtwinkelig zusammenstoßende Bleche durch zwei Winkelbleche AB, AB und eine Lasche CC mit einander verbunden sind. Um ein größeres Tragvermögen zu erzielen, läßt man auch zuweilen die Tragwände aus doppelten Blechtafeln bestehen, auch verbindet man wohl diese Wände mit den Laschen durch zwei oder mehrere Nietreihen.

Endlich wendet man auch nicht selten einfache Laschen an, oder man legt gar die durch Nieten zu verbindenden Bleche an ihren Rändern einfach über einander. In Fig. 130 ist z. B. das Doppelblech DD an den Stoßfugen

Fig. 130.

durch die einfachen Laschen AA, BB, CC mit doppelten Nietreihen verbunden, Fig. 131 zeigt dagegen die einfache Vernietung ohne Laschen u. s. w.

Fig. 131.

Bei der letzteren Vernietung geht die Spannung S des einen Bleches AC, Fig. 131, nicht unmittelbar auf das folgende Blech BD über, sondern es zerlegt sich diese Spannung $\overline{AS} = S$ in eine Kraft $\overline{DS} = S$ und in ein Kräftepaar $(S, -S)$, welches der Verbindung eine Drehung oder Biegung zu geben sucht. Das Moment dieses Paares ist $S \cdot \overline{CD} = Ss$, wo s die Dicke CD des Bleches bezeichnet. Wenn nun das Ende A des Bleches vollkommen frei wäre, so würde sich dieses Blech in Folge dieses Kräftepaars zur Seite biegen, und deshalb (nach Band I., §. 271) einen Querschnitt:

$$F = \left(1 + \frac{6s}{s}\right) \frac{S}{T} = 7 \frac{S}{T},$$

d. i. 7 mal so groß erhalten müssen, als wenn die Bleche stumpf an einander gestoßen und zu beiden Seiten mit Laschen bedeckt wären. Deshalb sind auch solche excentrische Vernietungen nur dann an-

wendbar, wenn die Blechwände ſich nirgends frei endigen, ſondern ein rings umſchloſſenes Ganze bilden, wobei ſich die an den Nietſtellen bildenden Kräftepaare gegenſeitig aufheben.

Iſt a die Entfernung der Nietaxen von einander, s die Dicke des Bleches, d der Durchmeſſer des Nietbolzens, n die Anzahl der Nietreihen und T der Tragmodul (= 5000 Pfund), ſo hat man die zuläſſige Spannung des durchlochten Bleches rechtwinkelig gegen die Stoßfuge:

$$S_1 = (a - d)\,s\,T = n\,\frac{\pi d^2}{4}\,T,$$

während für das ungenietete Blech dieſe Spannung:

$S = a\,s\,T$ iſt (vergl. Band I., §. 213).

Hiernach hat man:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a-d}{a} = 1 - \frac{d}{a}, \text{ auch } \frac{S_1}{S} = \frac{n\,\frac{\pi d^2}{4}}{ds + \frac{n\pi d^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\,\frac{s}{nd}}.$$

Wäre das Blech nur durch eine einzige Reihe von Nieten verbunden, ſo hätte man $n = 1$, und daher

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi d}{\pi d + 4s} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\,\frac{s}{d}}.$$

z. B. für $d = 2s$:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{\pi + 2} = \frac{22}{22 + 14} = {}^{11}/_{18} = 0{,}61.$$

Dann gingen durch die Vernietung der Bleche $100 - 61 = 39$ Procent an Tragkraft verloren.

Für eine Vernietung mit zwei Nietreihen hat man dagegen

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi d}{\pi d + 2s},$$

daher für die gewöhnliche Nietenſtärke $d = 2s$:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{\pi + 1} = {}^{22}/_{29} = 0{,}76,$$

ſo daß alſo das zuſammengenietete Blech um $100 - 76 = 24$ Procent weniger Tragkraft beſitzt als das ungenietete Blech.

Bei drei Reihen Nieten iſt:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3\pi d}{3\pi d + 4s},$$

alſo für $d = 2s$,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3\pi}{3\pi + 2} = {}^{33}/_{40} = 0{,}825,$$

folglich der Verluſt an Tragkraft durch das Zuſammennieten nur 17,5 Procent.

Eisenblechträger. Die einfachſte Form eines Trägers aus Eiſenblech iſt in Fig. 132 abgebildet. Die Hauptwand deſſelben iſt aus zwei Blechtafeln §. 70.

Fig. 132.

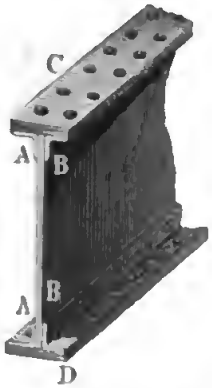
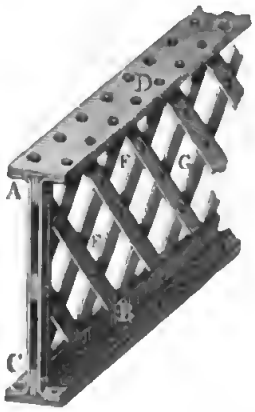


Fig. 133.



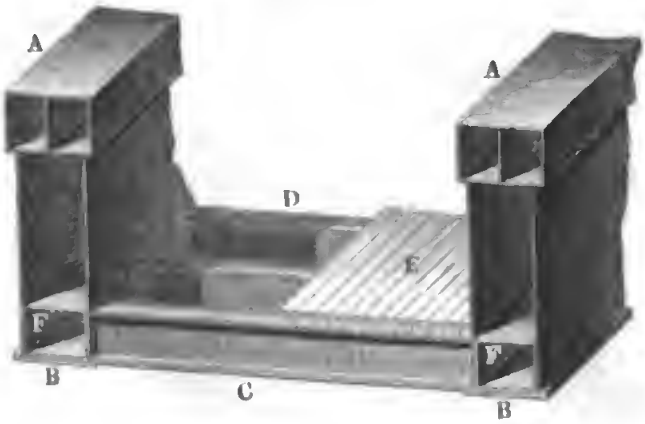
A A und *B B* zuſammengeſetzt, und die beiden Querſchienen *C* und *D* ſind durch vier Winkelbleche und Nietbolzen mit denſelben verbunden. Wenn man ſtatt der Blechtafeln Diagonalſchienen anwendet, wie Fig. 133 vor Augen führt, ſo erhält man einen Gitterbalken, ähnlich wie einen Fachwerkbalken Fig. 118 in §. 65. Dieſe Diagonalſchienen *A B*, *C D* u. ſ. w. ſind nicht allein an ihren Enden zwiſchen je zwei Winkelſchienen, ſondern auch in den Kreuzpunkten *E*, *F*, *G* unter einander ſelbſt vernietet.

Um den Widerſtand der Blechbalken gegen eine ſeitliche Ausbiegung zu erhöhen, iſt denſelben zuerſt von R. Stephenſon eine kaſten- oder röhrenförmige Form gegeben worden, und es ſind hiernach die ſogenannten Röhrenbrücken (franz. ponts en tubes; engl. tubular bridges) von R. Stephenſon und W. Fairbairn entſtanden. Bei den Röhrenbrücken von W. Fairbairn wird die Brücke von zwei Röhrenbalken getragen, wogegen die Stephenſon'ſchen Röhrenbrücken aus einfachen Röhren beſtehen, welche die Fahrbahn in ſich einſchließen.

Eine einfache Brücke, welche auf zwei Röhrenträgern *A B*, *A B* ruht, zeigt Fig. 134 (a. f. S.). Dieſe Träger ſind unter einander durch I-förmige Querbalken *C*, *D* ... aus Eiſenblech verbunden, welche mittels Winkeleiſen an die inneren Wände der Röhrenträger angenietet werden. Auf dieſen Querſchwellen kommt die Brückenbahn *E* zu liegen. Um die Haltbarkeit der Röhrenträger und namentlich den Widerſtand gegen das Zuſammendrücken zu vergrößern, bringt man im Obertheil derſelben noch mehrere Blechwände an, und um die Laſt auf beide Hauptwände eines Trägers zu vertheilen, iſt es auch noch nöthig, dem Untertheil des letzteren durch eine beſondere Bodenplatte *B*, ſowie durch Einziehung einer beſonderen Röhre *F* die nöthige Steifigkeit zu ertheilen.

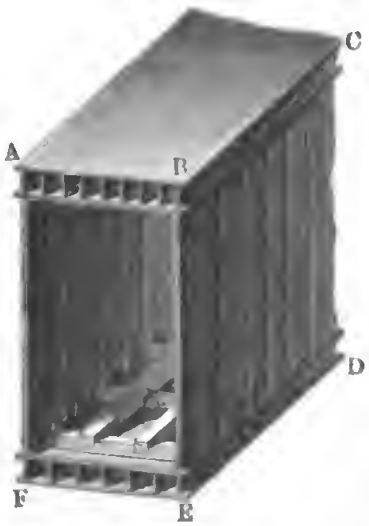
Die Conſtruction einer Röhrenbrücke von Stephenſon, welche die Fahrbahn ganz umſchließt, iſt aus Fig. 135 zu erſehen. Die ganze Brücke beſteht

Fig. 134.



in einem hohlen Parallelepipede $ABCDEF$, welches aus Blechſtücken von 4 bis 12 Fuß Länge, 2 Fuß Breite und $^3/_8$ bis $^3/_4$ Zoll Dicke mittels 1 Zoll dicker Bolzen zuſammengenietet iſt. Zur Erhöhung ihrer Tragkraft iſt dieſe Brücke ſowohl mit einem doppelten Boden als auch mit einer doppelten Decke verſehen, und ſind die dadurch gebildeten hohlen Räume AB und EF durch verticale Scheidewände in Zellen zertheilt, auch erhalten die Tragwände, wie z. B. BD, dadurch noch eine größere Steifigkeit, daß ſie längs der verticalen Stoßfugen mittels doppelter T-Schienen aus langen Blechſtücken zuſammengenietet werden. In der Figur ſind zugleich die Quer- und Längenſchwellen für eine durch die Röhren zu führende Schienenbahn abgebildet. Ueberdies ſind noch diejenigen Stellen der Röhre, wo dieſelbe aufruht, von innen mit gußeiſernen Rahmen abgeſteift, und eben ſo die Wände der unteren Zellenreihe durch gußeiſerne Träger geſtützt. Damit ſich endlich die Brücke in der Hitze und Kälte ungehindert ausdehnen und zuſammenziehen könne, ruht dieſelbe nicht unmittelbar auf den Pfeilern, ſondern ſie liegt auf 24 Paar gußeiſernen Rollen von 6 Zoll Durchmeſſer und 2 Fuß Länge, welche ſich zwiſchen einer gußeiſernen Platte am Boden der Röhre und einer gleichen Platte auf dem Pfeiler bewegen können.

Fig. 135.



Man hat auch den Röhrenträgern eine kreisrunde oder eine elliptiſche

Querſchnittsform gegeben; namentlich hat Brunnel cylindriſche Blechröhrenträger an der Chepſtow-Eiſenbahnbrücke angewendet, an welchen die Brückenbahn aufgehangen iſt. Die Kreisform gewährt jedoch keine vortheilhafte Benutzung des Materials (ſ. Band I., §. 242), auch haben die Verſuche von Fairbairn nachgewieſen, daß ſich die Röhrenträger mit kreisrundem Querſchnitte leicht zuſammendrücken, wobei ſie an den Enden breiter und niedriger und in der Mitte höher und ſchmäler werden. Dieſen Mangel einer conſtanten Querſchnittsform beſitzen, jedoch im geringen Grade, ſogar auch die Träger mit elliptiſchen Querſchnitten.

Tragkraft der Blechträger. Die Tragkraft eines Röhren- oder anderen Blechträgers läßt ſich ohne Weiteres mittels der in Band I. mitgetheilten Elaſticitäts- und Feſtigkeitsformeln berechnen. Setzen wir die Höhe einer Seitenwand des Blechträgers Fig. 135, $= h$ und die Dicke deſſelben, $= s$, ſo haben wir das Maaß des Biegungsmoments beider Seitenwände: §. 71.

$$W_1 = 2\,\frac{h^3 s}{12} = \frac{h^3 s}{6}$$ (ſ. Band I., §. 236).

Bezeichnen wir ferner die Breite der Decke oder des Bodens der Röhre durch b und die Stärke derſelben durch s_1, ſo folgt das Biegungsmoment dieſer beiden horizontalen Begrenzungsſtücke:

$$W_2 = 2\,.\,b\,s_1\left(\frac{h - s_1}{2}\right)^2,$$

oder einfacher, da wir annähernd $h - s_1 = h$ ſetzen können:

$$W_2 = \frac{b h^2 s_1}{2},$$

oder, wenn, wie gewöhnlich, $s_1 = s$ iſt:

$$W_2 = \frac{b h^2 s}{2}.$$

Iſt ferner die Höhe der Zellen über dem Boden und unter dem Deckel, $= h_1$, ſo haben wir das Biegungsmoment der Deckflächen der Zellen:

$$W_3 = \frac{(h - 2h_1)^2\,bs}{2} = {}^1/_2\,(h - 2h_1)^2\,bs.$$

Inſofern die Höhe h_1 der Zellen klein iſt gegen die ganze Röhrenhöhe h, kann man endlich das Biegungsmoment der n Zellenwände ſetzen:

$$W_4 = n\,.\,2\,h_1 s\,.\left(\frac{h - h_1}{2}\right)^2 = {}^1/_2\,n\,(h - h_1)^2 h_1 s.$$

Hiernach iſt nun das Biegungsmoment der ganzen Brückenröhre:

$$W = (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)$$
$$= \left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2h_1)^2 + nh_1\,(h - h_1)^2\right)\frac{s}{2}.$$

Das Gewicht einer Röhre ſammt ihren Zellen iſt bei einer gleichmäßigen Dicke s:

$$G = (2h + 4b + 2nh_1) \,.\, ls \,.\, \gamma,$$

wenn l die Länge der Brücke und γ die Dichtigkeit des Schmiedeeiſens bezeichnet. Durch die hinzukommenden Rippen, Nieten u. ſ. w. wird daſſelbe um die Hälfte größer, daher läßt ſich

$$G = 3\,(h + 2b + nh_1)\,ls\gamma$$

ſetzen.

Zu dieſem Gewichte der leeren Brücke kommt noch die bewegliche Laſt von $Q = 2000$ Pfund pr. Fuß Brückenlänge, folglich läßt ſich das Moment der Kraft, mit welcher die Brücke gebogen wird, ſetzen:

$$M = \frac{Q}{4}\cdot\frac{l}{2} + \frac{G}{4}\cdot\frac{l}{2} = (Q + G)\,\frac{l}{8}$$

$$= [Q + 3\,(h + 2b + nh_1)\,ls\gamma]\,\frac{l}{8}.$$

Endlich hat man hiernach für den Gleichgewichtszuſtand zwiſchen der Laſt und der Feſtigkeit der Brücke, da nach Band I., §. 235,

$$M = \frac{WT}{c} = \frac{WT}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\,W}{h}\,T \text{ iſt:}$$

$$[Q + 3\,(h + 2b + nh_1)\,ls\,.\,\gamma]\,\frac{l}{8}$$

$$= \left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2h_1)^2 + nh_1\,(h - h_1)^2\right)\frac{s\,.\,T}{h},$$

und es läßt ſich hiernach eine Dimenſion der Röhre, z. B. die Höhe h derſelben, berechnen, wenn der Trag- oder Sicherheitsmodul T gegeben iſt.

Wenn wir nun noch das Gewicht eines Cubikzolles Eiſens, $\gamma = 0{,}280$ Pfd. annehmen, ſo können wir daher bei der Berechnung einer Röhrenbrücke folgende Formel zu Grunde legen:

$$\frac{8\,T}{hl}\left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2h_1)^2 + nh_1\,(h - h_1)^2\right)$$

$$- 0{,}84\,(h + 2b + nh_1)\,l - \frac{Q}{s} = 0.$$

Für die I-förmigen Blechträger (Fig. 134) fallen die Zellen weg, dagegen iſt aber hier die Blechſtärke s_1 der Querrippen nicht = der Blechſtärke s der Tragwand. Da man hier nur eine Tragwand hat, ſo iſt deshalb für dieſe Träger

$$\frac{8\,hT}{l}\left(\frac{hs}{6} + bs_1\right) - 0{,}84\,(hs + 2bs_1)\,l - Q = 0$$

zu ſetzen.

Die Größe der Einbiegung der Röhrenbrücke in der Mitte läßt ſich durch die bekannte Formel (ſ. Band I., §. 223)

$$a = \frac{5\,l^3}{384\,WE}\,(Q + G)$$

berechnen. Vielfältigen Beobachtungen zufolge, fällt jedoch diese Einbiegung noch größer aus, wenn sich die Last Q über der Brücke weg bewegt, und nimmt auch mit der Geschwindigkeit dieser Last zu. (Siehe die unten citirten Werke von Becker, Dempsey u. s. w.). Um keine der Haltbarkeit nachtheiligen Durchbiegungen zu erhalten, soll man daher stets mit einer mäßigen Geschwindigkeit über diese wegfahren.

Anmerkung. Bei den Festigkeitsversuchen, welche Hodgkinson an Röhren von kreisförmigen, elliptischen und rectangulären Querschnitten angestellt hat, wurde nicht nur bestätigt, daß die letzteren unter übrigens gleichen Umständen mehr Stärke besitzen, sondern auch noch dargethan, daß die an beiden Enden aufliegende und in der Mitte belastete Röhre von oben herein, also durch Zerdrücken und nicht durch Zerreißen zerbricht. Es hat daher das Schmiedeeisen mit dem Holze die Eigenschaft gemein, daß es dem Zerreißen mehr widersteht als dem Zerdrücken, während es beim Gußeisen umgekehrt ist (s. Band I., §. 212). Deshalb versieht man auch die Decke der Röhre mit mehr Zellen, als den Boden.

Beispiel. Welche Sicherheit besitzt eine Röhrenbrücke von 400 Fuß Länge, 30 Fuß Höhe und 14 Fuß Breite, wenn dieselbe aus Eisenblech von $\frac{5}{8}$ Zoll Stärke zusammengesetzt und an jeder der beiden Grundflächen mit 7 Zellen von 2 Fuß Höhe verstärkt wird und wenn sie außer ihrem Gewichte noch eine auf die ganze Brückenlänge gleichmäßig vertheilte Last von 800000 Pfund tragen soll?

Es ist hier

$$l = 400 . 12,\ h = 30 . 12,\ h_1 = 2 . 12,\ b = 14 . 12,\ s = \tfrac{5}{8} \text{ und } n = 7,$$

daher der Tragmodul:

$$T = \frac{[Q + 0{,}84\ (h + 2b + nh_1)\ ls]\ hl}{8s\left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\ (h - 2h_1)^2 + nh_1\ (h - h_1)^2\right)}$$

$$= \frac{[800000 + 0{,}84 . 144 . 400 . \tfrac{5}{8}\ (30 + 2 . 14 + 7 . 2)] . 30 . 400}{8 . \tfrac{5}{8} . 12\left(\frac{30^3}{3} + 14 . 30^2 + 14 . 26^2 + 14 . 28^2\right)}$$

$$= \frac{200\ (800000 + 420 . 72 . 72)}{9000 + 12600 + 9464 + 10976} = \frac{200 . 2977280}{42040} = 14164 \text{ Pfund.}$$

In §. 212, Band I., ist $T = 20000$ Pfund angegeben. Durch Versuche ist gefunden worden im Mittel $K = 15$ Tonnen $= 30000$ Pfund, wonach die Sicherheit reichlich die zweifache wäre. Nimmt man den Elastieitätsmodul des Schmiedeeisens

$$E = 25000000 \text{ Pfund an,}$$

setzt die bewegliche Last

$$Q = 800000 \text{ Pfund,}$$

das Gewicht der leeren Brücke

$$G = 3(h + 2b + nh_1)\ ls\gamma = 2177280 \text{ Pfund,}$$

und das Maaß des Biegungsmomentes:

$$W = \left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\ (h - 2h_1)^2 + nh_1\ (h - h_1)^2\right)\frac{s}{2}$$

$$= 42040 . 1728 . \tfrac{5}{16} = 210200 . 108 = 22701600,$$

so erhält man die entsprechende Durchbiegung der Röhre in der Mitte:

$$a = (Q + G)\,\frac{5\,l^3}{384\;WE} = \frac{(800000 + 2177280)\;64000000}{24 \cdot 42040 \cdot 25000000}$$

$$= \frac{2977280 \cdot 64}{24 \cdot 42040 \cdot 25} = 7{,}55 \text{ Zoll.}$$

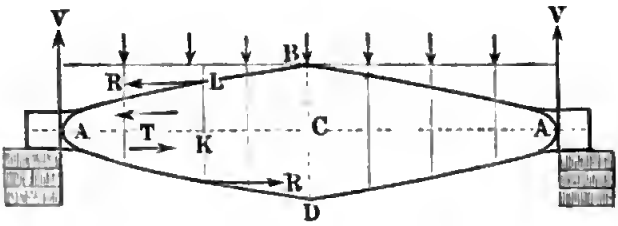
Die bewegliche Belastung Q giebt natürlich nur die Einbiegung:

$$a_1 = \frac{5\,Q\,l^3}{384\;WE} = \frac{Q}{Q + G}\,a = \frac{800000}{2977280}\,a = 0{,}268\,a = 2 \text{ Zoll.}$$

Durch die Nieten und durch die Rippen der Winkelbleche werden natürlich die gefundenen Größen noch etwas abgeändert.

§. 72 **Bogenträger mit Blechfüllung.** Wenn jede der Rippen, Streben und Zugstangen der im Obigen behandelten zusammengesetzten Träger an allen Stellen einen und denselben Querschnitt erhält, so soll man, um Material zu sparen, die Höhe derselben von der Mitte nach den Stützpunkten zu, allmälig an Höhe abnehmen lassen. Ist die Belastung des Trägers $A\,A$, Fig. 136,

Fig. 136.



dessen Länge $2\,C\,A = l$ sein möge, pr. Längeneinheit $= q$, so hat man die Verticalkraft in jedem der Stützpunkte, $V = {}^1/_2\,q\,l$, und das Biegungsmoment für die Balkenmitte C, ${}^1/_2\,Vl - {}^1/_4\,Vl = {}^1/_4\,Vl = {}^1/_8\,q\,l^2$; sowie die Verticalkraft eines Balkenstückes von der Länge $A\,K = x$, $V - qx$ und das Moment der Biegung in K, $Vx - {}^1/_2\,q\,x^2$.

Bezeichnet man nun noch die veränderliche Höhe $2\,K\,L$ des Trägers in K, durch y, sowie die Höhe $B\,D$ desselben in der Mitte C, durch h, und nimmt man an, daß die ganze Last nur von den Hauptrippen $A\,B\,A$ und $A\,D\,A$ getragen wird, so sind die Axenspannungen jeder Rippe annähernd,

$$R = \frac{Vx - {}^1/_2\,qx^2}{y} = \frac{qx}{2\,y}\,(l - x),$$

und nimmt folglich in der Mitte C, wo $x = \frac{l}{2}$ ausfällt, den Werth

$$R_m = \frac{q\,l^2}{8\,h} \text{ an.}$$

Bei einem Träger mit constanter Höhe h ist die Rippenspannung

$R = \frac{q\,x}{2\,h}\,(l - x)$, und zwar für $x = 0$, d. i. am Ende des Trägers, $= 0$, und für $x = \frac{l}{2}$, d. i. in der Mitte C deſſelben, $= \frac{q\,l^2}{8\,h}$. Dieſer allmälig von Null bis $\frac{q\,l^2}{8\,h}$ wachſenden Spannung entſprechend müßte, um kein Material zu verſchwenden, auch der Querſchnitt der Rippen von den Enden nach der Balkenmitte zu allmälig bis $F = \frac{q\,l^2}{8\,h\,T}$ zunehmen.

Wenn man aber eine veränderliche Höhe y anwendet, ſo kann man längs des ganzen Balkens eine conſtante Spannung R erhalten, denn es iſt dann nur der Gleichung

$$R = \frac{q\,x}{2\,y}\,(l - x) = \frac{q\,l^2}{8\,h}, \text{ d. i.}$$

$$y = \frac{4\,h\,x}{l^2}\,(l - x),$$

Genüge zu leiſten.

Hiernach hat man z. B. in den Abſtänden

$$x = {}^1/_8\,l,\ {}^2/_8\,l,\ {}^3/_8\,l \text{ und } {}^4/_8\,l$$

vom Trägerende A, die erforderlichen Trägerhöhen eines ſolchen paraboliſchen Trägers

$$y = {}^7/_{16}\,h,\ {}^3/_4\,h,\ {}^{15}/_{16}\,h, \text{ und } h.$$

Die verticale Schubkraft des Balkens im Abſtande $\overline{AK} = x$, $P = V - q\,x = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ fällt in der Mitte C, wo $x = \frac{l}{2}$ iſt, Null aus, und wächſt dagegen nach den Enden zu, ſo daß ſie an denſelben, wo $x =$ Null iſt, den Werth $P = V = \frac{q\,l}{2}$ annimmt.

Beſteht nun die Füllung zwiſchen den Hauptrippen in einer einfachen Blechwand von der Dicke s und dem veränderlichen Querſchnitt $s\,y$, ſo hat man die Schubkraft des Trägers pr. Flächeneinheit, und zwar nicht bloß in verticaler, ſondern auch in horizontaler Richtung

$$T = \frac{P}{s\,y} = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{s\,y}.$$

Bei einem Träger mit conſtanter Höhe $y = h$ wäre

$$T = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{s\,h},$$

und zwar Null, für $x = \frac{l}{2}$, und das Maximum $\frac{q\,l}{2\,s\,h}$, für $x = 0$. Wenn man daher die Stärke s der Füllung nicht variabel, ſondern an allen Stellen $s = \frac{q\,l}{2\,h\,T}$ macht, ſo fällt ein ſolcher Träger auch aus dieſem Grunde unnöthig ſchwer aus. Giebt man aber dem Träger die durch die Gleichung $y = \frac{4\,h\,x}{l^2}(l - x)$ bedingte Parabelform, ſo würde, da hiernach für $x = 0$, auch $y = 0$ ausfällt, zur Erlangung einer endlichen Spannung T, die Wanddicke $s = \frac{q\,l}{2\,y\,T} = \frac{q\,l}{2\,T.0} = \infty$ nöthig ſein. Aus dieſem Grunde erhält ein ſolcher Träger an den Enden die Höhe $h_1 = \frac{q\,l}{2\,s\,T}$, und erſt von der Stelle an die paraboliſche Form, wo $y = h_1$ ausfällt.

§. 73 **Bogenträger mit Fachwerk.** Iſt der Raum zwiſchen den Rippen durch Fachwerk ausgefüllt, ſo werden die Schubkräfte des Trägers $ABAD$,

Fig. 137.

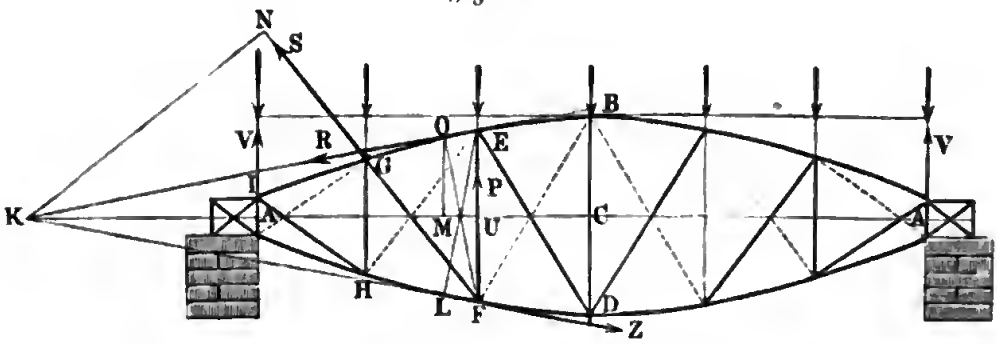


Fig. 137, durch die Streben und Zugſtangen aufgenommen. Es ſind dann die Verticaldrücke, welche die Streben BD, EF, GH u. ſ. w. von der oberen nach der unteren Rippe übertragen, $\frac{1}{2}\,q\,c$, $\frac{3}{2}\,q\,c$, $\frac{5}{2}\,q\,c$ u. ſ. w., wenn c den Abſtand der benachbarten Streben von einander bezeichnet. Ebenſo hat man die Züge, welche die Zugſtangen DE, FG, HI auszuhalten haben, der Reihe nach

$$\frac{1}{2}\frac{q\,c}{\sin.\,\alpha_1},\ \frac{3}{2}\frac{q\,c}{\sin.\,\alpha_2},\ \frac{5}{2}\frac{q\,c}{\sin.\,\alpha_3}\ \text{u. ſ. w.},$$

wenn α_1, α_2, α_3 u. ſ. w. die Neigungswinkel dieſer Stangen gegen den Horizont bezeichnen, und die Neigungen der Rippen gegen denſelben klein genug ſind, um außer Acht gelaſſen werden zu können.

Wie bei den Trägern mit Ausfüllungswänden die Schubkräfte von der

Mitte nach den Enden des Trägers hin allmälig zunehmen, ſo wachſen alſo auch bei den Fachwerksträgern, die Druckkräfte in den Streben, und bei gleichen Neigungswinkeln der Zugſtangen, auch die Zugkräfte in denſelben von der Mitte aus nach den Trägerenden. Es findet folglich auch in dem Fachwerk eines Fachwerksträgers eine Verſchwendung an Material ſtatt, wenn bei gleicher Höhe der Streben oder gleicher Neigung der Zugſtangen, die Querſchnitte dieſer Fachwerkstheile auf der ganzen Länge des Trägers immer dieſelben bleiben, nämlich $F = \frac{V}{T} = \frac{ql}{2T}$ für die Streben und $F_1 = \frac{ql}{2T_1 \sin.\alpha}$ für die Zugſtangen, wobei T und T_1 die entſprechenden Tragmodel bezeichnen. Da nun bei einem paraboliſchen Träger die Strebenlängen (y) nach den Enden zu abnehmen, während dieſelben bei dem rectangulären Träger conſtant (h) ſind, ſo fallen auch die Gewichte der Streben bei den erſteren kleiner aus als bei den letzteren. Anders iſt aber dieſes Verhältniß in Betracht der Zugſtangen. Bei dem conſtanten Abſtande $c = \frac{l}{n}$ zwiſchen den benachbarten Streben und der Höhe y derſelben folgt für den Neigungswinkel α derſelben, $tang.\alpha = \frac{y}{c} = \frac{ny}{l}$, und das Volumen einer Zugſtange:

$$\frac{F_1 c}{cos.\alpha} = \frac{qcl}{2T_1 \sin.\alpha \cos.\alpha} = \frac{ql}{2T_1}\left(y + \frac{c^2}{y}\right).$$

Da y kleiner als h iſt, ſo folgt, daß das Volumen $\frac{F_1 h}{\sin.\alpha} = \frac{ql}{2T_1}\left(h + \frac{c^2}{h}\right)$ der Zugſtange eines rectangulären Fachwerksträgers nur bei einem kleinen Abſtande c größer iſt als das einer ſolchen Stange bei dem paraboliſchen Fachwerksträger unter übrigens gleichen Verhältniſſen.

Wenn die Hauptrippen um größere Winkel von dem Horizont abweichen, ſo fallen die im Obigen gefundenen Spannungen der Fachwerksträger etwas anders aus. Es laſſen ſich dieſe dann am einfachſten durch Anwendung der Theorie der Momente (ſ. §. 64) ermitteln. Man findet z. B. hiernach die Spannung R der oberen Rippe, in der Nähe der Strebe EF, welche um $AU = x$ vom Ende A abſteht, wenn man von F aus ein Perpendikel $FO = r$ gegen die Richtung dieſer Rippe in E fällt, und nun das Moment von R in Hinſicht auf F,

$$Rr = Vx - \tfrac{1}{2} qx^2, = \tfrac{1}{2} qx(l - x) \text{ ſetzt.}$$

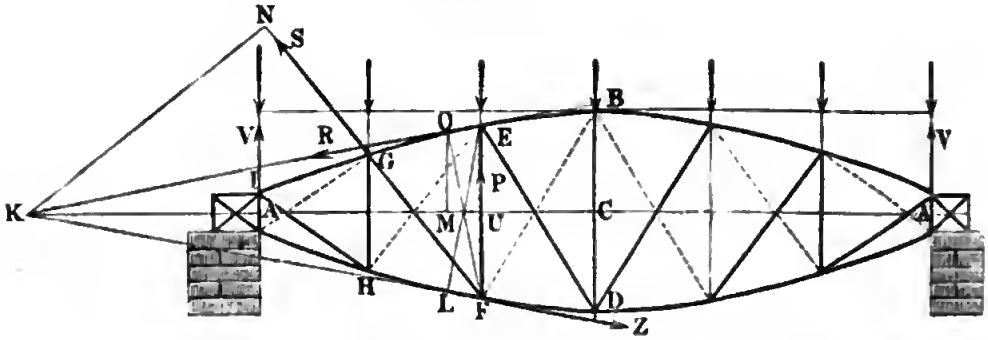
Hiernach iſt der Druck in der oberen Hauptrippe

$$1)\quad R = \tfrac{1}{2} q \frac{x}{r}(l - x).$$

Ebenſo ergiebt ſich die Spannung Z der unteren Rippe nahe bei EF, wenn

man von E das Perpendikel $EL = Z$ gegen die Richtung dieser Rippe in F fällt, und das Moment von Z in Hinsicht auf E,

Fig. 138.



$$Zz = Vx - \frac{qx^2}{2} = {}^1/_2 qx\,(l - x) \text{ angiebt.}$$

Hiernach folgt der Zug in der unteren Hauptrippe:

$$2)\quad Z = {}^1/_2 \frac{qx}{z}\,(l - x).$$

Um ferner die Spannungen P und S der Strebe EF und der Zugstange FG zu finden, sehen wir den Durchschnittspunkt K der Richtungen der Kräfte R und Z als Drehungspunkt an, und drücken die Momente der Kräfte P und Z in Hinsicht auf diesen Punkt aus. Bezeichnet p den Abstand KU des Punktes K von der Axe der Strebe EF, sowie s den Abstand KN dieses Punktes von der Axe der Zugstange FG, so hat man

$$Pp = Ss = V\,(p - x) - qx\,(p - {}^1/_2 x),$$

daher ist der Druck in der Strebe EF:

$$3)\quad P = \frac{V(p-x) - qx(p - {}^1/_2 x)}{p} = q\left(({}^1/_2 l - x) - \frac{x(l-x)}{2p}\right),$$

und der Zug in der Zugstange FG

$$4)\quad S = \frac{V(p-x) - qx(p - {}^1/_2 x)}{s} = \frac{q}{s}\left(p({}^1/_2 l - x) - \frac{x(l-x)}{2}\right).$$

Wenn diese paraboliſchen Fachwerksträger bei Brücken zur Anwendung kommen, wo, wie aus §. 65 bekannt ist, die Stelle der größten Durchbiegung von der Größe und Ausdehnung der mobilen Last, z. B. eines Dampfwagenzuges, mit abhängig ist, muß man die Träger auch noch mit Zugstangen versehen, welche die Streben nach der entgegengesetzten Seite ziehen und daher mit den Hauptzugstangen sogenannte Andreaskreuze bilden, wie in der Figur durch punktirte Linien angedeutet ist.

(§. 74) **Theorie der Tragbögen.** Es ist für die Praxis auch wichtig, die Biegungsverhältnisse urſprünglich krummer Balken oder Bögen, zumal gußeiserner Bögen zu kennen. Die allgemeine Theo-

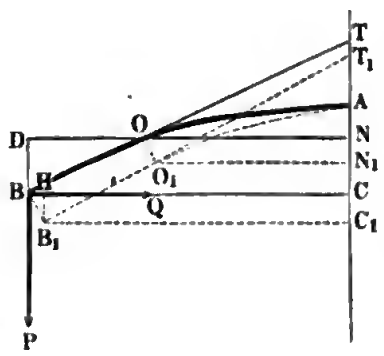
rie derselben ist von der Theorie der Biegung gerader Balken nicht wesentlich verschieden; nur hat man hier das Moment Px der biegenden Kraft nicht $= \frac{WE}{r}$ (s. Band I., §. 215), oder da nach Art. 33 der analyt. Vorlehren, $r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ ist, Px nicht $= -\frac{WE\partial\alpha}{\partial s}$ zu setzen, sondern man muß

$$Px = WE\left(\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s}\right)$$

einführen, weil durch dieses Moment nur der Krümmungswinkel $\partial\alpha$ in $\partial\alpha_1$ umgeändert wird, und daher das Moment zum Biegen um $\partial\alpha$ wegfällt.

Wird durch die Wirkung der biegenden Kräfte die Axe AOB, Fig. 139, eines ursprünglich krummen Balkens in die Form AO_1B_1 umgeändert, so gehen die Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ in die Coordinaten $AN_1 = x_1$ und $N_1O_1 = y_1$ über, und es wird aus dem Tangentenwinkel $NTO = \alpha$ der Tangentenwinkel $N_1T_1O_1 = \alpha_1$, während die Bogenlänge $AO = AO_1 = s$ unverändert bleibt. Bestehen die biegenden Kräfte in einer Verticalkraft P und in einer Horizontalkraft Q, so haben wir das Moment beider Kräfte in Beziehung auf den Punkt O,

Fig. 139.



$$M = P.\overline{OD} + Q.\overline{BD}$$
$$= P(b - y) + Q(a - x),$$

wenn a und b die Höhe AC und die Sehne BC des Bogens AB bezeichnen. Es ist folglich:

$$WE\left(\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s}\right) = P(b - y) + Q(a - x),$$

und daher

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\int[P(b - y) + Q(a - x)]\,\partial s}{WE}.$$

Da $\alpha - \alpha_1$ ein kleiner Bogen ist, so können wir

$$cos.\alpha - cos.\alpha_1 = -2sin.\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{2}\right)sin.\left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right) = -sin.\alpha\,.\,(\alpha - \alpha_1)$$

und

$$sin.\alpha - sin.\alpha_1 = 2cos.\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{2}\right)sin.\left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right) = cos.\alpha\,.\,(\alpha - \alpha_1),$$

folglich auch

$$cos.\,\alpha - cos.\,\alpha_1 = -\frac{sin.\,\alpha}{WE}\int [P\,(b-y) + Q\,(a-x)]\,\partial s$$

und

$$sin.\,\alpha - sin.\,\alpha_1 = \frac{cos.\,\alpha}{WE}\int [P\,(b-y) + Q\,(a-x)]\,\partial s$$

ſetzen.

Nun iſt aber nach Art. 32, Band I., der analyt. Hülfslehren

$$sin.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial s},\quad cos.\,\alpha = \frac{\partial x}{\partial s},$$

alſo auch

$$sin.\,\alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s},\quad cos.\,\alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s},$$

ſowie

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}\ \text{annähernd} = \partial y\left[1 + {}^1/_2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right],$$

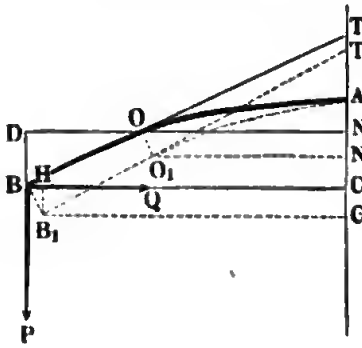
daher läßt ſich auch ſetzen:

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE}\int [P(b-y) + Q(a-x)]\left[1 + {}^1/_2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\partial y,$$

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{\partial x}{WE}\int [P(b-y) + Q(a-x)]\left[1 + {}^1/_2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\partial y.$$

(§. 75) **Parabolische Tragbögen.** In den meiſten Fällen haben wir es nur mit ſehr gedrückten Bögen zu thun, welche wir ſtets als Parabelbögen anſehen und behandeln können. Setzen wir nun die Bogenhöhe AC derſelben $= a$ und die Bogenweite $BC = b$, ſo giebt uns die Parabelgleichung

Fig. 140.



$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{AN}{AC},\ \text{d. i.}\ \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a},$$

es folgt daher

$$x = \frac{ay^2}{b^2},\ \partial x = \frac{2ay\partial y}{b^2}\ \text{und}$$

$$\partial s = \partial y\left[1 + {}^1/_2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right] = \partial y\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right),$$

ſowie

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE}\int\left[P(b-y) + Qa\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right)\partial y$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2ay\partial y}{WEb^2}\int\left[P(b-y) + Qa\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right)\partial y,$$

d. i.

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE}\left\{P\left(by - \frac{y^2}{2}\right) + Qa\left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) + \frac{2a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{by^2}{3} - \frac{y^4}{4}\right) + Qa\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5b^2}\right)\right]\right\}$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2a\partial y}{WEb^2}\left\{P\left(by^2 - \frac{y^3}{2}\right) + Qa\left(y^2 - \frac{y^4}{3b^2}\right) + \frac{2a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{by^4}{3} - \frac{y^5}{4}\right) + Qa\left(\frac{y^4}{3} - \frac{y^6}{5b^2}\right)\right]\right\}.$$

Durch nochmaliges Integriren ergiebt ſich nun

$$x_1 - x = \frac{1}{WE}\left\{P\left(\frac{by^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + Qa\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12b^2}\right) + \frac{2a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{by^4}{12} - \frac{y^5}{20}\right) + Qa\left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^6}{30b^2}\right)\right]\right\}$$

und

$$y_1 - y = -\frac{2a}{WEb^2}\left\{P\left(\frac{by^3}{3} - \frac{y^4}{8}\right) + Qa\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15b^2}\right) + \frac{2a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{by^5}{15} - \frac{y^6}{24}\right) + Qa\left(\frac{y^5}{15} - \frac{y^7}{35b^2}\right)\right]\right\}.$$

Setzt man in dieſen Gleichungen $y = b$, ſo geben ſie uns in $x_1 - x$ die Höhe $B_1 H = a_1$, um welche das Ende des Balkens durch die Kräfte P und Q herabgezogen wird, und in $y - y_1$ die horizontale Verkürzung $BH = b_1$, welche der Balken durch eben dieſe Kräfte erleidet. Es iſt hiernach

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) + \frac{Q}{WE}\left({}^5/_{12}\, ab^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$

und

$$b_1 = \frac{P}{WE}\left({}^5/_{12}\, ab^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{Q}{WE}\left({}^8/_{15}\, a^2 b + \frac{16a^4}{105b}\right)$$

Iſt die Horizontalkraft $Q = 0$, ſo hat man

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) \text{ und } b_1 = \frac{P}{WE}\left({}^5/_{12}\, ab^2 + \frac{a^3}{10}\right),$$

und iſt überdies $a = 0$, hat man es alſo mit einem geraden Barren zu thun, ſo hat man, wie bekannt,

$$a_1 = \frac{Pb^3}{3\,WE} \text{ und } b_1 = 0 \text{ (ſ. Band I., §. 217).}$$

(§. 76) Ein an beiden Enden B und B durch eine Horizontalebene unterſtützter und in der Mitte mit einem Gewichte G belaſteter Bogen BAB,

Fig. 141, drückt auf jede ſeiner Stützen mit der Verticalkraft $P = -\frac{1}{2}G$, und der Horizontalkraft $Q = 0$, da er ungehindert horizontal ausweichen kann. Es iſt folglich die Senkung des Scheitels

$$AA_1 = a_1 = \frac{G}{2WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right)$$

und die Horizontalbewegung der Enden B und B_1

$$BB_1 = b_1 = \frac{G}{2WE}\left(\frac{5ab^2}{12} + \frac{a^3}{10}\right).$$

Bei einem geraden Balken von der Länge $l = 2b$, welcher in ſeiner Mitte mit G belaſtet iſt, hat man (Band I., §. 217)

$$a_1 = \frac{1}{16}\frac{Pl^3}{3WE} = \frac{1}{2}\frac{Gb^3}{3WE}$$

alſo kleiner als in dem vorliegenden Falle.

Fig. 141.

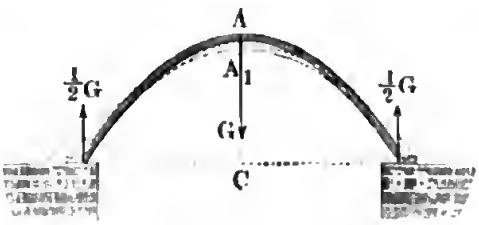
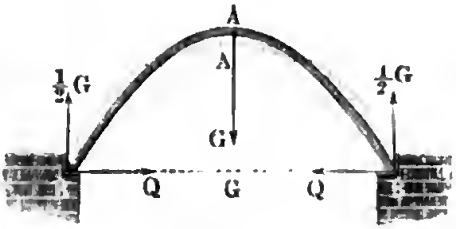


Fig. 142.



Stemmt ſich der in der Mitte durch ein Gewicht G belaſtete Bogen BAB, Fig. 142, an den Enden B und B gegen feſte Stützen, ſo iſt ein Verrücken in horizontaler Richtung unmöglich und daher $b_1 = 0$. Uebrigens iſt auch hier $P = -\frac{1}{2}G$, dagegen folgt nun

$$Q = \frac{1}{2}G\frac{\left(\frac{5}{12}ab^2 + \frac{a^3}{10}\right)}{\frac{8}{15}a^2 b + \frac{16}{105}\frac{a^4}{b}} = \frac{1}{2}G\left(\frac{25b}{32a} - \frac{a}{28b}\right)$$

und die Senkung des Scheitels:

$$a_1 = \frac{G}{2WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) - \frac{G}{2WE}\left(\frac{25b}{32a} - \frac{a}{28b}\right)\left(\frac{5}{12}ab^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$

$$= \frac{G}{2WE}\left(\frac{b^3}{128} + \frac{23}{6720}a^2 b\right),$$

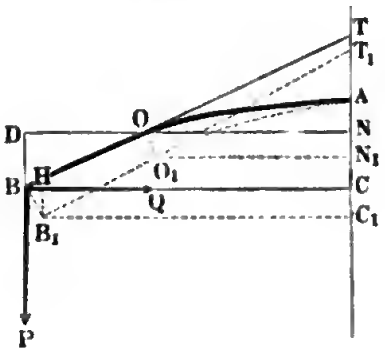
oder meiſt genau genug,

$$a_1 = \frac{Gb^3}{256\,WE},$$

d. i. $42\frac{2}{3}$mal ſo klein als beim geraden Balken von gleicher Spannweite $2b$.

Gleichmässig belastete Tragbögen. Wenn der Bogen AB, (§. 77) Fig. 143, auf seiner ganzen Länge belastet wird, so daß jede Längeneinheit der Horizontalprojection desselben q trägt, so hat man das Kraftmoment, welches ein Stück $\overline{OB}$ um O biegt

Fig. 143.



$$q \cdot \overline{OD} \cdot {}^1/_2 \overline{OD}$$
$$= {}^1/_2 q \, (\overline{BC} - \overline{ON})^2$$
$$= {}^1/_2 q \, (b - y)^2,$$

und daher nach (§. 75):

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE} \int {}^1/_2 q \, (b^2 - 2by + y^2) \left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right) \partial y$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2ay\partial y}{WEb^2} \int {}^1/_2 q \, (b^2 - 2by + y^2) \left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right) \partial y.$$

Durch wiederholtes Integriren ergiebt sich hieraus:

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{q\partial y}{2WE} \left[b^2y - by^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^3}{3} - {}^1/_2 by^4 + \frac{y^5}{5}\right)\right],$$

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{aqy\partial y}{WEb^2} \left[b^2y - by^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^3}{3} - {}^1/_2 by^4 + \frac{y^5}{5}\right)\right],$$

und

$$x_1 - x = \frac{q}{2WE} \left[\frac{b^2y^2}{2} - \frac{by^3}{3} + \frac{y^4}{12} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^4}{12} - \frac{by^5}{10} + \frac{y^6}{30}\right)\right]$$

sowie

$$y_1 - y = -\frac{aq}{WEb^2} \left[\frac{b^2y^3}{3} - \frac{by^4}{4} + \frac{y^5}{15} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^5}{15} - \frac{by^6}{12} + \frac{y^7}{35}\right)\right].$$

Setzen wir $y = b$, so erhalten wir die verticale Senkung des Bogenendes:

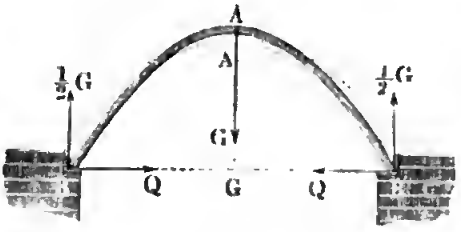
$$HB_1 = a_1 = \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60}\right),$$

und die horizontale Verschiebung desselben:

$$BH = b_1 = \frac{q}{WE}\left(\frac{3ab^3}{20} + \frac{a^3b}{42}\right).$$

Diese Theorie läßt sich auch auf einen Bogen BAB, Fig. 144, anwenden, welcher an seinen beiden Enden B und B unterstützt, übrigens aber mit einem auf die Horizontalprojection

Fig. 144.



$$BB = 2b$$

gleichmäßig vertheilten Gewichte $2bq$ belastet wird. Es ist hier außer dem an jedem Schenkel niederziehenden Gewicht bq noch an jedem Ende eine Verticalkraft P und eine Horizontalkraft Q wirksam und daher die Veränderung a_1 in a und b_1 in b aus den beiderlei Kräften entsprechenden Veränderungen zusammengesetzt, also mit Berücksichtigung des §. 75 Gefundenen:

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2b}{15}\right) + \frac{Q}{WE}\left(\tfrac{5}{12}ab^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60}\right)$$

und

$$b_1 = \frac{P}{WE}\left(\tfrac{5}{12}ab^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{Q}{WE}\left(\tfrac{8}{15}a^2b + \frac{16a^4}{105b}\right) + \frac{q}{WE}\left(\frac{3ab^3}{20} + \frac{a^3b}{42}\right).$$

Nun ist aber im vorliegenden Falle $P = -qb$ und $b_1 = 0$ anzunehmen; es folgt daher:

$$Q\left(\tfrac{8}{15}a^2b + \frac{16a^4}{105b}\right) = q\left(\tfrac{5}{12}ab^3 + \frac{a^3b}{10}\right) - q\left(\frac{3ab^3}{20} + \frac{a^3b}{42}\right)$$

$$= q\left(\tfrac{4}{15}ab^3 + \tfrac{8}{105}a^3b\right),$$

d. i.

$$Q = \frac{qb^2}{2a},$$

und hieraus wieder:

$$a_1 = -\frac{qb}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2b}{15}\right) + \frac{qb^2}{2WEa}\left(\tfrac{5}{12}ab^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$

$$+ \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60}\right) = 0.$$

Es findet also in diesem Falle gar keine Senkung des Scheitels statt. Ueberhaupt erleidet hier der Bogen keine andere Formveränderung als diejenige, welche aus der Spannung desselben entspringt; wir haben es daher hier mit einer sogenannten Gleichgewichtscurve zu thun.

Wäre aber der Bogen überdies noch in seiner Mitte mit einem Gewichte G belastet, so würde die Horizontalkraft am Fuße B

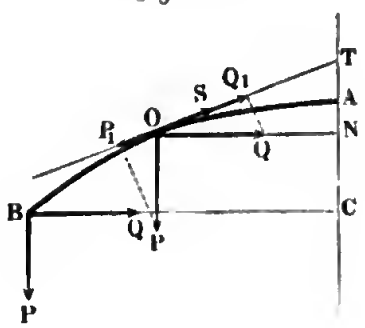
$$Q = \frac{qb^2}{2a} + {}^1/_2\, G\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)$$

betragen, und es wäre die Senkung im Scheitel, wie oben (§. 76):

$$a_1 = \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{b^3}{128} + \frac{23\,a^2 b}{6720}\right).$$

Spannung der Bögen. Was die Spannung S oder die Zusammendrückung des Bogens in seiner Axe anlangt, so ist diese die Summe der in der Tangentenrichtung wirkenden Seitenkräfte von den Kräften P und Q, Fig. 145. Mittels des Tangentenwinkels $NTO = \alpha$ ergeben sich diese Seitenkräfte P_1 und Q_1 von P und Q durch die Formeln (§. 78)

Fig. 145.



$$P_1 = P\cos.\alpha$$

und

$$Q_1 = Q\sin.\alpha;$$

es ist daher die Spannung

$$\begin{aligned} S &= Q_1 - P_1 \\ &= Q\sin\alpha - P\cos.\alpha \\ &= Q\frac{\partial y}{\partial s} - P\frac{\partial x}{\partial s} \\ &= \frac{Q\partial y - P\partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}, \end{aligned}$$

also für einen Parabelbogen, wo

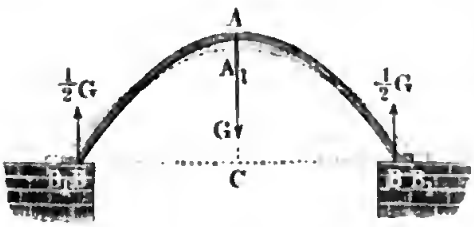
$$\partial x = \frac{2\,a\,y\,\partial y}{b^2} \text{ und annähernd } \partial s = \partial y\left(1 + \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right)$$

ist:

$$S = \frac{Q - \frac{2\,a\,y}{b^2}P}{1 + \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}}, \text{ annähernd} = \left(Q - \frac{2\,a\,y}{b^2}P\right)\left(1 - \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right)Q - \frac{2\,a\,y}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right)P.$$

Fig. 146.



Wenn der Bogen BAB, Fig. 146, durch ein in der Mitte hängendes Gewicht G gespannt wird, so hat man:

$$Q = 0 \text{ und } P = -\frac{G}{2},$$

daher die Spannung:

$$S = \frac{a\,y}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right)G.$$

Da $\frac{a}{b}$ ein kleiner Bruch iſt, ſo fällt S am größten aus für $y = b$,

d. i. $$S = \frac{a\,G}{b}.$$

Am Scheitel, alſo für $y = 0$, iſt $S = 0$.

In dem Falle, welchen Fig. 144 darſtellt, wo ſich der in der Mitte mit G belaſtete Bogen gegen ein feſtes Hinderniß ſtemmt, hat man

$$P = -\,{}^1/_2\,G \text{ und } Q = {}^1/_2\,G\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right),$$

daher die Spannung:

$$S = \frac{a\,y}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)G + \left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\frac{G}{2}$$

$$= \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right)G,$$

wenn man die höheren Potenzen von a vernachläſſigt. Dieſer Ausdruck wird mit $y = -\,{}^{25}/_{32}\cdot\frac{y^2}{b}$ ein Maximum, und zwar für $y = {}^{16}/_{25}\,b$. Der entſprechende Maximalwerth iſt:

$$S = \left(\frac{25}{32}\,\frac{b}{a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2}.$$

Wenn dieſer Bogen gleichmäßig belaſtet iſt, ſo haben wir:

$$P = -\,q\,y \text{ und } Q = \frac{q\,b^2}{2\,a},$$

daher

$$S = \left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)\frac{q\,b^2}{2\,a} + \frac{2\,a\,y}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)q\,y$$

$$= \frac{q\,b^2}{2\,a} + \frac{q\,a\,y^2}{b^2},$$

und trägt er überdies noch im Scheitel das Gewicht G, ſo iſt

$$S = \frac{q\,b^2}{2\,a} + \frac{q\,a\,y^2}{b^2} + \left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right)G.$$

Differenziirt man dieſen Ausdruck in Beziehung auf y und ſetzt $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, ſo erhält man den Werth für y, welcher S zum Maximo macht, nämlich:

$$2\,q\,y + \left(1 - {}^{25}/_{16}\,\frac{y}{b}\right)G = 0,$$

d. i.

$$y = \frac{16\,b\,G}{25\,G - 32\,q\,b}.$$

Da y nicht größer als b sein kann, so folgt, daß in den Fällen, wenn

$$16\,G > 25\,G - 32\,qb, \text{ d. i. } G < {}^{32}/_{9}\,qb$$

ist, $y = b$ angenommen werden muß, und der Maximaldruck an den Enden B und B statthat.

Durch die Spannung wird auch die Bogenlänge verändert; besteht (§. 79)
dieselbe in einem Drucke, so wird der Bogen verkürzt, und besteht sie in einem Zuge, so erleidet der Bogen eine Ausdehnung. Wird das Element ∂s des Bogens durch die Spannung S in ∂s_1 umgeändert, so hat man bei dem Querschnitte F des Bogens (s. Band I., §. 204):

$$S = \left(\frac{\partial s - \partial s_1}{\partial s}\right) FE,$$

und es ist hiernach:

$$s - s_1 = \int \frac{S\partial s}{FE} = \frac{1}{FE}\int S\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{1}{FE}\int\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right) S\partial y,$$

wenn wir es mit einer Parabel zu thun haben. Für einen an beiden Enden gestützten und in der Mitte mit G belasteten Bogen (Fig. 144) ist

$$S = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25}{32}\,\frac{ay^2}{b^3}\right) G$$

gefunden worden, daher haben wir die Verkürzung des Bogens:

$$\begin{aligned} s - s_1 &= \frac{G}{FE}\int\left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a} - \frac{a}{56b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25}{32}\,\frac{ay^2}{b^3}\right)\partial y \\ &= \frac{G}{FE}\left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a}\,y - \frac{ay}{56b} + \frac{ay^2}{2b^2} - \frac{25}{96}\,\frac{ay^3}{b^3}\right), \end{aligned}$$

also für die ganze Länge l, wo $y = b$ ist, die Verkürzung:

$$l_1 = \frac{G}{FE}\left(\frac{25}{64}\,\frac{b^2}{a} + \frac{149}{672}\cdot a\right).$$

Wenn hingegen derselbe Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$\begin{aligned} s - s_1 &= \frac{q}{FE}\int\left(\frac{b^2}{2a} + \frac{ay^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right)\partial y \\ &= \frac{q}{FE}\left(\frac{b^2y}{2a} + \frac{2a}{3b^2}\,y^3\right), \end{aligned}$$

folglich für den ganzen Bogen von der Länge l:

$$l_1 = \frac{q}{FE}\cdot\frac{b^3}{2a}\left[1 + {}^{4}/_{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right].$$

Wenn der Bogen l durch $\frac{G}{2}$ und lq zugleich belastet wird, so ist seine Verkürzung die Summe der beiden der letzten Werthe für l_1, folglich:

$$l_1 = \frac{qb^3}{2FEa}\left[1 + {}^4/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] + \frac{G}{FE}\left(\frac{25}{64}\frac{b^2}{a} + \frac{149}{627}a\right).$$

Aus der Verkürzung der Bogenlänge läßt sich nun auch die entsprechende Senkung a_1 des Scheitels finden. Es ist nach (§. 75):

$$\partial s = \partial y\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right),$$

folglich:

$$s = y\left(1 + {}^2/_3\frac{a^2y^2}{b^4}\right) = y\left(1 + {}^2/_3\frac{ax}{b^2}\right),$$

also für $x = a$ und $y = b$:

$$s = l = b\left(1 + {}^2/_3\frac{a^2}{b^2}\right) \text{ (vergl. Band I., §. 160, Anmerkung 1).}$$

Durch Differenziiren nach a ergiebt sich nun:

$$\partial l = {}^4/_3\frac{a\partial a}{b}, \text{ daher umgekehrt:}$$

$$\partial a = {}^3/_4\frac{b\partial l}{a} \text{ und } a_1 = {}^3/_4\frac{b}{a}l_1.$$

Für den letzten Fall ist daher die Senkung des Scheitels:

$$a_1 = {}^3/_8\frac{b^3}{a^2FE}({}^{25}/_{32}G + qb).$$

§. 80. **Tragkraft der Bögen.** Die Tragkraft der Bögen läßt sich nach der Theorie der zusammengesetzten Festigkeit beurtheilen, da die Bögen nicht allein durch die Kraft S zusammengedrückt, sondern auch durch die Kräfte P und Q gebogen werden. Der Spannung S entspricht das Zusammendrückungsverhältniß

$$\sigma_1 = \frac{S}{FE},$$

den Kräften P und Q dagegen das Ausdehnungs- und Zusammendrückungsverhältniß

$$\sigma_2 = \frac{e\partial\alpha - e\partial\alpha_1}{\partial s} = \frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s},$$

wenn e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe bezeichnet, und $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$ und ∂s die seither gebrauchten Bedeutungen haben. Es ist hiernach das Verhältniß des Tragmoduls zum Elasticitätsmodul

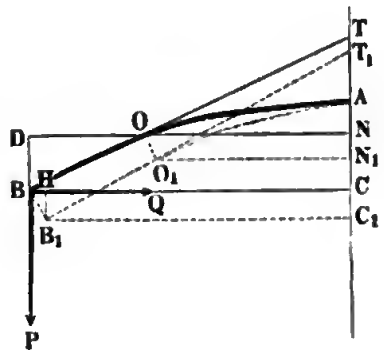
$$\frac{T}{E} = \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{S}{FE} + \frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s}.$$

Da es sich hier um den größten Werth von σ handelt, und da bei der

Biegung Ausdehnung und Zusammendrückung zugleich vorkommt, so hat man die beiden letzten Glieder $\frac{S}{FE}$ und $\frac{e\,(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s}$ stets arithmetisch zu addiren.

Wird der Bogen AB, Fig. 147, durch die Kräfte P und Q ergriffen, so haben wir nach (§. 74)·

Fig. 147.



$$\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s} = \frac{P(b-y) + Q(a-x)}{WE},$$

daher:

$$T = \frac{S}{F} + [P(b-y) + Q(a-x)]\,\frac{e}{W}.$$

Dient dagegen der Bogen zur Unterstützung einer gleichförmig vertheilten Last qb, so ist nach (§. 77):

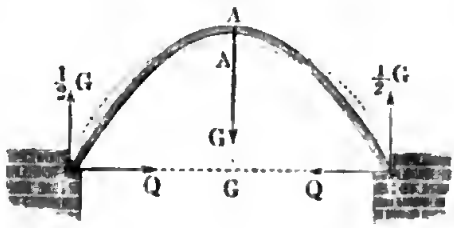
$$\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s} = {}^1/_2\, q\,(b-y)^2,$$

und daher

$$T = \frac{S}{F} + \frac{eq\,(b-y)^2}{2\,W}.$$

Für einen Bogen BAB, Fig. 148, welcher in der Mitte ein Gewicht G trägt und an beiden Enden festgehalten wird, hat man

Fig. 148.



$$P = -\frac{G}{2},\ Q = {}^1/_2\, G\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)$$

und

$$S = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right) G,$$

daher:

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right)\frac{G}{F} + \left[\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)(a-x) - (b-y)\right]\frac{G\,e}{2\,W}.$$

Für $x = y = 0$, d. i. für den Bogenſcheitel, iſt

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b}\right)\frac{G}{F} - \left({}^7/_{32}\,b + \frac{a^2}{28\,b}\right)\frac{G\,e}{2\,W},$$

oder vielmehr

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b}\right)\frac{G}{F} + \left({}^7/_{32}\,b + \frac{a^2}{28\,b}\right)\frac{G\,e}{2\,W},$$

weil ſich bei der von der neutralen Axe am meiſten abſtehenden Faſer Zuſammendrückung mit Zuſammendrückung vereinigt.

Für $x = a$ und $y = b$, alſo für die Fußpunkte, iſt hingegen

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} + \frac{45\,a}{224\,b}\right)\frac{G}{F}.$$

Um die ſchwächſte, d. i. diejenige Stelle zu finden, wo der größte Tragmodul erfordert wird, differenziiren wir T in Hinſicht auf y und ſetzen $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$. Es folgt hiernach:

$$\left(\frac{a}{b^2} - \frac{50\,a\,y}{32\,b^3}\right)\frac{2\,W}{F\,e} - \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\frac{\partial x}{\partial y} + 1 = 0;$$

oder, da $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}$, alſo $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2\,a\,y}{b^2}$ iſt:

$$\left(\frac{a}{b^2} - \frac{50\,a\,y}{32\,b^3}\right)\frac{2\,W}{F\,e} + 1 = \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\frac{2\,a\,y}{b^2},$$

d. i.

$$\frac{2\,W}{F\,e}\cdot\frac{a}{b^2} + 1 = \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b} + \frac{50}{32}\cdot\frac{W}{F\,b\,e}\right)\frac{2\,a\,y}{b^2};$$

hiernach iſt:

$$y = \frac{2\,W\,a + F\,b^2\,e}{{}^{25}/_8\,W\cdot\frac{a}{b} + \left({}^{25}/_{16}\,b - \frac{a^2}{14\,b}\right)F\,e}.$$

Annähernd hat man, wenn man die Glieder mit a vernachläſſigt,

$y = {}^{16}/_{25}\, b$, und daher

$$T = \left(\frac{25\,b}{32\,a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2\,F} + \left[\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\cdot\frac{369}{625}\,a - \frac{9}{25}\,b\right]\frac{G\,e}{2\,W}$$

$$= \left(\frac{25\,b}{32\,a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2\,F} + \left(\frac{81\,b}{800} - \frac{369\,a^2}{17500\,b}\right)\frac{G\,e}{2\,W},$$

oder, wenn man die Glieder mit a und a^2 vernachläſſigt,

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + \frac{81\,G\,b\,e}{1600\,W}.$$

Wäre die Laſt $2\,b\,q$ auf dem Bogen BAB gleichmäßig vertheilt, ſo hätte man:

$$\frac{e\,(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s} = \frac{-\,q\,b\,(b-y) + {}^1/_2\,q\,(b-y)^2 + \dfrac{q\,b^2}{2\,a}\,(a-x)}{W\,E}$$

$$= \frac{-\,{}^1/_2\,q\,(b^2 - y^2) + {}^1/_2\,q\,(b^2 - y^2)}{W\,E} = 0,$$

und daher:

$$T = \frac{S}{F} = \left(\frac{b^2}{2\,a} + \frac{a\,y^2}{b^2}\right)\frac{q}{F}.$$

Beiſpiel. Welche Dimenſionen b_1 und h_1 hat man dem rectangulären Querſchnitt $b_1\,h_1$ eines gußeiſernen Bogens BAB, Fig. 146, von 12 Fuß Spannweite und 3 Fuß Höhe zu geben, wenn derſelbe in der Mitte ein Gewicht von 10000 Pfund tragen ſoll? Für das Zerbrechen im Scheitel haben wir:

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + {}^7/_{64}\,\frac{G\,b\,e}{W},$$

und für das Zerbrechen im Abſtande $y = {}^{16}/_{25}\,b$:

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + \frac{81\,G\,b\,e}{1600\,W};$$

da der erſtere Ausdruck einen größeren Werth giebt, ſo werden wir nur dieſen in Betracht ziehen. Führen wir den Tragmodul $T = 10000$ Pfund ein, ſo läßt ſich ſetzen:

$$1 = {}^{25}/_{64}\cdot\frac{b}{a\,F} + \frac{7\,b\,e}{64\,W}.$$

Nun iſt aber $\frac{b}{a} = {}^6/_3 = 2$, $b = 6$ Fuß $= 72$ Zoll, ferner $F = b_1\,h_1$, $W = \frac{b_1\,h_1^3}{12}$ und $e = {}^1/_2\,h_1$, wobei b_1 und h_1 die geſuchten Querſchnittsdimenſionen des Bogens bezeichnen; daher folgt:

$$1 = \frac{25\,.\,2}{64\,b_1\,h_1} + \frac{7\,.\,9\,.\,6}{8\,b_1\,h_1^2}, \text{ oder } b_1\,h_1^2 = {}^{25}/_{32}\,h_1 + \frac{7\,.\,9\,.\,3}{4}.$$

Nimmt man nun noch $h_1 = 10\,b_1$ an, ſo ergiebt ſich:

$$h_1^3 = 7{,}8\,h_1 + 472{,}5$$

und daher:

$h_1 = \sqrt[3]{472{,}5 + 64} = \sqrt[3]{536{,}5} = 8{,}12$ Zoll, ſowie $b_1 = 0{,}812$ Zoll.

Für einen geraden gußeiſernen Balken hätte man bei der Länge $l = 12$ Fuß $= 144$ Zoll und dem Gewichte $G = 10000$ Pfund, nach I., §. 240:

$$Gl = 4\, b_1 h_1^2 \cdot \frac{T}{6},$$

daher hier, wo $G = T$ iſt,

$$b_1 h_1^2 = {}^3/_2 . l = {}^3/_2 . 72 = 108, \text{ oder } h_1^3 = 1080,$$

ſo daß nun

$$h_1 = \sqrt[3]{1080} = 10{,}26 \text{ und } b_1 = 1{,}026 \text{ Zoll folgt.}$$

Nimmt man das Gewicht eines Cubikzolles Eiſen $= 0{,}26$ Pfund an, ſo erhält man das Gewicht des gußeiſernen Bogens, da deſſen Länge (ſ. Bd. I, §. 160, Anmerkung 1)

$$l_1 = 2b\left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 72\,(1 + {}^2/_3 . {}^1/_4) = 72 + 12 = 84 \text{ Zoll}$$

geſetzt werden kann,

$$G_1 = 0{,}26 . b_1 h_1 l_1 = 0{,}26 . 8{,}12 . 0{,}812 . 84 = 144 \text{ Pfund.}$$

Dagegen iſt das Gewicht des geraden Balkens von gleichem Stoffe und von gleicher Tragkraft:

$$G_1 = 0{,}26 . 10{,}26 . 1{,}026 . 72 = 197 \text{ Pfund.}$$

§. 81 **Bogenträger aus Holz und Gusseisen.** Bei gleichem Querprofile und gleichem Tragmodul, ſowie unter übrigens gleichen Verhältniſſen, beſitzen, dem Vorſtehenden zufolge, die Träger, mit bogenförmiger Axe, die ſogenannten Bogenträger, eine größere Tragkraft als die ſogenannten Balkenträger, deren Längenaxe eine gerade iſt. Da nun die Bogenträger aus Gußeiſen gleich beim Guſſe die Bogenform erhalten, ſo kann der Tragmodul bogenförmiger Balken von dem der geraden Balken nicht ſehr verſchieden ſein, und deshalb iſt denn auch bei gußeiſernen Trägern die Anwendung der Bogenform von beſonderem Vortheil. Anders iſt es aber bei Trägern aus Holz oder Schmiedeeiſen. Da das Holz in einem gewiſſen Grade auch das Eiſenblech durch das Biegen bei ſeiner Verwendung zu Bogenträgern an Tragkraft verliert, ſo iſt der Tragmodul eines Trägers aus gebogenem Holze oder Eiſenblech kleiner als der eines geraden Trägers oder Balken und daher bei dieſen Stoffen die Bogenform mit Vorſicht und namentlich immer nur von mäßiger Krümmung anzuwenden. Iſt r der Krümmungshalbmeſſer des gebogenen Balkens und e der größte Abſtand ſeiner Faſern von der neutralen Axe, ſo hat man die relative Ausdehnung oder Zuſammendrückung dieſer Faſern (ſ. Bd. I., §. 215):

$$\sigma = \frac{e}{r},$$

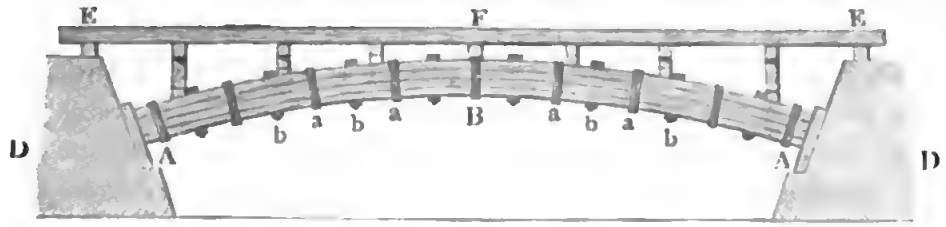
und daher die entſprechende Spannung:

$$S = \sigma E = \frac{e}{r} E,$$

wo E den Elaſticitätsmodul bezeichnet.

Da hiernach die Spannung des gebogenen Balkens direct wie die Dicke oder Höhe ($2e$) und umgekehrt wie der Halbmeſſer r der Krümmung deſſelben wächſt, ſo ſetzt man ihn mit Vortheil aus dünnen brettförmigen Stücken (Bohlen) zuſammen, indem man dieſelben mit ihren breiten Flächen übereinander legt, zuſammenſchraubt u. ſ. w. Einen ſolchen Bohlenbogen ABA, welcher aus vier über einander liegenden Bohlen beſteht, führt Fig. 149

Fig. 149.



vor Augen. Dieſer Bogen trägt einen Balken EFE, und ſtützt ſich gegen die Widerlager DD. Die Bohlen, aus welchen derſelbe beſteht, werden durch Bänder $a, a \ldots$ und Schrauben $b, b \ldots$ zuſammengehalten. Die Balkenbögen werden aus ganzen Balken in ähnlicher Weiſe zuſammengeſetzt; übrigens verbindet man auch die über einander liegenden Balken noch durch Verzahnung oder durch eingeſetzte Dübel, wie gerade Balken, Fig. 121, noch feſter mit einander. Zum Biegen der Balken und Bohlen zu Tragbögen iſt Lärchen-, Kiefern-, Tannen- und Eichenholz, und zwar im grünen Zuſtande, zu verwenden. Man biegt dieſe Holzſtücken von der Mitte aus nach den Enden zu auf einem beſonderen Gerüſte, und läßt ſie auf dieſem mindeſtens zwei Monate lang im geſpannten Zuſtande liegen. Bei dieſem Biegen des friſchen Holzes wird natürlich die Elaſticitätsgrenze bedeutend überſchritten, und es iſt daher zu erwarten, daß der Feſtigkeitsmodul des trockenen Balkens, welcher eine bleibende Bogenform angenommen hat, kleiner iſt als derjenige, welchen er ohne Biegung haben würde. Ardant findet ihn kaum ein Viertel von dem eines einfachen geraden Balkens. Nach Band I., §. 212, wäre z. B. für Holz im Mittel die relative Ausdehnung bei der Elaſticitätsgrenze

$$\sigma = \frac{e}{r} = {}^1/_{600},$$

und daher der entſprechende Krümmungshalbmeſſer:

$$r = 600\,e,$$

z. B. für $e = {}^1/_2$ Fuß, $r = 300$ Fuß, daher bei einer Spannweite $s = 50$ Fuß, die zuläſſige Spannhöhe $h = \frac{s^2}{8r} = \frac{2500}{2400}$ nur $= 1{,}06$ Fuß und folglich die Krümmung $\frac{h}{s} = {}^1/_{50}$. Erfahrungsmäßig kann man

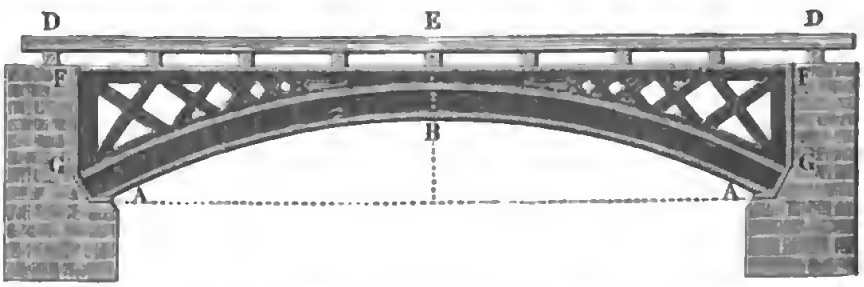
nach Wiebeking (ſ. deſſen allgemeine Waſſerbaukunſt Band III.) Balken von Tannenholz um $\frac{h}{s} = 1/25$, und ſolche von Eichenholz um $\frac{h}{s} = 1/40$ biegen; die viel ſchwächeren Bohlen von vielleicht nur zwei Zoll Stärke laſſen ſich natürlich in einem viel ſtärkeren Verhältniſſe krümmen, z. B. um $\frac{h}{s} = 1/10$. Die einzelnen Balken und Bohlen haben eine Länge von höchſtens 50 Fuß; bei größeren Spannweiten muß man folglich mehrere Balken oder Bohlen der Länge nach an einander anſtoßen (ſchiften, ſ. §. 66).

Bei einer anderen Conſtruction von Bohlenbögen werden die Bohlen nicht über, ſondern neben einander gelegt, weshalb dieſelben auch nicht krumm gebogen, ſondern nur krumm geſchnitten werden. Hierbei geht allerdings viel Holz verloren; auch erfordert dieſe Conſtruction eine ſehr ſolide Verbindung der Bohlen oder Felgen unter einander.

Schmiedeeiſerne Tragbögen laſſen ſich natürlich mit Vortheil aus Eiſenblech ausſchneiden und zuſammennieten.

Die Art und Weiſe, wie ein gußeiſerner Bogen als Träger dient, iſt aus Fig. 150 zu erſehen. Der eigentliche Bogen ABA iſt außen und innen

Fig. 150.



durch eine breite Rippe verſtärkt und zur Unterſtützung des Balkens DED dient eine breite Tragwand FF, welche den ganzen Bogen oben horizontal begrenzt. Das Ganze ſtützt ſich mittels ſtarker Flantſchen an die Widerlagsmauern G, G. Wenn man dieſe Bögen aus mehreren Theilen zuſammenſetzt, ſo läßt man die einzelnen Stücke in Flantſchen an einander anſtoßen und verbindet dieſelben mit einander durch Schraubenbolzen.

§. 82 Die im Obigen (§. 74 u. ſ. w.) abgehandelte Theorie der Tragkraft von krummen Balken oder Bögen iſt von Ardant (ſ. deſſen am Ende des Capitels angeführte Schrift) durch Verſuche an verſchiedenen Holzbögen erprobt worden. Was z. B. den Horizontalſchub anlangt, ſo iſt für den Fall, daß die Laſt G in der Mitte des Bogens hängt, derſelbe (§. 76):

$$Q = 1/2\, G \left(\frac{25\, b}{32\, a} - \frac{a}{28\, b}\right),$$

und für den Fall, daß dieſelbe längs der Sehne des Bogens gleichmäßig vertheilt iſt, dieſer Schub (nach §. 77):

$$Q_1 = \frac{q b^2}{2 a} = \frac{G b}{4 a}.$$

Obgleich dieſe Formeln nur unter der Vorausſetzung gefunden worden ſind, daß die Träger nach der Parabel gebogen ſind, ſo ſtimmen doch dieſelben mit den Ergebniſſen der Verſuche an nach dem Kreiſe gebogenen Trägern ziemlich überein. So findet z. B. Ardant für einen Halbkreisbogen, im erſten Falle:

$$Q = 0{,}32\ G,$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = 0{,}22\ G,$$

während die Formeln, wenn man darin $b = a$ ſetzt, auf

$$Q = 0{,}37\ G \text{ und}$$
$$Q_1 = 0{,}25\ G$$

führen.

Bei den häufiger angewendeten gedrückten Bögen iſt, wie zu erwarten war, die Uebereinſtimmung zum Theil noch größer.

Für die letztere Belaſtungsweiſe iſt, wenn das Verhältniß der halben Spannweite b zur Spannhöhe a,

$\frac{b}{a} =$	2	3	4	5	10	beträgt,
nach Ardant: $Q =$	0,54 G	0,775 G	1,02 G	1,33 G	3,33 G,	

und dagegen nach der Formel $Q = \frac{Gb}{4a}$:

$Q =$	0,50 G	0,75 G	1,00 G	1,250 G	2,500 G.

Was die durch die längs der Sehne gleichmäßig vertheilte Laſt hervorgebrachte Senkung des Scheitels betrifft, ſo kann dieſelbe natürlich bei der Kreisform des Trägers nicht Null ſein. Ardant findet dieſelbe für einen Halbkreisbogen:

$$a_1 = 0{,}007\,\frac{G b^3}{WE} = 0{,}084\,\frac{G b^3}{b_1 h_1^3 E},$$

wenn b_1 und h_1 die Querſchnittsdimenſionen des Bogens bezeichnen.

Bei einer längs der Sehne gleichmäßigen Belaſtung hat der Parabelbogen nur durch ſeine Druckfeſtigkeit zu widerſtehen, und es iſt der entſprechende Querſchnitt dieſes Tragbogens (ſ. §. 80):

$$F = b_1 h_1 = \left(\frac{b^2}{2a} + a\right)\frac{G}{2bT} = \left(\frac{b}{2a} + \frac{a}{b}\right)\frac{G}{2T}.$$

Ein kreisbogenförmiger Träger muß dagegen auch durch seine Biegungsfestigkeit widerstehen, und es findet Ardant für denselben, wenn dessen Halbmesser durch r bezeichnet,

$$F = b_1 h_1 = \left(\mu + \frac{\nu r}{4 h_1}\right) \frac{G}{2 T},$$

wobei für

$\frac{b}{a} =$	2	3	4	5	10	15	20
$\mu =$	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
und $\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001

zu setzen ist. Nach Ardant wäre für Tragbögen aus Holz

der Tragmodul T nur $= 30$ Kilogr. $= 410$ Pfund,

und für solche aus Gußeisen

der Tragmodul $T = 500$ Kilogr. $= 6840$ Pfund

zu setzen.

Beispiel. Eine Brücke soll aus mehreren Brückenfeldern von je 350000 Pfund Belastung und 72 Fuß Spannweite bestehen, und die Unterstützung dieser Last soll durch sieben Bögen von 12 Fuß Höhe erfolgen, welche Querschnittsdimensionen hat man diesen Bögen zu geben?

Es ist hier $G = {}^{350000}/_{7} = 50000$ Pfund, $a = 12$, und $b = 36$ Fuß. Bei einer parabolischen Form dieser Bögen wäre

$$b_1 h_1 = ({}^{36}/_{24} + {}^{12}/_{36}) \frac{G}{2 T} = 0{,}917 \frac{G}{T},$$

und dagegen bei der Kreisform, da hier der Halbmesser

$r = {}^1/_2 \left(\frac{b^2}{a} + a\right) = {}^1/_2 (36 . 3 + 12) = 60$ Fuß sowie $\mu = 1{,}550$ und $\nu = 0{,}263$ ist,

$$b_1 h_1 = \left(1{,}550 + 0{,}263 \cdot \frac{15}{h_1}\right) \frac{G}{2 T} = \left(0{,}775 + \frac{1{,}972}{h_1}\right) \frac{G}{T}.$$

Für hölzerne Bögen ist $T = 410$, daher

$$\frac{G}{T} = {}^{50000}/_{410} = 122,$$

folglich im ersten Falle:

$$b_1 h_1 = 0{,}917 . 122 = 112 \text{ Quadratzoll},$$

also wenn man $h_1 = {}^3/_2 b_1$ nimmt,

$$b_1 = \sqrt{{}^2/_3 . 112} = \sqrt{74{,}6} \ldots = 8{,}62 \text{ und } h_1 = 12{,}93 \text{ Zoll}.$$

Nimmt man $b_1 = 8{}^1/_2$ und $h_1 = 12$ Zoll an, so kann man den Bogen aus sechs Bohlen von je $8{}^1/_2$ Zoll Breite und 2 Zoll Dicke zusammensetzen.

Im zweiten Falle bei der Kreisform wäre dann

$$b_1 h_1 = 0{,}775 \,.\, 122 + \frac{1{,}972 \,.\, 122}{{}^1/_{12}\, h_1} = 94{,}55 + \frac{2887}{h_1}.$$

Auch hier $h_1 = {}^3/_2\, b_1$ gesetzt, folgt:

$$^2/_3\, h_1^2 = 94{,}55 + \frac{2887}{h_1},$$

so daß nun

$$h_1 = \sqrt[3]{4331 + 142\, h_1} = 19 \text{ Zoll, und } b = 12^2/_3 \text{ Zoll}$$

folgt.

Da man im letzteren Falle so sehr große Querschnittsdimensionen nöthig hat, so wendet man hier lieber gußeiserne Bögen an. Für sie ist

$$\frac{G}{T} = {}^{50000}/_{6840} = 7{,}30$$

und daher

$$b_1 h_1 = 0{,}775 \,.\, 6{,}38 + \frac{1{,}972 \,.\, 7{,}30 \,.\, 12}{h_1} = 4{,}94 + \frac{172{,}75}{h_1}.$$

Nimmt man $h_1 = 8\, b_1$ an, so folgt

$$h_1 = \sqrt[3]{1382 + 39{,}5\, h_1} = 12{,}3 \text{ Zoll},$$

und folglich:

$$_1 = \frac{h_1}{8} = 1{,}54 \text{ Zoll}.$$

Der Horizontalschub eines Bogens gegen die Widerlager ist

$$Q = 0{,}775 \,.\, G = 0{,}775 \,.\, 50000 = 38750 \text{ Pfund},$$

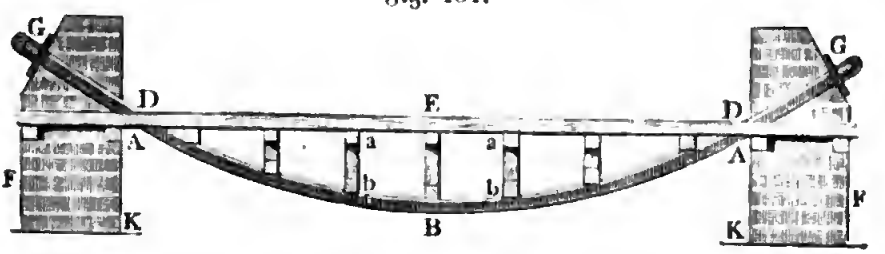
also für alle sieben Bögen:

$$= 7 \,.\, 38750 = 271250 \text{ Pfund},$$

während der Verticaldruck $= \frac{G}{2} = 175000$ Pfund beträgt. Es ist natürlich dem Widerlager eine gewisse Dicke d zu geben, damit es die nöthige Stabilität besitze.

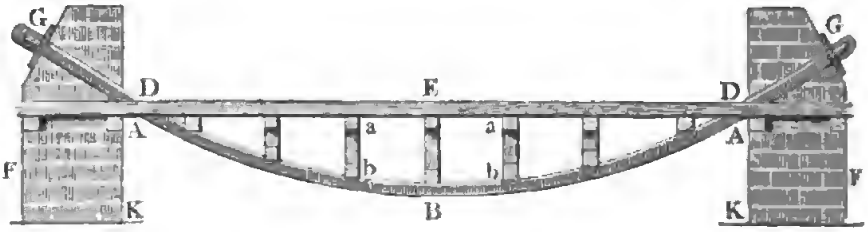
Hängebögen. Wenn man den Tragbogen nicht nach oben, sondern §. 83
nach unten, folglich in die Richtung der Last stellt, so findet in Hinsicht auf den seither betrachteten Fall nur der Unterschied statt, daß der Bogen durch die Belastung dort comprimirt und hier ausgedehnt wird, daß er also im ersten Falle durch seine Druck- und im letzteren Falle durch seine Zugfestigkeit widerstehen muß. Da das Schmiedeeisen eine größere Zug- und das Gußeisen eine größere Druckfestigkeit besitzt, so ist das erstere mehr zu einer solchen umgekehrten Bogenstellung geeignet als das Gußeisen. Einen solchen Tragbogen führt Fig. 151 vor Augen. Es ist ABA ein schmiede-

Fig. 151.



eiserner Bogen, *DED* der von ihm getragene Balken, ferner sind *FK*, *FK* die beiden Widerlagspfeiler, und *G*, *G* Keile und Unterlagsplatten, womit sich die Bogen von außen gegen die Widerlager stützen. Natürlich sind es

Fig. 152.



alle Mal mindestens zwei neben einander liegende Tragbögen, welche einen oder mehrere Balken wie *DED* unterstützen, und es besteht nun die Verbindung dieser Theile unter einander durch die Querbalken *a*, *a* . . ., *b*, *b* . . . und Tragsäulen *ab*, *ab* . . . Die Wirkung eines solchen Tragbogens auf die Widerlager ist, wie bei den umgekehrten Häng- und Sprengwerken (§. 58), die umgekehrte, nämlich von außen nach innen; man hat also hier dafür zu sorgen, daß die Widerlager nicht um die inneren Kanten *K*, *K* nach innen kippen. Uebrigens kann man einen Balken *DED* durch einen solchen Bogen ebenso gut von unten als von oben unterstützen, wenn man nur die Tragsäulen *ab*, *ab* durch Hängesäulen ersetzt. Man hat es dann mit einem sogenannten Hängebogen zu thun und nennt auch die durch Hängebögen getragenen Brücken Hängebrücken (franz. ponts suspendus; engl. suspension-bridges). In der Regel bildet man diese Bögen nicht aus krummem Holz oder Eisen, sondern man läßt dieselben entweder aus Seilen, und namentlich Drahtseilen, oder aus schmiedeeisernen Ketten bestehen. Die hierzu verwendeten Spann- oder Tragseile (franz. câbles en fil de fer; engl. cables of iron-wire) bestehen aus Draht von $1/2$ bis 2 Linien Dicke, und haben je nach der Spannweite u. s. w., eine Stärke von 1 bis 10 Zoll. Die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz, welche eine Spannweite von 870 Fuß hat, wird z. B. von vier Seilen getragen, welche aus 1056 Drähten von je $1/8$ Zoll Stärke bestehen, und $5\,1/4$ Zoll dick sind, und die Drahtbrücke über den Niagara-Wasserfall, von 822 Fuß Spannweite, besteht aus vier Drahtseilen, welche bei 3640 Drähten einen Durchmesser von 10 Zoll haben. Damit die nur neben einander liegenden und übrigens gehörig gefirnißten Drähte eines Taues gehörig zusammenhalten, sind sie in Abständen von circa 1 Fuß ungefähr 1 Fuß lang mit anderem Draht umwickelt.

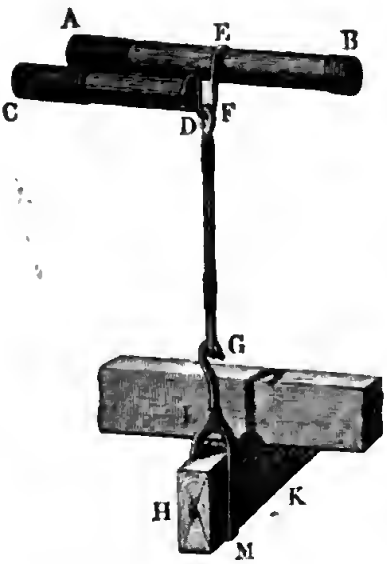
Die Glieder der Tragketten (franz. chaînes; engl. chains) bestehen aus mehreren neben einander liegenden und aufs Hohe gestellten Eisenschienen

von 8 bis 12 Fuß Länge, und sind durch cylindrische Bolzen mit einander verbunden. Der Querschnitt eines Kettengliedes und folglich auch die Anzahl und die Querschnittsdimensionen der einzelnen Schienen eines ganzen Gliedes sind natürlich von der Spannweite, Höhe u. s. w. abhängig. Die 420 Fuß spannende Kettenbrücke zu Prag wird z. B. von acht Ketten getragen, deren Glieder aus je sechs 10 Fuß langen, 4 Zoll hohen und $^7/_{12}$ Zoll dicken Schienen zusammengesetzt sind; die 630 Fuß spannende Kettenbrücke zu Pesth ruht hingegen nur auf vier Ketten mit 12 Fuß langen und $10^1/_4$ Zoll hohen Gliedern, welche je 10 bis 11 Schienen enthalten, die zusammen in der Mitte der Kette eine Dicke von 11,87 Zoll und an den Enden derselben eine solche von 12,1 Zoll haben. Endlich hat man Hängebrücken aus über einander liegenden Eisenbändern construirt; eine größere Brücke dieser Art befindet sich zu Suresnes bei Paris. Dieselbe hat eine Spannweite von 63 Meter und es besteht hier jedes Tragseil aus 20 über einander liegenden gewalzten Eisenbändern von 8,1 Centimeter Breite und 3,83 bis 4,15 Millimeter Dicke.

Hängebrücken. Das Hängewerk (franz. suspensoires; engl. suspension rods), welches die Brückenbalken mit den Spann- oder Tragseilen verbindet, besteht entweder aus schmiedeeisernen Hängestangen oder aus Hängeseilen. Die Art und Weise, wie diese Stangen oder Seile einerseits mit den Spannketten und andererseits mit den Balken der Brücke zu verbinden sind, ist aus Folgendem zu ersehen. §. 84

Hat eine Drahtbrücke nicht je zwei neben einander hängende Seile, so hängt man die Hängeseile mittelst einfacher Oehre an das Tragseil; besteht sie hingegen aus je zwei neben einander hängenden Seilen, so werden die Hängeseile mittels Haken an ein solches Seilpaar aufgehangen. Diese Aufhängungsweise ist in Fig. 153 dargestellt. AB und CD sind die beiden Seile, DE ist der Haken und FG stellt das Hängeseil vor. Das Tragseil CD ist unmittelbar beim Haken abgeschnitten gedacht. Die Enden HK der Querbalken oder Unterzüge, auf welchen die ganze Brücke ruht, sind entweder mit Bügeln LM umgeben, deren hakenförmige Köpfe in die unteren Oehre G der Hängeseile eingehakt werden, oder sie sind von unten mit Eisenplatten bekleidet, und es

Fig. 153.



werden die durch die Querbalken und dieſe Platten gehenden, zu dieſem Ende durchlochten oder ſchraubenförmig zugeſchnittenen Enden der Hängeſtangen durch Keile oder ſtarke Schraubenmuttern mit den erſteren feſt verbunden.

Die Art und Weiſe, wie die Hängeſtäbe an die Tragketten angehangen werden, iſt aus Fig. 154 und Fig. 155 zu erſehen. Bei der erſteren An-

Fig. 154.

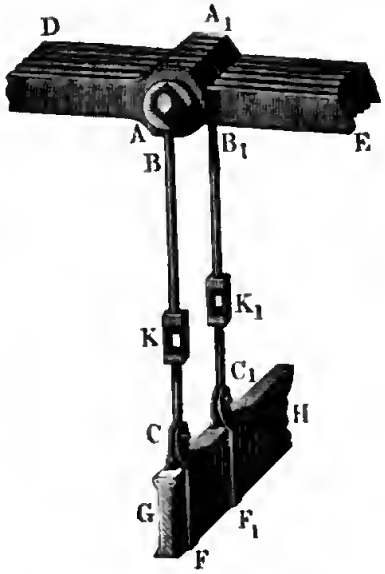
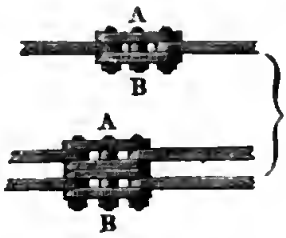


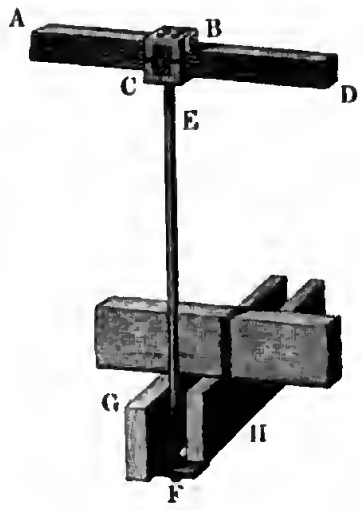
Fig. 155.



ordnung hängen die Hängeſtäbe BC, $B_1 C_1$ unmittelbar an dem Bolzen $A A_1$, Fig. 154, welcher die Kettenglieder DA und EA_1 mit einander verbindet. Die mit Stell- oder Scheerengliedern K, K_1 verſehenen Hängeſtangen ſind auch hier mittels Bügel CF, $C_1 F_1$ an die gußeiſernen Querbalken angeſchloſſen. Bei älteren Kettenbrücken ſind die Kettenglieder durch beſondere Blätter mit einander verbunden, welche in ihrer Mitte noch beſondere Bolzen, A, B, Fig. 155, tragen, woran dann die Hängeſtangen aufgehangen werden.

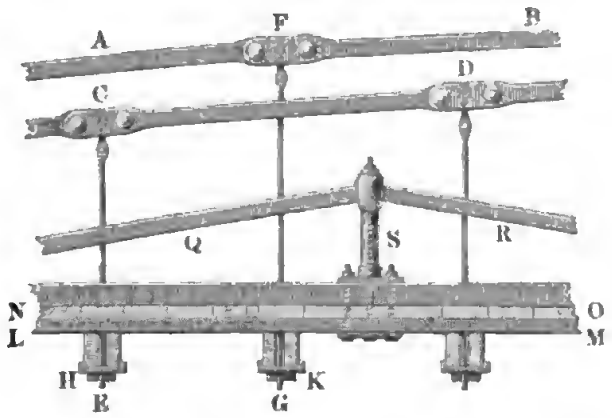
Die Aufhängung der Brücke an ein Bandeiſenſeil iſt in Fig. 156 abgebildet. Es iſt hier an jeder Stelle, wo oben ein Band AB ſich endigt, und unten ein neues Band hinzutritt, eine gußeiſerne Klemmbüchſe BC aufgeſetzt, an welche die Enden B und C, nachdem ſie durch dieſelbe gegangen ſind, durch je zwei Schrauben befeſtigt werden. Die mit einem Kopfe in der Klemmbüchſe aufgehangene Hängeſtange EF trägt an ihrem unteren Ende eine Eiſenplatte F, auf welcher die Enden von zwei Querbalken G und H aufruhen, zwiſchen welchen die Hängeſtange hindurchgeht.

Fig. 156.



Meist hat man auf einer und derselben Seite der Brücke zwei Tragketten über einander, wie z. B. AB und CD, Fig. 157, und deshalb gehen auch

Fig. 157.



noch einmal so viel Hängestäbe als Kettenglieder nach der Brücke herab; ist folglich die Länge der Kettenglieder 10 bis 12 Fuß, so beträgt die Entfernung zwischen je zwei Hängestäben CE und FG, 5 bis 6 Fuß. Die Figur zeigt auch noch, wie die unteren Enden der Kettenstäbe durch Fußplatten H, K und Keile E, G mit den Querbalken verbunden sind. Auf den Querbalken liegen die Längenschwellen wie LM, quer darüber wieder eine Bohlenlage NO, oder eine Holzpflasterung u. s. w.

Was die Breite der Brückenbahn anlangt, so rechnet man auf eine Laufbahn 3 bis 6 und auf eine Fahrbahn 7 bis 12 Fuß; eine Brücke mit zwei Lauf- und zwei Fahrbahnen erhält folglich eine Totalbreite von 20 bis 36 Fuß.

Um der Brücke eine größere Steifigkeit zu geben, versieht man die Brückenbahn noch durch besondere Verstrebungen, wie z. B. QRS, Fig. 157; sehr zweckmäßig sind, z. B. die nach dem Principe der Gitterwände construirten Steifwände. Man kann auch nach Cadiat und Oudry die Querbalken durch einen Gitterbalken ersetzen, wobei sich die Last eines Balkens auf das ganze Gitterwerk vertheilt. Auch giebt man zu diesem Zwecke der Brückenbahn eine schwache Wölbung.

§. 85

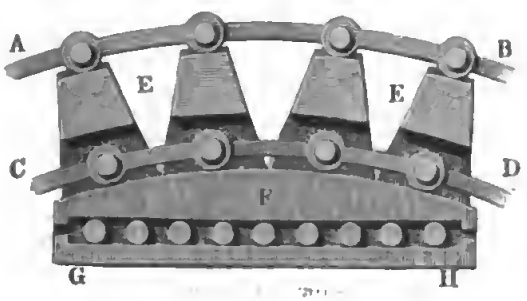
Die Bogenhöhe der Hängebrücken ist in Ansehung der ganzen Brückenlänge meist sehr klein ($^1/_7$ bis $^1/_{25}$ der Sehne), daher die Spannung der Seile oder Ketten sehr bedeutend (s. Band I., §. 157); es haben daher auch die Pfeiler, über welche die Seile oder Ketten weggehen, und die Anker, mit welchen die Seil- oder Kettenenden an den Ufern befestigt sind, eine bedeutende Kraft auszuhalten, und es sind deshalb Pfeiler von hoher Stabilität und Widerlager von bedeutendem Widerstande in Anwendung zu brin-

gen. Die Entfernungen zwiſchen je zwei Pfeilern macht man, um nicht zu ſchwere Seilketten zu erhalten und die Pfeiler nicht zu ſehr zu belaſten, nicht gern über 500 Fuß, doch kommen auch Umſtände vor, welche zu größeren Spannweiten nöthigen; es beträgt dieſelbe z. B. bei der Menai-Kettenbrücke in England 560 Fuß und bei der Seilbrücke zu Freiburg in der Schweiz ſogar 840 Fuß.

Wenn die Kette zu beiden Seiten eines Pfeilers ungleich geſpannt wird, was bei einer einſeitigen Belaſtung ſtets eintritt, ſo ſucht dieſelbe über ihrem Lager nach der Seite der größeren Spannung fortzugleiten; da nun aber die Kette mit dem Kopfe des Pfeilers durch die aus der Mittelkraft der Spannungen entſpringende Reibung bis zu einem gewiſſen Grade verbunden iſt, ſo hat hiernach der Pfeiler einer der Reibung gleichen Seitenkraft durch ſeine Stabilität zu widerſtehen. Aus dieſem Grunde hat man denn auch Pfeiler von großen Breiten und Dicken anzuwenden, oder beſondere Mittel zu ergreifen, um dieſe Wirkungen der ungleichen Belaſtung zu ermäßigen. Dieſe Mittel beſtehen aber entweder darin, daß man die Ketten über Rollen oder Walzen laufen läßt, und dadurch die gleitende Reibung auf eine kleinere Zapfen- oder Walzenreibung zurückführt, oder daß man die Ketten an einen Sector anſchließt, welcher, ſich auf dem Kopfe des Pfeilers wälzend, ſich nach der einen oder nach der anderen Seite hin neigen läßt, oder daß man endlich gar den Pfeiler durch eine Säule erſetzt, welche um eine horizontale Axe drehbar iſt. In der Anordnung von Fig. 158 ſind die zwei Ketten AB, CD über gewöhnliche Leitrollen E, E, F, F gelegt, in Fig. 159 liegen hingegen die beiden Ketten auf einem gußeiſernen Sattel EFE, welcher wieder auf neun gußeiſernen Walzen ruht. Dieſe Walzen werden endlich von einer Fußplatte GH unterſtützt, welche auf dem Kopfe des Kettenpfeilers feſtſitzt. Wenn die beiden Ketten auf der einen Seite mehr als auf der anderen belaſtet ſind, ſo rollt der ganze Sattel ſammt den darauf liegenden Ketten ſo weit fort, bis die Ketten auf

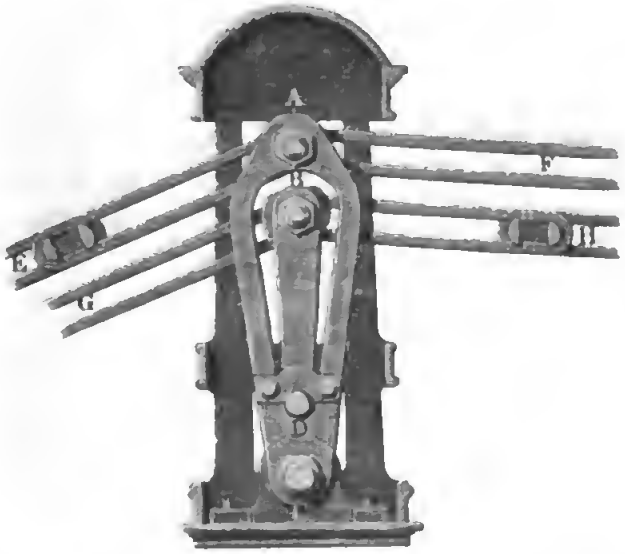
Fig. 158.

Fig. 159.



der einen Seite faſt ebenſo ſtark geſpannt werden, als die Ketten auf der anderen Seite. In Fig. 160 iſt eine Kettenführung vor Augen geführt,

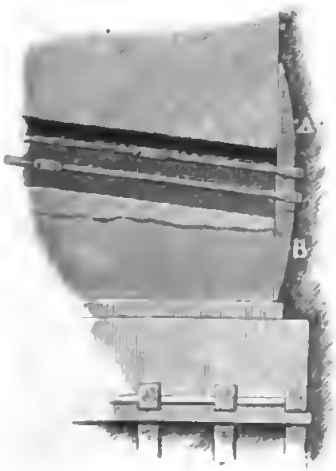
Fig. 160.



welche bei einer Kettenbrücke über die Maas bei Seraing zur Anwendung gekommen iſt. Die obere Kette EAF iſt hier an einen Hebel CA angeſchloſſen, deſſen Drehungsaxe auf dem Kopfe einer gußeiſernen Säule ruht, und die untere Kette GBH iſt an einem kleineren Hebel DB befeſtigt, deſſen Drehungsaxe D auf dem erſteren Hebel ſelbſt ſitzt.

Damit die Mittelkraft aus den beiden Spannungen der über einen Pfeiler weggehenden Kette vertical wirke, und ſo vom Pfeiler am ſicherſten aufgenommen werde, iſt es nöthig, daß die Theile der Kette zu beiden Seiten des Pfeilers gleiche Neigung gegen den Horizont haben. Läßt ſich dieſe Gleichheit nicht herſtellen, wie es z. B. bei den Uferpfeilern ſehr oft der Fall iſt, ſo muß man die Pfeiler bedeutend verſtärken.

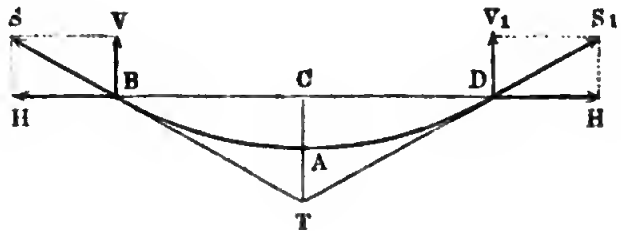
Fig. 161.



Um die Kettenenden an den Ufern zu verankern, verſieht man dieſelben mit ſtarken Bolzen und legt dieſe in Lager, welche auf einer großen und dicken Eiſenplatte AB, Fig. 161, ſitzen, die ſich gegen eine dicke Widerlagsmauer, oder gegen ein Gewölbe, oder gar gegen das feſte Geſtein ſtemmt. Durch Keile läßt ſich dann noch die Kette in gehöriger Spannung erhalten, wenn ſie durch Dehnung etwas ſchlaff geworden iſt.

§ 86 **Theorie der Hängebrücken.** Die Curve, welche von der Kette oder von dem Seile einer Hängebrücke gebildet wird, liegt zwiſchen einer Parabel und einer Kettenlinie, und kommt einer Ellipſe ſehr nahe. Der Parabel nähert ſich dieſe Curve bei der belaſteten Brücke, der Kettenlinie aber bei unbelaſteter Brücke (vergl. Band I., §. 157, 158 ff.), erſteres, weil dort die Gewichte mehr der Horizontalprojection der Kette, letzteres aber, weil ſie mehr der Länge der Kette ſelbſt proportional ſind. Der Sicherheit wegen betrachten wir aber die Brücke im belaſteten Zuſtande, behandeln alſo die von den Tragketten oder Tragſeilen gebildeten Curven als Parabeln. Sind die beiden Aufhängepunkte B und D, Fig. 162, einer Tragkette gleich hoch, ſo

Fig. 162.

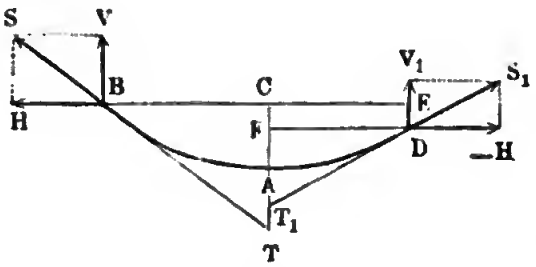


hat man bei der Spannweite $BD = 2b$, bei der Bogenhöhe $AC = a$, für den Winkel $CBT = CDT = \alpha$, welchen die Kettenenden B und D mit dem Horizonte einſchließen,

$$tang.\,\alpha = \frac{CT}{BC} = \frac{2a}{b}$$ (ſ. Band I., §. 157).

Sind dagegen die Aufhängepunkte B und D, Fig. 163, in verſchiedenem

Fig. 163.



Niveau, ſo liegt der Kettenſcheitel A nicht in der Mitte und es haben auch die Kettenenden verſchiedene Neigungen. Setzen wir die Abſciſſe $AC = a$ und die Ordinate $BC = b$, ſowie die Coordinaten AF und $FD = a_1$ und b_1, bezeichnen wir die ganze Spannweite BE durch s und den Höhenunterſchied DE zwiſchen beiden Aufhängepunkten durch h, ſo haben wir:

$$h = a - a_1,\ s = b + b_1 \text{ und } \frac{a}{a_1} = \frac{b^2}{b_1^2},$$

es folgt daher aus h, s und a:

1) $a_1 = a - h$,

2) $b = \dfrac{s}{1 + \sqrt{\dfrac{a_1}{a}}}$,

3) $b_1 = s - b = \dfrac{s}{1 + \sqrt{\dfrac{a}{a_1}}}$,

und für die Neigungswinkel α und α_1 der Kettenenden:

4) $tang.\,\alpha = \dfrac{2a}{b}$ ſowie

5) $tang.\,\alpha_1 = \dfrac{2a_1}{b_1}$.

Die Länge der Kettenſtücke $AB = l$ und $AD = l_1$ iſt endlich noch:

$l = b\left[1 + {}^2/_3\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\right]$ und

$l_1 = b_1\left[1 + {}^2/_3\left(\dfrac{a_1}{b_1}\right)^2\right]$ (ſ. Band I., §. 160, Anmerkung 1).

Giebt man nun die Entfernung e zwiſchen je zwei Hängeſtangen, ſo erhält man die Anzahl derſelben auf die Länge $BC = b$:

$$n = \frac{b}{e};$$

und ſetzt man nun noch in der Gleichung $x = \dfrac{y^2}{b^2}\,a$ ſtatt y die Werthe

$$0,\ e,\ 2e,\ 3e,\ 4e \text{ u. ſ. w.}$$

ein, ſo erhält man die Längen der Hängeſtangen:

$0,\ \dfrac{e^2}{b^2}\,a,\ \dfrac{4e^2}{b^2}\,a,\ \dfrac{9e^2}{b^2}\,a$ u ſ. w., oder $0,\ \dfrac{a}{n^2},\ \dfrac{4a}{n^2},\ \dfrac{9a}{n^2}$ u. ſ. w.,

wenn man hierzu noch eine kleine Conſtante addirt.

Aus dem Gewichte G der belaſteten Kettenhälfte AB ergiebt ſich die Horizontalſpannung der ganzen Kette:

$$H = G\ cotang.\,\alpha = \frac{b}{2a}\,G,$$

und die vollſtändige Kettenſpannung am Ende:

$$S = \frac{G}{sin.\,\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2}}{2a} \cdot G.$$

Kennt man die Festigkeitsmodel der Tragketten und Hängestangen, so kann man nun die erforderlichen Querschnitte dieser Theile finden. Nach den Erfahrungen in Frankreich kann man für Spannketten die größte Belastung auf 1 Quadratmillimeter = 12 Kilogramme und für Spannseile aus Eisendraht = 18 Kilogramme annehmen. Da die Hängestäbe noch die Stöße der Wagen u. s. w. aufzunehmen haben, so belastet man sie gar nur mit $1^1/_2$ Kilogramm auf 1 Quadratmillimeter. Auf das preuß'sche Maaß reducirt, läßt sich hiernach setzen: für die Spannketten auf einen Quadratzoll 16920 Pfund, für Spannseile 24630, und für die Hängestäbe nur 2050 Pfund Maximalbelastung.

§. 87 **Stärke der Ketten und Seile.** Um die Querschnittsverhältnisse einer Hängebrücke auszumitteln, hat man nicht allein auf das Gewicht der Brückenbahn, sondern auch noch auf die größte zufällige Belastung durch Menschen, Thiere und Lastwagen Rücksicht zu nehmen, und diese kann man, nach Navier, auf 200 Kilogramm für 1 Quadratmeter Brückenfläche, d. i. auf 42 Pfund für 1 Quadratfuß annehmen, in welchem Falle allerdings ein dichtes Gedränge noch nicht vorkommen darf. Aus dieser Maximallast berechnen sich nun auch nach der Lehre der relativen Festigkeit die Querschnitte der Quer- und Längebalken, Bohlen u. s. w., und hieraus folgt wieder das Gewicht der ganzen Brückenbahn. Setzen wir nun die Summe aus diesem constanten Gewichte und jener Maximalbelastung, $= Q$, die mittlere Länge einer Hängestange $= c$ und den Tragmodul der Tragstangen $= T_1$, so haben wir nach Band I., §. 207 den Querschnitt der Hängestangen:

$$F_1 = \frac{Q}{T_1 - c\gamma},$$

also wenn man c in Fußen giebt, und das Gewicht γ eines Cubikzolles Schmiedeeisen 0,280 Pfund setzt:

$$1)\quad F_1 = \frac{Q}{T_1 - 3{,}36\,c}.$$

Hiernach haben nun sämmtliche Hängestangen das Gewicht:

$$G_1 = 3{,}36\,F_1 c = \frac{3{,}36\,Qc}{T_1 - 3{,}36\,c},$$

und annähernd

$$G_1 = \left(1 + \frac{3{,}36\,c}{T_1}\right) \cdot \frac{3{,}36\,Qc}{T_1} = 3{,}36\,\frac{Qc}{T_1}.$$

Ist F der Querschnitt der Tragkette, so hat man deren Gewicht:

$$G = 2\,Fl\gamma = 2\,Fb\gamma \cdot \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right],$$

folglich ist die ganze Belastung der Tragketten:

$$Q + G_1 + G = Q + 3{,}36\, F_1 c + 2\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] Fb\gamma,$$

und daher die Maximalspannung derselben:

$$S = \frac{Q + G_1 + G}{2\, sin.\, \alpha} = \frac{Q + 3{,}36\left(F_1 c + 2\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] Fb\right)}{2\, sin.\, \alpha}.$$

Ist T der Tragmodul für die Spannketten, so kann man auch setzen $S = FT$; daher folgt:

$$2\, FT\, sin.\, \alpha = Q + 3{,}36\left(F_1 c + 2\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] Fb\right),$$

so daß nun der gesuchte Querschnitt der Spannketten:

$$F = \frac{{}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c}{T\, sin.\, \alpha - 3{,}36\, b\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

sich ergiebt.

Führt man noch

$$sin.\, \alpha = \frac{2a}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{b}\left[1 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{2a}{b}\left[1 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

ein, so erhält man

$$F = \frac{({}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c)\, b}{2\, Ta\left[1 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] - 3{,}36\, b^2\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}.$$

Auch läßt sich, wenn man annähernd $\frac{a}{b} = {}^1/_2\, sin.\, \alpha$ einführt,

$$F = \frac{{}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c}{T\, sin.\, \alpha - 3{,}36\, b\,[1 + {}^1/_6\, (sin.\, \alpha)^2]}$$

setzen.

Beispiel. Man soll für eine Kettenbrücke von 150 Fuß Spannweite, 15 Fuß Bogenhöhe und 25 Fuß Breite die nöthigen Querschnittsverhältnisse berechnen. Geben wir über die ganze Breite 45 Hängeeisen, so bekommen wir $45 - 1 = 44$ Theile, und daher die Entfernung zwischen je zwei Hängeeisen $= {}^{150}/_{44} = 3{,}409$ Fuß. Es folgen nun die Längen dieser Eisen, von der Mitte ausgegangen:

$$0,\ \frac{15}{22^2} = 0{,}031,\ 4\cdot\frac{15}{22^2} = 0{,}124,\ 9\cdot\frac{15}{22^2} = 0{,}279,\ 16\cdot\frac{15}{22^2} = 0{,}496,\ 25\cdot\frac{15}{22^2}$$
$$= 0{,}775 \text{ Fuß u. s. w.}$$

oder, wenn man hierzu 2 Zoll addirt:

2 Zoll, 2,37, 3,49, 5,35, 7,95, 11,30 Zoll u. s. w.

Die Maximalbelastung der halben Brückenbahn ist $75 . 25 . 42 = 78750$ Pfund,

und wiegt nun die übrigens vollkommen armirte halbe leere Brückenbahn ebenso viel, so erhalten wir die Last:

$$\tfrac{1}{2}\,Q = 157500 \text{ Pfund.}$$

Die mittlere Länge eines Hängeeisens ist der Quadratur der Parabel zu Folge (s. den Ingenieur S. 189) ein Drittel der Bogenhöhe a, also hier mit Einschluß von 2 Zoll Uebermaaß:

$$c = {}^{15}/_{3} + {}^{1}/_{6} = 5{,}167 \text{ Fuß.}$$

Folglich hat man den Querschnitt sämmtlicher Hängeeisen:

$$F_1 = \frac{Q}{T_1 - 3{,}36\,c} = \frac{315000}{2050 - 3{,}36\,.\,5{,}167} = \frac{315000}{2033} = 155 \text{ Quadratzoll.}$$

Es ist also der Querschnitt eines Hängestabes $\frac{F_1}{90} = {}^{155}/_{90} = 1{,}722$ Quadratzoll, und der Durchmesser desselben, $d = 1{,}48$ Zoll.

Nimmt man $T = 16420$ Pfund an und setzt

$$\sin.\,\alpha = \frac{2\,a}{\sqrt{b^2 + 4\,a^2}} = \frac{30}{\sqrt{75^2 + 30^2}} = \frac{1}{\sqrt{6{,}25 + 1}} = 0{,}3714,$$

so erhält man den Querschnitt der Spannketten:

$$F = \frac{\tfrac{1}{2}\,Q + 1{,}68\,F_1\,c}{T \sin.\,\alpha - 3{,}36\,b\left[1 + {}^{2}/_{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} = \frac{157500 + 1{,}68\,.\,155\,.\,5{,}167}{16420\,.\,0{,}3714 - 3{,}36\,.\,75\,(1 + {}^{2}/_{3}\,.\,0{,}04)}$$

$$= \frac{157500 + 1345}{6098 - 259} = \frac{158845}{5839} = 27{,}2 \text{ Quadratzoll,}$$

also bei vier Spannketten, der Querschnitt einer jeden:

$$\frac{F}{4} = 6{,}8 \text{ Quadratzoll.}$$

§. 88 **Verlängerung der Ketten.** Die Spannketten werden durch die angehängte Last verlängert und nehmen dadurch auch eine größere Bogenhöhe an; auch geht aus dem Temperaturwechsel eine Veränderung in der Kettenlänge hervor, welche wieder eine Veränderung in der Bogenhöhe zur Folge hat. Beides müssen wir daher noch kennen lernen. Wenn die Bogenhöhe a in a_1 übergeht, so nimmt die Länge der Tragkette

$$l = b\left[1 + {}^{2}/_{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right],$$

die Größe

$$l_1 = b\left[1 + {}^{2}/_{3}\left(\frac{a_1}{b}\right)^2\right]$$

an, und es folgt daher die Verlängerung der Kette:

$$\lambda_1 = l_1 - l = {}^{2}/_{3}\left(\frac{a_1^2 - a^2}{b}\right) = {}^{2}/_{3}\,\frac{(a_1 - a)\,(a_1 + a)}{b},$$

oder, die Vergrößerung $a_1 - a$ der Bogenhöhe mit δ bezeichnet und annähernd $a + a_1 = 2\,a$ gesetzt,

$$\lambda_1 = {}^{4}/_{3} \cdot \frac{a}{b}\,\delta,$$

$$\text{also für die ganze Kette: } \lambda = {}^8/_3 \cdot \frac{a}{b}\,\delta,$$

$$\text{sowie umgekehrt: } \delta = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a}\,\lambda.$$

Nun folgt aber aus dem Gewichte G der halben Kettenbrücke die Horizontalspannung oder Spannung im Scheitel:

$$H = G\ cotang.\ \alpha$$

und die Maximalspannung oder Spannung an den Enden:

$$S = \frac{G}{sin.\ \alpha};$$

es läßt sich daher im Mittel die Spannung:

$$S_1 = \frac{H + S}{2} = \frac{G\,(1 + cos.\ \alpha)}{2\,sin.\ \alpha}$$

und die von ihr bewirkte Ausdehnung der Spannketten setzen:

$$\lambda = \frac{(1 + cos.\ \alpha)}{2\,sin.\ \alpha} \cdot \frac{G}{FE} \cdot 2l \text{ (s. Band I, §. 204),}$$

wofür annähernd $\lambda = \frac{2\,Gb}{FE\,sin.\ \alpha}$ anzunehmen ist. Führen wir diesen Werth in den Ausdruck für δ ein, so erhalten wir die gesuchte Vergrößerung der Bogenhöhe bei der belasteten Spannkette:

$$\delta = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{2\,Gb}{FE\,sin.\ \alpha} = {}^3{}_4 \frac{G}{FE\,sin.\ \alpha} \cdot \frac{b^2}{a}, \text{ oder}$$

$$sin.\ \alpha = \frac{2a}{\sqrt{b^2 + 4a^2}}, \text{ annähernd} = \frac{2a}{b} \text{ gesetzt, folgt:}$$

$$\delta = {}^3/_8 \cdot \frac{G}{FE} \cdot \frac{b^3}{a^2}.$$

Das Schmiedeeisen nimmt mit jedem Centesimalgrad Wachsthum an Wärme um 0,0000122 an Länge zu; es ist daher diese Zunahme bei t^0 Temperaturveränderung und für die ganze Spannkette

$$= 0{,}0000122 \,.\, 2lt = 0{,}0000244 \,.\, lt.$$

Setzen wir diesen Werth in die Formel für δ, so folgt die der Temperaturzunahme t entsprechende Vergrößerung der Bogenhöhe:

$$\delta_1 = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a} \cdot 0{,}0000244 \cdot lt, \text{ oder annähernd,}$$

$$= 0{,}00000915 \cdot t \cdot \frac{b^2}{a}.$$

Ebenso bestimmt sich die Verkürzung bei einer Temperaturabnahme.

Beispiel. Behalten wir die Werthe des Beispieles im letzten Paragraphen bei, so erhalten wir die Vergrößerung der Bogenhöhe in Folge der Belastung

der Brücke, wenn wir den Elasticitätsmodul E des Stabeisens $= 30000000$ (s. Band I., §. 212) setzen, und zur Belastung 158845 Pfund noch das halbe Gewicht der Spannketten, d. i.

$$Fb\left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\gamma = 27{,}2 \,.\, 259 = 7045 \text{ Pfund}$$

hinzufügen, also $G = 158845 + 7045 = 165890$ Pfund annehmen:

$$\delta = \tfrac{5}{8} \cdot \frac{165890}{27{,}2 \,.\, 30000000} \cdot \frac{900^3}{180^2} = 1{,}72 \text{ Zoll.}$$

Bei einem Temperaturwechsel von 20^0 stellt sich diese Veränderung

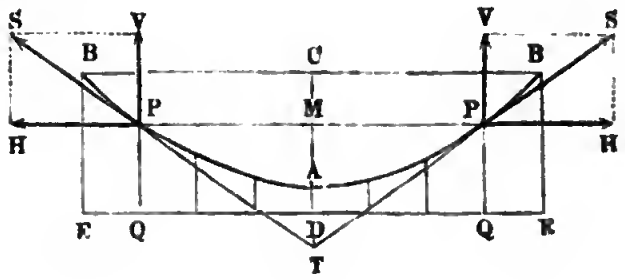
$$\delta_1 = 0{,}00000915 \,.\, 20 \cdot \frac{900^2}{180} = 0{,}82 \text{ Zoll}$$

heraus.

(§. 89) **Ketten von gleichem Widerstande.** Da die Spannung der Tragketten einer Kettenbrücke von unten nach oben allmälig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten nicht überall gleich groß machen, sondern denselben vom Scheitel aus, nach den Aufhängepunkten zu, allmälig größer und größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl, oder die Dicke der Schienen in den Kettengliedern um so größer macht, je näher diese den Aufhängepunkten hängen. Um aber die größte Materialersparniß zu erlangen, ist der Querschnitt der Tragketten der Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande (s. Band I., §. 208) entsprechend zu bestimmen, wobei die Flächeneinheit des Kettenquerschnittes an allen Stellen einerlei Spannung ausgesetzt ist. Bezeichnet S die veränderliche Kettenspannung, F den entsprechenden Kettenquerschnitt und T den Tragmodul des Kettenmaterials, so hat man folglich zu fordern, daß $\frac{S}{F} = T$ sei.

Es seien x und y die Coordinaten AM und MP des Punktes P in der Curve BAB, welche von der Tragkette gebildet wird, ferner bezeichne s den

Fig. 164.



diesen Coordinaten entsprechenden Bogen AP, sowie α den Tangenten- oder Neigungswinkel $MPT = SPH$ dieses Bogens in P, endlich werde noch

die Dichtigkeit der Tragkette durch γ und das Gewicht des laufenden Fußes Brückenbahn EDE durch q bezeichnet.

Es wiegt ein Element der Tragkette, von dem Querschnitte F und der Länge ∂s, $F\partial s.\gamma$, folglich ist das Gewicht des Kettenbogens AP:

$$\int F\partial s.\gamma = \gamma \int F\partial s.$$

Addirt man hierzu das Gewicht qy des darunterhängenden Brückenbahnstückes DQ, so erhält man die Verticalspannung, oder den verticalen Componenten der Kettenspannung S:

$$V = \gamma \int F\partial s + qy = \gamma \int \frac{S\partial s}{T} + qy.$$

Nun bestimmt sich auch S aus der constanten Horizontalspannung $\overline{PH} = H$ durch die bekannte trigonometrische Formel:

$$S = \frac{H}{cosin.\,\alpha},$$

oder, da auch $cosin.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial s}$ ist (s. Band I., analyt. Hülfslehren Artikel 32), durch $S = \frac{H\partial s}{\partial y}$; daher folgt dann:

$$V = \frac{\gamma H}{T} \int \frac{\partial s^2}{\partial y} + qy,$$

oder, da $V = H\ tang.\,\alpha$ gesetzt werden kann:

$$tang.\,\alpha = \frac{\gamma}{T} \int \frac{\partial s^2}{\partial y} + \frac{qy}{H}.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \frac{\gamma}{T}\,\frac{\partial s^2}{\partial y} + \frac{q\partial y}{H},$$

oder, da $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 1\right]\partial y^2 = [1 + (tang.\,\alpha)^2]\partial y^2$ ist:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \frac{\gamma}{T}\,[1 + (tang.\,\alpha)^2]\,\partial y + \frac{q}{H}\,\partial y,$$

und daher:

$$\partial y = \frac{\partial\,(tang.\,\alpha)}{\frac{\gamma}{T} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{T}\,(tang.\,\alpha)^2}.$$

Da im Scheitel A die Spannung $= H$ ist, so folgt der Querschnitt der Kette an dieser Stelle:

$$F_0 = \frac{H}{T},\ \text{also umgekehrt:}\ H = F_0\,T,\ \text{und}$$

$$\partial y = \frac{T\partial\,(tang.\,\alpha)}{\gamma + \frac{q}{F_0} + \gamma\,(tang.\,\alpha)^2}.$$

Noch kann man $q = F_0\,\gamma_1$ ſetzen, wo γ_1 die Dichtigkeit eines prismatiſchen Körpers vom Querſchnitte F_0 und der Länge = Eins bezeichnet, deſſen Gewicht dem laufenden Fuß Brückenbahn gleich iſt, daher folgt nun:

$$\partial y = \frac{T\cdot\partial\,(tang.\,\alpha)}{\gamma + \gamma_1 + \gamma\,(tang.\,\alpha)^2}.$$

Dieſen Ausdruck hat man nun zweimal hinter einander zu integriren, um die geſuchte Gleichung der Kettenbrückenlinie zu finden.

(§. 90) Es iſt auch:

$$\partial y = \frac{T\partial\,(tang.\,\alpha)}{(\gamma + \gamma_1)\left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}\,(tang.\,\alpha)^2\right)}$$

$$= \frac{T\partial\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right)}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}\left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right)^2\right]}$$

$$= \frac{T\partial u}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)\,(1 + u^2)}},$$

wenn $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha$ durch u bezeichnet wird.

Nach Band I., analyt. Hülfslehren Artikel 26, VI., hat man aber:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = arc.\,(tang. = u),$$

daher folgt hier zunächſt die Gleichung zwiſchen der Ordinate y und dem Tangenten- oder Neigungswinkel α:

$$y = \frac{T}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}\,arc.\left(tang. = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right),$$

ſowie umgekehrt:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha = tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}{T}\right),$$

d. i.:

$$1)\quad tang.\,\alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\,tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}{T}\right),$$

wozu keine Conſtante hinzuzufügen iſt, da für $y = 0$, $\alpha = 0$ und daher auch $tang.\,\alpha = 0$ ausfällt.

Nun iſt aber $tang.\,\alpha = \frac{\partial x}{\partial y}$, daher läßt ſich:

$$\partial x = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\, tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T}\right)\partial y$$

ſetzen.

Nach Formel VIII. des letzten Citates iſt endlich:

$$\int tang.\, w\,\partial w = -\,Log.\,nat.\,cos.\,w = Log.\,nat.\,\frac{1}{cos.\,w}$$
$$= Log.\,nat.\,sec.\,w,$$

daher hier:

$$x = \int\sqrt{\frac{\gamma+\gamma_1}{\gamma}}\, tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T}\right)\partial y = \frac{T}{\gamma}\,Log.\,nat.\,sec.\,w,$$

oder, da $w = \frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T}$ bezeichnet:

$$2)\quad x = \frac{T}{\gamma}\,Log.\,nat.\left(sec.\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T}\right),$$

wozu ebenfalls keine Conſtante nöthig iſt, da für $y = 0$, $sec. = 1$, folglich $Log.\,nat.\,sec. = 0$ iſt, wie x.

Sind die Coordinaten x und y gegeben, ſo kann man γ_1 beſtimmen, wie folgt. Es iſt:

$$3)\quad sec.\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T} = e^{\frac{x\gamma}{T}},$$

wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Setzt man nun den Bogen

$$\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma+\gamma_1)}}{T} = \psi,\ \text{alſo}\ Log.\,nat.\,sec.\,\psi = \frac{x\gamma}{T},$$

ſo hat man:

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T\psi}{y}\right)^2,$$

und daher:

$$4)\quad \gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T\psi}{y}\right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right]\gamma$$

Hieraus beſtimmt ſich weiter der Querſchnitt der Tragkette im Scheitel A:

$$5)\quad F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma\left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right]},$$

und die Horizontalſpannung:

$$6)\quad H = F_0\,T = \frac{q\,T}{\gamma\left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right]}.$$

Ferner iſt für einen Punkt P der Kette die Verticalſpannung:

$$7)\quad V = H\ tang.\ \alpha,$$

ſowie die Tangentialſpannung:

$$8)\quad S = \frac{H}{cosin.\ \alpha}$$

und der Querſchnitt:

$$9)\quad F = \frac{S}{T} = \frac{H}{T\ cosin.\ \alpha} = \frac{F_0}{cosin.\ \alpha},$$

wobei ſich einfach α durch den Ausdruck

$$tang.\ \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\ tang.\ \psi$$

beſtimmen läßt.

Das Gewicht G des Kettenſtückes $\overline{AP}$ iſt endlich beſtimmt durch die Gleichung:

$$V = G + qy,$$

alſo:

$$10)\quad G = V - qy = H\ tang.\ \alpha - qy.$$

Die Aufgabe wird durch dieſe Formeln inſofern noch nicht vollſtändig gelöſt, da bei der Entwickelung derſelben nicht auf das veränderliche Gewicht der Hängeſtangen Rückſicht genommen worden iſt. Es fällt indeſſen dieſes Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängeſtangenlänge $c = \frac{x}{3}$ einführen, und folglich für das Gewicht derſelben, $G_1 = F_1 c\gamma$ ſetzen zu können.

Nun iſt aber der Querſchnitt ſämmtlicher Hängeſtangen an AP zuſammengenommen:

$$F_1 = \frac{qy}{T_1 - c\gamma}\ \text{annähernd} = \frac{qy}{T_1},$$

daher folgt:

$$G_1 = \frac{qc\gamma}{T_1} \cdot y = 3{,}36\,\frac{qcy}{T_1},$$

und es iſt folglich in den obigen Ausdrücken ſtatt

$$qy,\ \left(1 + 3{,}36\,\frac{c}{T_1}\right) qy$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Löſung dieſer Aufgabe mit Rückſicht auf das veränderliche Gewicht der Hängeſtangen iſt zu finden in „the Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843". S. auch in Bd. I, des Civilingenieurs „die Abhandlung von Dr. O. Schlömilch" über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beiſpiele. Für die Kettenbrücke im Beiſpiel von §. 87 erhalten wir, wenn wir in

$$Log.\ nat.\ sec.\ \psi = \frac{x\gamma}{T},\ \gamma = 3{,}36,\ T = 16420,$$

und statt x, die ganze Pfeilhöhe $a = 15$ Fuß einsetzen:

$$Log.\ nat.\ sec.\ \psi = \frac{15 . 3,36}{16420} = 0,0030694,$$

es ist hiernach $Log.\ cos.\ \psi = 0,99866 - 1$, $\psi^0 = 4^0\,29'\,10''$, und $\psi = 0,078297$, so daß nun folgt:

$$\gamma_1 = \gamma\left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right],$$

wenn man für y die halbe Spannweite von 75 Fuß einsetzt:

$$\gamma_1 = 3,36\left[\left(\frac{16420 . 0,078297}{75 . 3,36}\right)^2 - 1\right] = 3,36 . 25,028 = 84,10.$$

Da die Belastung der einen Kettenhälfte sammt Hängeeisen: 157500 + 1345 = 158845 Pfund beträgt, so hat man für den laufenden Fuß:

$$q = \frac{158845}{75} = 2117,9 \text{ Pfund},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel A:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2117,9}{84,10} = 25,18 \text{ Quadratzoll}.$$

Für den Aufhängewinkel ist:

$$tang.\ \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\ tang.\ \psi = \sqrt{\frac{3,36 + 84,10}{3,36}}\ tang.\ 4^0\,29'\,10''$$

$$= \sqrt{\frac{87,46}{3,36}} \cdot tang.\ 4^0 29'\,10'' = 0,4003;$$

und hiernach folgt der Aufhängewinkel oder der Neigungswinkel der Kette im Aufhängepunkte:

$$\alpha = 21^0\,49'.$$

Bei Annahme der Parabelform erhält man diesen Winkel

$$\alpha_1 = 20^0\,23'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{cosin.\ \alpha} = \frac{25,18}{cos.\ 21^0\,49'} = 27,12 \text{ Quadratzoll}.$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0' T = 25,18 . 16420 = 413460 \text{ Pfund},$$

und die Verticalspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H\,tang.\ \alpha = 165500 \text{ Pfund},$$

endlich ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - bq = 165500 - 158845 = 6655 \text{ Pfund},$$

Bei constantem Querschnitte $F = 27,2$ Quadratzoll, wäre das Gewicht einer solchen Hälfte:

$$G = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] Fb\gamma = 272 . 27,2 = 7398 \text{ Pfund},$$

folglich ist das ganze Ersparniß an Material bei Anwendung der Kettenform von gleichem Widerstande nur:

$$2 . (7398 - 6655) = 2 . 743 = 1486 \text{ Pfund}.$$

Stossende Belastung. Bei der vorstehenden Theorie der Ketten- §. 91
brücken wurde eine ruhende Belastung vorausgesetzt, wobei natürlich die Hängestangen und Tragketten weniger in Anspruch genommen werden, als wenn die Last stoßend auf die Brückenbahn wirkt. Um sich wenigstens ein

allgemeines Urtheil über die Wirkungen solcher Stöße zu verschaffen, wollen wir annehmen, daß längs der ganzen Brückenbahn auf den laufenden Fuß eine Last q_1 mit der Geschwindigkeit v auf diese Bahn aufschlage. Hat dieselbe ohnedies auf jeden Fuß Länge das Gewicht q, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher $q + q_1$ nach dem Stoße gemeinschaftlich wieder zu sinken beginnen (vergl. Band I., §. 332):

$$w = \frac{q_1 v}{q + q_1},$$

und es ist hierbei das beiden Körpern gemeinschaftliche Arbeitsvermögen:

$$(q + q_1) \frac{w^2}{2g} = \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Dieses Arbeitsvermögen wird durch die Ausdehnung der Hängestangen und die der Tragkette aufgehoben. Ist P die veränderliche Ausdehnungskraft oder die verticale Zugkraft während dieser Ausdehnungen, so hat man bei dem Querschnitte F_1, der Länge c und dem Elasticitätsmodul E_1 einer Hängestange deren Ausdehnung:

$$\lambda_1 = \frac{Pc}{F_1 E_1},$$

und folglich die hierbei von dieser Stange aufgenommene mechanische Arbeit:

$$\frac{P\lambda_1}{2} = \frac{P^2 c}{2 F_1 E_1} \text{ (vergl. Band I., §. 348).}$$

Diese Formeln gelten auch für die ganze Brücke, wenn man unter P die Stoßkraft längs der ganzen Brücke, unter F_1 die Summe der Querschnitte aller Hängestangen und unter c die mittlere Länge einer Hängestange versteht.

Bezeichnet ferner S die durch diesen Stoß bewirkte Vergrößerung der Spannung einer Tragkette, $2l$ die Länge, sowie F den Querschnitt und E den Elasticitätsmodul derselben, so ist die entsprechende Verlängerung dieser Kette:

$$\lambda = \frac{2Sl}{FE},$$

und ebenso die von ihr verzehrte mechanische Arbeit:

$$\frac{S\lambda}{2} = \frac{S^2 l}{FE},$$

oder da man $S = \frac{1/2\, P}{\sin.\alpha}$ setzen kann: $\frac{S\lambda}{2} = 1/4 \frac{P^2 l}{FE \sin.\alpha^2}$.

Setzt man die Summe der Arbeiten $\frac{P\lambda_1}{2}$ und $\frac{S\lambda}{2}$ dem oben angegebenen Arbeitsvermögen $2b(q + q_1)\frac{w^2}{2g}$ gleich, so erhält man folgende Gleichung:

$$\left(1/4 \frac{l}{FE \sin.\alpha^2} + 1/2 \frac{c}{F_1 E_1}\right) P^2 = \frac{2bq_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

woraus dann die Kraft:

$$1)\quad P = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}\frac{l}{FE\sin.\alpha^2} + \frac{1}{2}\frac{c}{F_1 E_1}} \cdot \frac{2bq_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}}$$

folgt.

Aus P ergiebt sich nun die mittlere Senkung der Brücke in Folge der Ausdehnung der Hängestäbe:

$$2)\quad \lambda_1 = \frac{Pc}{F_1 E_1},$$

und die mittlere Senkung derselben in Folge der Ausdehnung der Kette:

$$\delta = \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{a}\lambda, \text{ d. i.}$$

$$3)\quad \delta = \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{Pl}{FE\sin.\alpha}.$$

Vernachlässigt man die Senkung oder Ausdehnung λ_1 der Hängestäbe, so hat man:

$$P = \sqrt{\frac{4FE\sin.\alpha^2}{l} \cdot \frac{2bq_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

und daher:

$$\delta = \frac{3}{4}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2bl}{FE} \cdot \frac{q_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

oder annähernd, wenn man $l = b$ setzt:

$$\delta = \frac{3}{4}\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{2q_1^2}{FE(q+q_1)} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Wird der Stoß durch die Masse $2lq_1$ $n$mal wiederholt, und zwar in dem Augenblicke, wenn die Senkung die größte (δ) geworden ist, so hat man die auf die Ausdehnung der Spannkette aufgewendete Arbeit:

$$n \cdot \frac{2bq_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und folglich die endliche Senkung der Kette:

$$\delta_1 = \delta\sqrt{n}.$$

Dieser Fall kann vorkommen, wenn eine gedrängte Menschenmasse im tactmäßigen Schritt über die Brücke geht. Die hierbei erfolgte Ausdehnung der Kette ist:

$$\lambda = \frac{Pl}{FE\sin.\alpha} = \sqrt{\frac{8nbl}{FE} \cdot \frac{q_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

annähernd:

$$= 2b\sqrt{\frac{2n}{FE} \cdot \frac{q_1^2}{q+q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

und die Spannung der Kette:

$$S_1 = \frac{\lambda}{2l} FE = \sqrt{2n\, FE \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Damit die Tragkette durch diese Stöße nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus gedehnt werde, muß die Gesammtspannnng

$$S + S_1 < FT$$

sein.

Hat man der Kette μ fache Sicherheit gegeben, ist also:

$$F = \mu \frac{S}{T}, \text{ oder } S = \frac{FT}{\mu},$$

so muß sein:

$$S_1 < FT\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

Beispiel. Wenn wir bei der Kettenbrücke im Beispiele zu §. 87 die Last $2bq_1 = 78750$ Pfund nicht auffliegend, sondern mit der Geschwindigkeit $v = 5$ Fuß aufstoßend annehmen, das übrige Gewicht der Brückenbahn aber

$$2bq = 78750 \text{ Pfund}$$

beibehalten, so ist zu setzen:

$$b = 75,\ q = q_1 = {}^{78750}/_{150} = 525,$$

also:

$$\frac{q_1^2}{q + q_1} = {}^{525}/_{2} = 262{,}5,$$

ferner:

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 25 = 0{,}4, \text{ und } FE = 27{,}2 \,.\, 30000000 = 816000000,$$

folglich die Verlängerung der Tragkette, in Folge des Stoßes der Masse q_1:

$$\lambda = 2b\sqrt{\frac{2}{FE} \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}} = 150\sqrt{\frac{2 \,.\, 262{,}5 \,.\, 0{,}4}{816000000}} = 150\sqrt{\frac{1}{3860000}}$$
$$= 150 \,.\, 0{,}000508 = 0{,}0762 \text{ Fuß}.$$

Wäre die Anzahl der Stöße $n = 100$, so würde folglich diese Verlängerung

$$\lambda\sqrt{n} = \lambda\sqrt{100} = 10\,\lambda = 0{,}762 \text{ Fuß},$$

und die entsprechende Vergrößerung der Kettenspannung pro Quadratzoll Querschnitt:

$$S_1 = \frac{\lambda\sqrt{n}}{2l} FE = \frac{0{,}762}{150} 30000000 = 152400 \text{ Pfund}$$

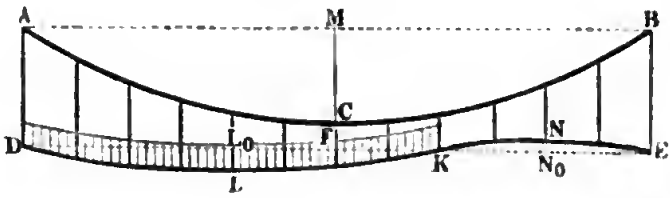
betragen.

Da der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens nur $T = 56000$ Pfund beträgt, so wäre ein Zerreißen der Tragketten bei diesen Stößen eine unausbleibliche Folge.

§. 92 **Wirkung der einseitigen Belastung.** Unter der Voraussetzung, daß durch die mobile Last DK, Fig. 165, auf der nur an den Enden festgehaltenen Brückenbahn DE die parabolische Form der Kette ACB nicht wesentlich verändert werde, lassen sich die Biegungsverhältnisse dieser Bahn nach Rankine wie folgt, ermitteln.

Ist die Größe der mobilen Last pr. Einheit Brückenlänge, $= q_1$ und nimmt dieselbe Last auf der Brücke die Länge $DK = DF + FK$

Fig. 165.



$= b + x$ ein, hat also die ganze mobile Last das Gewicht $Q_1 = (b + x)\, q_1$, so läßt sich die entsprechende Spannung der Hängestangen auf die laufende Einheit Brückenlänge, $q_2 = \frac{Q_1}{2\,b} = \frac{(b + x)\, q_1}{2\,b}$ setzen, und daher auch annehmen, daß das unbelastete Stück KE der Brückenbahn mit der gleichmäßig vertheilten Kraft $Q_2 = (b - x)\, q_2 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b}$ durch die Hängestangen von unten nach oben gezogen werde.

Eben so groß ist auch die Kraft

$$(b + x)\,(q_1 - q_2) = (b + x)\left(1 - \frac{b + x}{2\,b}\right) q_1 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b},$$

mit welcher das belastete Stück AK der Brückenbahn nach unten gebogen wird. Jede dieser Kräfte zerlegt sich in zwei Hälften, welche die Endpunkte des Stückes DK nach unten drücken, und die des Stückes EK nach oben ziehen. Es ist folglich die Scheerkraft zwischen beiden Balkenstücken in K,

$$R = \frac{Q_2}{2} = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{4\,b}.$$

Diese Kraft ist für $x = 0$, also wenn die mobile Last nur bis zur Mitte reicht, am größten, und zwar

$$R_m = \frac{b q_1}{4}.$$

Das Biegungsmoment des belasteten Brückenstückes DK ist, da man es hier mit einer auf die Länge $b + x$ gleichförmig vertheilten Last $Q_2 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b}$ zu thun hat, nach Bd. I, §. 240,

$$M_1 = \frac{Q_2\,(b + x)}{8} = \frac{(b + x)\,(b^2 - x^2)\, q_1}{16\,b},$$

und das des unbelasteten Brückenstückes EK, da dasselbe auf der Länge $b - x$ mit gleichförmig vertheilter Kraft nach oben gezogen wird,

$$M_2 = \frac{Q_2\,(b - x)}{8} = \frac{(b - x)\,(b^2 - x^2)\, q_1}{16\,b}.$$

Das erſtere Moment iſt ein Maximum für $x = \frac{b}{3}$, das letztere für $x = -\frac{b}{3}$, und zwar das eine oder andere

$$M_m = \pm \tfrac{2}{27}\, b^2 q_1.$$

In dem einen Falle iſt alſo das größere Stück von der Länge $b + x = \tfrac{4}{3} b =$ zwei Drittel, und im zweiten das kleinere Stück $b - x = \tfrac{2}{3} b =$ ein Drittel der Brückenlänge $(2b)$ belaſtet.

Wäre die ganze Brückenbahn mit $Q = 2 b q_1$ belaſtet, ohne von den Hängeſtangen getragen zu werden, ſo würde das Biegungsmoment

$$M = \frac{Q b}{4} = \frac{b^2 q_1}{2} = \tfrac{27}{4} \cdot \tfrac{2}{27}\, b^2 q_1,$$

d. i. ſiebenzwanzig Viertel mal ſo groß ſein, als das ſo eben gefundene Maximalmoment der aufgehangenen Brückenbahn.

Die größte Durchbiegung des belaſteten Brückenſtückes DK iſt nach Band I, §. 223

$$a_1 = \tfrac{5}{8} \frac{Q_2 (\tfrac{4}{3} b)^3}{48\, WE} = \tfrac{5}{27} \frac{Q_2 b^3}{6\, WE},$$

oder, wenn man die halbe Trägerhöhe der Brücke mit e, ſowie den Tragmodul des Trägermateriales mit T bezeichnet, und daher

$$Q_2 \cdot \tfrac{4}{3} b = 8 \frac{WT}{e} \text{ ſetzt,}$$

$$a_1 = \tfrac{5}{27} \frac{Tb^2}{Ee}.$$

Wäre die ganze Brückenbahn nicht aufgehangen, ſondern an den Enden nur unterſtützt, ſo würde die Durchbiegung

$$a = \tfrac{5}{8} \frac{Q_2 b^3}{6\, WE} = \tfrac{5}{8} \cdot \frac{4\, Tb^2}{6\, Ee} = \tfrac{5}{12} \frac{Tb^2}{Ee} = \tfrac{9}{4} \cdot \tfrac{5}{27} \frac{Tb^2}{Ee},$$

d. i. neun Viertel mal ſo groß ſein, als bei der durch die Spannkette getragenen Brückenbahn. Die Größe der Aufbiegung des unbelaſteten Brückenſtückes iſt dagegen

$$a_2 = \tfrac{5}{8} \cdot \frac{Q_2 (\tfrac{2}{3} b)^3}{48\, WE} = \tfrac{5}{27} \frac{Q_2 b^3}{48\, WE}, \text{ oder da hier}$$

$$Q_2 \cdot \tfrac{2}{3} b = \frac{8\, WT}{e} \text{ zu ſetzen iſt,}$$

$$a_2 = \tfrac{5}{27} \cdot \frac{Tb^2}{4\, Ee}, \text{ d. i. ein Viertel von der Durchbiegung}$$

des belaſteten Theiles.

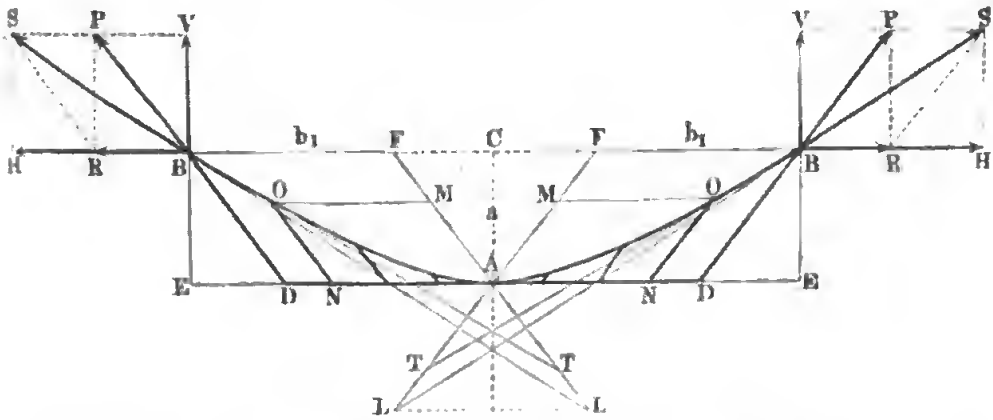
Damit eine Hängebrücke den Wirkungen der beweglichen Laſt den nöthigen Widerſtand entgegen ſetzen könne, verſieht man die Brückenbahn entweder mit

beſonderen Tragwänden, oder mit Zugſeilen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagara-Brücke; auch wendet man wohl eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugſtangen mit der Brückenbahn verbunden wird.

Ferner vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man je zwei Spannketten über einander hängt, und dieſelben unter einander verſtrebt, wie eine gewöhnliche Fachwerkswand.

Hängebrücken mit geneigten Hängeſtangen. Die Hängebrücken BAB, Fig. 166, mit geneigten Hängeſtangen BD, QN... ſind ebenfalls ſteifer als die mit verticalen Hängeſtangen. Es §. 93

Fig. 166.



iſt auch hier die Verticalſpannung V an einem Kettenende B, gleich der Laſt Q der halben Brücke AD. Aus derſelben beſtimmt ſich mit Hülfe des Neigungswinkels $BDE = \beta$ der Hängeſtäbe gegen den Horizont die Geſammtſpannung der Hängeſtäbe in einer Brückenhälfte:

1) $P = \frac{V}{\sin.\beta} = \frac{Q}{\sin.\beta}$, und die Kraft, mit welcher jede Brückenhälfte durch die Kraft P nach außen gezogen wird

2) $R = P \cos.\beta = Q \operatorname{cotang.}\beta$.

Aus der Spannweite $BB = 2\,CB = 2\,b$, und der ſenkrechten Bogenhöhe $AC = a$, folgt die geneigte Bogenhöhe AD, d. i.

3) $a_1 = \frac{a}{\sin\beta}$, und die halbe Spannweite zwiſchen den Aufhängepunkten D, D der Brückenbahn,

$$AD = FB = CB - CF, \text{ d. i.}$$

4) $b_1 = b - a \operatorname{cotang.}\beta$.

Da die Kette AB auch hier durch lauter gleiche parallele Kräfte geſpannt wird, deren Angriffspunkte einen und denſelben Normalabſtand von einander

haben, so bildet dieselbe ebenfalls einen Parabelbogen, und es ist daher auch die Subtangente eines Punktes O in derselben gleich der doppelten, in der Richtung der Hängestange gemessenen Abscisse $AM = x_1$, d. i. $MT = 2MA = 2x$, für den Aufhängepunkt B ist die Abscisse $AM = a_1$, und die Ordinate $FB = b_1$, und die Subtangente $FL = 2a$. Bezeichnet man daher die Neigung $SBH = FBL$ der Spannkette in B durch α, so hat man, da

$$\frac{sin.BLF}{sin.FBL} = \frac{BF}{FL} \text{ ist,}$$

$$\frac{sin.(\beta - \alpha)}{sin.\alpha} = \frac{b_1}{2a_1}, \text{ woraus dann}$$

5) $cotang.\alpha = cotang.\beta + \frac{b_1}{2a_1 \, sin.\beta}$ folgt.

Die Seilspannung in den Aufhängepunkten ist durch die Proportion

$$\frac{S}{P} = \frac{sin.BPS}{sin.BSP} = \frac{sin.\beta}{sin.\alpha} \text{ bestimmt, und hiernach}$$

6) $S = \frac{P \, sin.\beta}{sin.\alpha} = \frac{Q}{sin.\alpha}$ zu setzen.

Die Horizontalspannung H des Seiles im Aufhängepunkte B ist

7) $H = S \, cos.\alpha$.

Da die Hängestangen der beiden Brückenhälften entgegengesetzt geneigt sind, so geben sie der ganzen Brücke einen Widerstand gegen Längenschwingungen, welchen die Brücke mit vertiealen Hängestangen nicht hat. Auch wird durch die Horizontalspannungen R und R der Brückenbahn die Durchbiegung der letzteren vermindert.

§. 94 **Charnierbrücken.** Die in den neueren Zeiten in Vorschlag und auch bereits mehrfach in Ausführung gebrachten Charnierbrücken, lassen sich sowohl bei den Spreng- als auch bei den Hängewerksbrückensystemen mit Vortheil anwenden. Durch Anbringung von Charnieren oder horizontalen Drehungsaxen werden die durch Temperaturwechsel und durch Nachgeben der Widerlager hervorgebrachten gefährlichen Spannungen der Bogenbrücken beseitigt, und den Spannungen überhaupt bestimmte Richtungen gegeben, wodurch es möglich wird, die Größen der Spannungen und folglich auch die denselben entsprechenden Querschnittsdimensionen der Brücke mit Sicherheit zu bestimmen. Insbesondere leisten die Charniere bei einseitigen oder mobilen Belastungen die besten Dienste. Um den Zweck vollkommen zu erreichen, erhält ein solcher Brückenbogen wie ADB, Fig. 167 u. Fig. 168 ein Charnier im Scheitel D, und je ein Gelenk in den Stützpunkten A und B. Die Kräfte, welche dann die Widerlager auszuhalten haben, wenn die Brücken auf der ganzen Länge $AB = UU = 2b$ pr. Einheit mit p, und auf der halben Länge $AC = UD = b$ pr Einheit mit q belastet ist, bestimmen sich unter der Voraussetzung, daß

sowohl der Spreng- als auch der Hängebogen ADB die Parabelform hat, wie folgt. Aus der constanten Last $P = 2bp$ gehen die Tangentialspan-

Fig. 167.

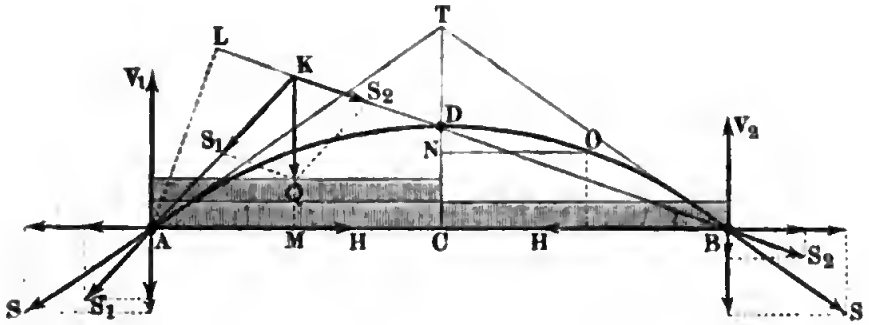
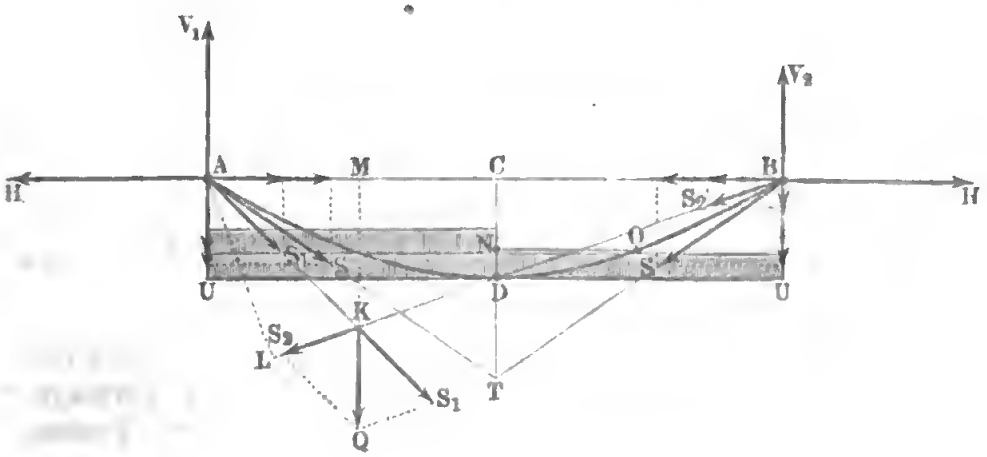


Fig. 168.



nungen S und S in den Stützpunkten A und B hervor, deren verticale Componenten je $\frac{1}{2} P = bp$ und horizontale Componenten $\frac{b}{2a} \cdot \frac{1}{2} P = \frac{b^2 p}{2a}$ sind. (Siehe §. 77.) Die mobile Last $Q = bq$, deren Angriffspunkt K in einer Verticalen gedacht werden kann, welche AC halbirt, zerlegt sich dagegen in zwei von den Stützpunkten A und B aufzunehmende Kräfte S_1 und S_2, wovon die zweite in Folge der Drehbarkeit um D, die Richtung DB annehmen muß. Da die Richtung der Seitenkraft S_1 durch A geht, so haben in Hinsicht auf diesen Drehungspunkt die Kräfte S_2 und Q ein und dasselbe Moment, es ist also, da der Hebelarm von S_2 das Perpendikel $AL = AB \sin. ABD = 2b \sin. \beta$, und der Hebelarm von Q, $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{b}{2}$ ist,

$$S_2 . 2\,b\,sin.\,\beta = Q\,\frac{b}{2}, \text{ und daher}$$

$$S_2 = \frac{Q}{4\,sin.\,\beta} = \frac{bq}{4\,sin.\,\beta}.$$

Der verticale Component dieſer Kraft iſt $S_2\,sin.\,\beta = \frac{bq}{4}$, und der horizontale Component derſelben,

$$S_2\,cos.\,\beta = \frac{bq}{4}\,cotg.\,\beta = \frac{b^2 q}{4\,a},$$

wogegen der verticale Component von S_1,

$Q - S_2\,sin.\,\beta = bq - \frac{bq}{4} = {}^3/_4\,bq$, und der horizontale Component derſelben wieder $S_2\,cos.\,\beta = -\frac{b^2 q}{4\,a}$ ausfällt.

Hiernach iſt alſo die ganze Horizontalkraft in jedem der Stützpunkte A und B,

$$H = \frac{b^2 p}{2\,a} + \frac{b^2 q}{4\,a} = \frac{b^2}{2\,a}\left(p + \frac{q}{2}\right),$$

dagegen der geſammte Verticaldruck in A,

$V_1 = bp + \frac{3\,bq}{4} = b\,(p + {}^3/_4\,q)$, und der in B,

$V_2 = bp + {}^1/_4\,bq = b\,(p + {}^1/_4\,q)$.

Nachdem man die äußeren Kräfte H, $-H$, V_1 und V_2 beſtimmt hat, kann man nach bekannten Regeln, z. B. mit Hülfe der Theorie der Drehungsmomente (§. 64), die Spannungen an jeder beliebigen Stelle des Tragbogens ermitteln, derſelbe mag maſſiv ſein, oder aus Fachwerk beſtehen.

Für eine Stelle O des Bogens, deſſen Coordinaten $DN = x$ und $NO = y$ ſind, iſt das Biegungsmoment M zuſammengeſetzt aus dem Momente $H.\overline{CN} = H\,(a - x)$ der Horizontalkraft H, dem Momente $-V_2\,(CB - NO) = -V_2\,(b - y)$ der Verticalkraft V_2, und dem Momente ${}^1/_2\,(b-y)^2\,p$ der von dem Bogen BO zu tragenden Laſt $(b-y)p$. Es iſt daher

$$M = H\,(a - x) - V_2\,(b - y) + \frac{p}{2}\,(b - y)^2, \text{ d. i.,}$$

da die Parabelgleichung $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$, $x = \frac{a\,y^2}{b^2}$ giebt,

$$M = Ha\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - V_2\,(b - y) + {}^1/_2\,p\,(b - y)^2.$$

$$= Ha - V_2\,b + {}^1/_2\,pb^2 + (V_2 - pb)\,y - \left(\frac{Ha}{b^2} - {}^1/_2\,p\right)y^2.$$

Dieſes Moment iſt ein Maximum für

$$\left(\frac{2Ha}{b^2} - p\right) y = V_2 - pb, \text{ wonach}$$

$$y = \frac{V_2 - pb}{\frac{2Ha}{b^2} - p} = \frac{{}^1/_4 bq}{{}^1/_2 q} = \frac{b}{2} \text{ und } x = \frac{a}{4} \text{ folgt.}$$

Hiernach iſt das geſuchte größte Biegungsmoment des Bogens BD

$M = {}^3/_4 Ha - {}^1/_2 V_2 b + {}^1/_8 pb^2 = {}^3/_8 b^2 p + {}^3/_{16} b^2 q - {}^1/_2 b^2 p - {}^1/_8 b^2 q + {}^1/_8 b^2 p = {}^1/_{16} b^2 q.$

Ebenſo groß fällt auch das größte Biegungsmoment auf der anderen Seite AD des Bogens aus, wo die mobile Laſt bq aufruht.

Außer dieſem Biegungsmomente hat der Bogenträger in O auch noch die Horizontalkraft H und die Verticalkraft $V_2 - \frac{b}{2} p$ auszuhalten. Aus beiden Kräften reſultirt eine Druck- oder Zugkraft in der Tangentenrichtung, und eine Schubkraft in der Richtung der Normale von O. Bezeichnet β den Winkel, welchen der Bogen in O mit dem Horizont einſchließt, und welcher durch die Gleichung

$$tang.\beta = \frac{2\overline{DN}}{ON} = \frac{{}^1/_2 a}{{}^1/_2 b} = \frac{a}{b}$$ beſtimmt iſt, ſo hat man die Druck- oder Zugkraft in O:

$$R = H\, cos.\beta + \left(V_2 - \frac{bp}{2}\right) sin.\beta, \text{ und dagegen die Schubkraft}$$

$$N = H\, sin.\beta - \left(V_2 - \frac{bp}{2}\right) cos.\beta.$$

Bezeichnet nun F den Querſchnitt, W das Biegungsmoment und h die Höhe des Trägers in O oder des mit ihm in O feſt verbundenen Fachwerkes, und bedeutet T den Tragmodul des Trägermateriales, ſo hat man zu ſetzen:

$$\frac{{}^1/_2 Mh}{W} + \frac{R}{F} < T, \text{ ſo wie } \frac{N}{F} < T.$$

Pfeiler und Widerlager. Ein wichtiger Gegenſtand iſt noch die §. 95
Beſtimmung der Dimenſionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind S und S_1 die Spannungen der über einen Pfeiler $ABCD$ weggehenden Ketten, Fig. 169 (a. f. S.), und α und α_1 ihre Neigungswinkel, ſo hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler:

$$V_2 = V + V_1 = S\, sin.\alpha + S_1\, sin.\alpha_1,$$

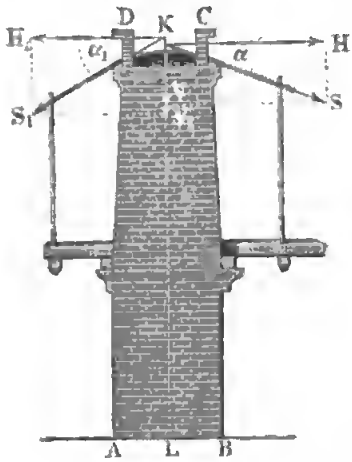
und den Horizontaldruck, da die Horizontalſpannungen einander entgegenwirken:

$$H_2 = H - H_1 = S\, cos.\alpha - S_1\, cos.\alpha_1.$$

Ist nun h die Höhe KL, e die Breite und d die Dicke AB eines Pfeilers, sowie dessen Dichtigkeit $= \gamma$, so hat man das Gewicht desselben:

$$G = deh\gamma,$$

Fig. 169.



und den gesammten Verticaldruck:

$$= V_2 + G = S\sin.\alpha + S_1 \sin.\alpha_1 + deh\gamma.$$

Damit aber die Horizontalkraft $H_2 = H - H_1$ den Pfeiler nicht umstürze um die Kante B, ist es nöthig, daß das statische Moment

$$H_2 . \overline{KL} = H_2 h = (S\cos.\alpha - S_1 \cos.\alpha_1) h$$

von dem statischen Moment

$$(V_2 + G)\ \overline{BL} = (S\sin.\alpha + S_1 \sin.\alpha_1 + deh\gamma)\ \frac{d}{2}$$

übertroffen werde, daß also

$$d^2 + \left(\frac{S\sin.\alpha + S_1 \sin.\alpha_1}{eh\gamma}\right) d > \frac{2(S\cos.\alpha - S_1 \cos.\alpha_1)}{e\gamma} \text{ oder}$$

$$d^2 + \left(\frac{V + V_1}{eh\gamma}\right) d > \frac{2(H - H_1)}{e\gamma} \text{ sei.}$$

Hiernach ist die nöthige Pfeilerdicke

$$d = -\frac{V + V_1}{2eh\gamma} + \sqrt{\frac{2\delta(H - H_1)}{e\gamma} + \left(\frac{V + V_1}{2eh\gamma}\right)^2},$$

wobei δ den Sicherheitscoefficienten 2 bis 4 bezeichnet.

Uebrigens ist der Sicherheit wegen für $S\cos.\alpha$ der größte und für $S_1 \cos.\alpha_1$ der kleinste Werth zu setzen, also anzunehmen, daß die Kette einerseits vollkommen, und andererseits ganz unbelastet sei.

Diese Formel setzt voraus, daß die Kräfte S und S_1 vollkommen übertragen werden auf den Pfeilerkopf, was allerdings nur eintritt, entweder wenn die Seilenden am Pfeilerkopf festsitzen, oder wenn die Reibung auf denselben die Differenz $S - S_1$ der Spannungen übertrifft. Nach Band I, §. 193, ist diese Reibung:

$$F = \left[\left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_1,$$

wenn φ den Reibungscoefficienten, n die Zahl der auf dem Pfeilerkopfe aufliegenden Kettenglieder und β den Centriwinkel bezeichnet, welcher einem Gliede entspricht; wenn daher

$$S - S_1 < \left[\left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_1, \text{ oder}$$

$$S < \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\beta}{2}\right)^n S_1 \text{ ist, so legt sich die Kette}$$

fest auf den Pfeilerkopf auf; außerdem gleitet sie aber auf dem Pfeilerkopfe hin, und es ist deshalb in obige Formel

$$S = \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\beta}{2}\right)^n S_1,$$

oder bei Seilen,

$$S = e^{\varphi\alpha} S_1 \text{ (s. Band I, §. 194) einzusetzen.}$$

Legt man die Kette oder das Seil auf Rollen, so ist diese Differenz, und daher die nöthige Pfeilerstärke, viel kleiner. Sind die Rollenhalbmesser $= a$, und die Zapfenhalbmesser $= r$, so hat man:

$$S = S_1 + \varphi \frac{r}{a}(S \sin.\alpha + S_1 \sin.\alpha_1) = S_1 + \varphi \frac{r}{a}(V + V_1)$$

zu setzen, weil die auf den Rollenhalbmesser reducirte Zapfenreibung den Werth

$$F = \varphi \frac{r}{a}(S \sin.\alpha + S_1 \sin.\alpha_1) \text{ hat.}$$

Besteht der Pfeiler in einer drehbaren Säule, so ist statt r der Zapfenhalbmesser und statt a die Höhe derselben einzusetzen, und liegt das Seil auf Walzen, so hat man statt φr den Hebelarm $f = 0{,}02$ Zoll der wälzenden Reibung einzuführen.

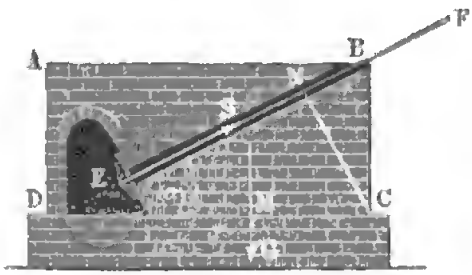
Aus der Spannung S der Spann- oder Endketten (Spann- oder Endseile) kann man auch noch die nöthigen Dimensionen der Widerlagsmauer AC, Fig. 170, bestimmen.

Die Spannung S sucht die Widerlagsmauer AC um die Kante C zu drehen, und wirkt dabei am Hebelarme

$$CN = CD \sin.\alpha_1 = l \sin.\alpha_1,$$

wenn α_1 den Neigungswinkel SDC des Seiles gegen den Horizont und l die Länge CD der Mauer bezeichnet. Das Gewicht G der Mauer wirkt aber mit dem Momente

Fig. 170.



$$G \cdot \overline{CM} = hel\gamma \cdot \frac{l}{2} = \tfrac{1}{2} hel^2\gamma$$

entgegen, wo h die Höhe BC, e die Dicke und γ die Dichtigkeit der Mauer bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$Sl \sin.\alpha_1 = \tfrac{1}{2} hel^2\gamma,$$

daher die nöthige Mauerlänge:

$$l = \frac{2\delta S \sin.\alpha_1}{he\gamma}.$$

Damit ferner dieselbe Mauer nicht fortgeschoben werde, muß ihre Reibung $\varphi\,(G - S\,sin.\,\alpha_1)$ größer, als die Horizontalkraft $S\,cos.\,\alpha_1$, also:

$$\varphi\,G > S(cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1)\text{ sein.}$$

Man setzt hiernach:

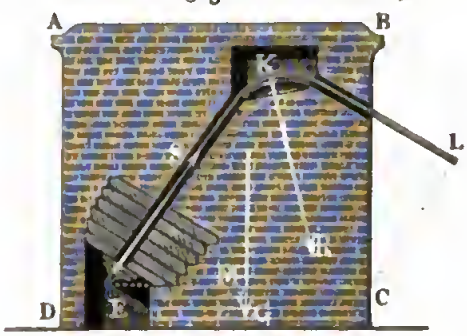
$$l = \frac{\delta\,S}{h\,e\,\gamma}\left(\frac{cos.\,\alpha_1}{\varphi} + sin.\,\alpha_1\right),$$

wobei $\varphi = 0{,}67$ und

der Sicherheitscoefficient δ 2 bis 4 anzunehmen ist.

Wenn die Kette im Widerlagspfeiler nicht bloß befestigt, sondern auch aufgelagert ist, wie in Fig. 171, so ist der Hebelarm der Spannung S das Perpendikel $CL = b$, vom Stützpunkte C nach der Seilrichtung KL gefällt, und der Hebelarm des Pfeilergewichtes G die Hälfte CM der Pfeilerlänge $CE = l$, letztere, der Sicherheit wegen, nur bis zum Befestigungspunkt E des Seiles gemessen. Hiernach hat man

Fig. 171.



$\frac{1}{2}\,h\,e\,l^2\,\gamma = S\,b$, und daher mit Rücksicht auf Sicherheit,

$$l = \sqrt{\frac{2\,\delta\,S\,b}{h\,e\,\gamma}}.$$

In Hinsicht auf das Fortschieben über CE ist, wenn α die Neigung des Tragseiles KL gegen den Horizont bezeichnet, $\varphi\,(G + S\,sin.\,\alpha) = S\,cos.\,\alpha$, wonach

$$G = \frac{S\,cos.\,\alpha - \varphi\,S\,sin.\,\alpha}{\varphi},\text{ und}$$

$$l = \frac{\delta\,S(cos.\,\alpha - \varphi\,sin.\,\alpha)}{\varphi\,h\,e\,\gamma}\text{ folgt.}$$

Beispiel. Bei der in den Beispielen der Paragraphen 87 und 88 behandelten Kettenbrücke ist die Verticalkraft der belasteten Kette:

$$V = 165890\text{ Pfund},$$

und die der unbelasteten:

$$V_1 = V - 78750 = 87140\text{ Pfund};$$

wird nun noch $\frac{r}{a} = \frac{1}{4}$ und auch $\varphi = \frac{1}{4}$ angenommen, so ist die Zapfenreibung zwischen den Rollen des Pfeilerkopfes:

$$F = \varphi\,\frac{r}{a}\,(V + V_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(165890 + 86916) = 15800\text{ Pfund}$$

viel kleiner als die Differenz der Spannungen. Es tritt daher eine Bewegung der Kette und ein Umdrehen der Rollen ein, wobei die Spannung der Kette auf der einen Seite allmälig zu-, sowie auf der anderen Seite allmälig abnimmt, und die Differenz zwischen beiden Spannungen in 15800 Pfund übergeht. Ist nun

die Pfeilerhöhe 16 Fuß, die Dicke 4 Fuß und die Dichtigkeit der Mauermasse = 130 Pfund, so hat man

$V + V_1 = 253030, e\gamma = 4 . 130 = 520, eh\gamma = 8320, H - H_1 = F = 15786,$

und wenn man noch $\delta = 4$ annimmt, so folgt die erforderliche Pfeilerdicke

$$d = -\frac{V+V_1}{2eh\gamma} + \sqrt{\frac{2\delta(H-H_1)}{e\gamma} + \left(\frac{V+V_1}{2eh\gamma}\right)^2} = -15{,}21$$

$$+ \sqrt{231{,}34 + 242{,}86} = -15{,}18 + 21\,76 = 6{,}59 \text{ Fuß}.$$

Die nöthige Länge der Widerlagsmauer hat man für den in Fig. 170 abgebildeten Fall, wenn wir $h = 16$ und $d = 10$ Fuß und die Neigungswinkel α und α_1 der Trag- und Spannketten einander gleich setzen, sowie den Sicherheitscoefficienten $\delta = 2$ annehmen,

$$l = \frac{2\delta S \sin.\alpha_1}{he\gamma} = \frac{4 . 165890}{16 . 10 . 130} = 31{,}9 \text{ Fuß}.$$

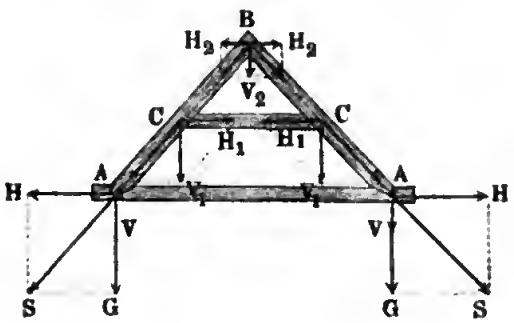
Einfache Dachgespärre. Die im (obigen §. 51 u. s. w.) entwickelten Formeln, Regeln u. s. w. über die Tragkraft der Balken, Träger, Sparren u. s. w. finden ihre vielfachen Anwendungen bei den Dachconstructionen, Lehrgerüsten und Brücken, und es ist daher noch Einiges über diese Anwendungen zu sagen nöthig. §. 96

Wir haben im Früheren (§. 52 u. s. w.) nur von den einfachen Dachconstructionen, wobei ein einfaches Hängewerk in Anwendung kommt, gehandelt; im Folgenden soll deshalb noch von den complicirteren, bei großen Spannweiten angewendeten Dachconstructionen die Rede sein.

Zur Unterstützung der Dachsparren wendet man gewöhnlich Kehlbalken, Stuhlsäulen, einfache oder zusammengesetzte Dachstühle u. s. w. an. Bei Beurtheilung dieser Constructionen läßt sich voraussetzen, daß das Gewicht des Daches auf die Fläche desselben gleichförmig vertheilt ist, auch wollen wir hierbei die Körper als vollkommen starr ansehen und deshalb annehmen, daß gleichgroße Theile desselben durch ihr Gewicht gleichstark vertical abwärts drücken.

Ist hiernach ein Sparren AB, Fig. 172, in einem Punkte C unterstützt, welcher von seinen Endpunkten A und B um l_1 und l_2 absteht, während er selbst die ganze Länge $AB = l$ hat, so beträgt die der ganzen Belastung G desselben entsprechende Verticalkraft in A:

Fig. 172.



$$V = \tfrac{1}{2}\frac{l_1}{l} G,$$

ferner in B:

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\frac{l_2}{l} G,$$

und daher in C:

$$V_1 = V + V_2 = \frac{l_1+l_2}{2l} G = \tfrac{1}{2} G.$$

Iſt nun das Geſpärre mit einem einfachen Kehlbalken CC ausgerüſtet, ſo hat man bei dem Neigungswinkel α der Sparren die aus V_1 und V_2 reſultirenden Horizontalſchube:

$$H_1 = V_1 \, cotang. \, \alpha = {}^1/_2 \, G \, cotang. \, \alpha,$$

ſowie

$$H_2 = V_2 \, cotang. \, \alpha = {}^1/_2 \frac{l_2}{l} \, G \, cotang. \, \alpha,$$

und es iſt folglich der Sparrenſchub in A:

$$H = H_1 + H_2 = {}^1/_2 \left(1 + \frac{l_2}{l} \right) G \, cotang. \, \alpha,$$

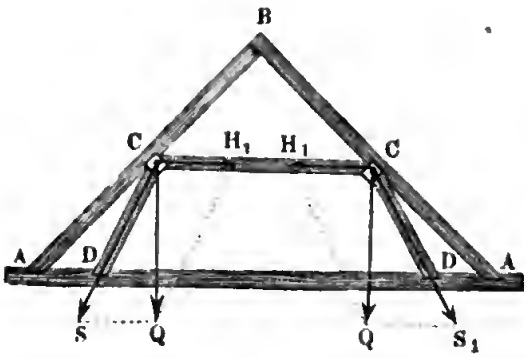
alſo z. B. für $l_1 = l_2 = {}^1/_2 \, l$, $H = {}^3/_4 \, G \, cotang. \, \alpha$, wogegen für Geſpärre ohne Kehlbalken H nur $= {}^1/_2 \, G \, cotang. \, \alpha$ ausfällt. Durch Anwendung eines Kehlbalkens wird alſo der Sparrenſchub erhöht.

Bei dem Geſpärre ABA, Fig. 173, mit einem Dachſtuhl $DCCD$, zerlegt ſich der Verticaldruck $Q = {}^1/_2 \, G$ in der Stuhlfette C nach der Axe CC des Kehlbalkens oder Spannriegels und nach der Axe CD der Stuhlſäule. Iſt α_1 der Neigungswinkel der Stuhlſäule gegen den Horizont, ſo hat man den Horizontalſchub im Kehlbalken

$$H_1 = Q \, cotang. \, \alpha_1 = {}^1/_2 \, G \, cotang. \, \alpha_1,$$

und dagegen den Schub in der Stuhlſäule

Fig. 173.



$$S_1 = \frac{Q}{sin. \, \alpha_1} = \frac{G}{2 \, sin. \, \alpha_1}.$$

Der horizontale Sparrenſchub am Fuße iſt dann nur:

$$H = {}^1/_4 \, G \, cotang. \, \alpha,$$

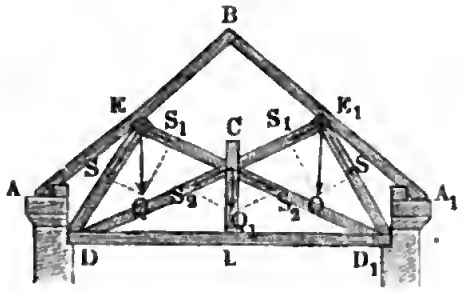
dagegen der horizontale Component des Schubes in der Stuhlſäule:

$$H_2 = S_1 \, cos. \, \alpha_1 = {}^1/_2 \, G \, cotang. \, \alpha_1.$$

Wie ein zuſammengeſetztes Hänge- und Sprengwerk zur Unterſtützung eines Daches und einer Brücke oder Decke zugleich dienen kann, wird durch Fig. 174 vor Augen geführt. Bezeichnet man die Neigungswinkel der Streben DE und DE_1 (ſowie D_1E_1 und D_1E) gegen den Horizont durch α_1 und α_2, ſo hat man die aus der Sparrenlaſt $Q = {}^1/_2 \, G$ entſpringenden Drücke auf die kürzeren Streben:

$$S = \frac{Q \cos. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} = {}^1/_2 \frac{G \cos. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Fig. 174.



und die auf die längeren Streben:

$$S_1 = \frac{Q \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} = {}^1/_2 \frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)};$$

dagegen die aus der in der Mitte L des Balkens DD_1 niederziehenden Last Q_1 entspringenden Zugkräfte der Streben:

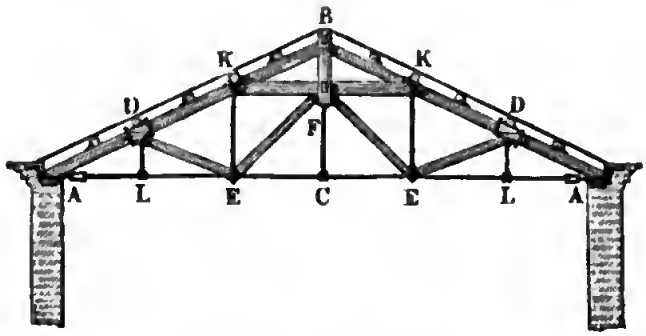
$$S_2 = \frac{Q_1}{2 \sin. \alpha_2},$$

und daher den Gesammtschub in den längeren Streben:

$$S_1 + S_2 = {}^1/_2 \left(\frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{Q_1}{\sin. \alpha_2} \right).$$

Zusammengesetzte Dachgespärre. Gespärre von großer Spann- §. 97
weite haben, wenn sie besonders sehr flach sind, einen bedeutenden Schub, und es ist deshalb sehr nöthig, dieselben durch einen Durchzug (franz. tirant; engl. tie-beam) zu unterstützen. Einen solchen Dachstuhl führt Fig. 175 vor Augen. Es besteht hier der Durchzug in einer schmiede-

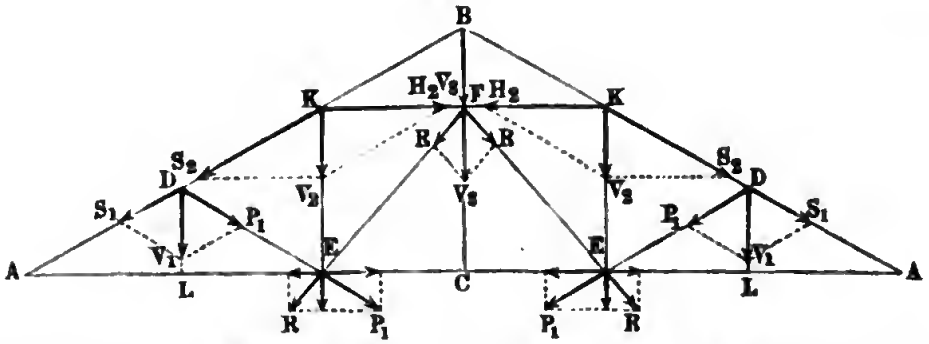
Fig. 175.



eisernen Stange AA, welche mittels eiserner Füße A, A den Schub der Hauptsparren AB, AB (franz. arbalétriers; engl. principal-rafters) aufnimmt. Zur Unterstützung der letzteren dient das aus Streben DE, EF, aus Hängestäben DL, KE, FC, aus einem Kehlbalken KK und aus einer Hängesäule BF zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerk. Die Art und Weise, wie die Sparrenlast G von dieser Construction aufgenommen wird, ist aus den Kraftzerlegungen Fig. 176 (a. f. S.) zu ersehen. Die Verticalkraft $V_1 = {}^1/_3 G$ zerlegt sich in zwei Seitenkräfte P_1 und S_1 nach der Richtung der Strebe DE und der des Sparrens AB; die Verticalkraft $V_2 = {}^1/_3 G$ hingegen in zwei Seiten-

kräfte H_2 und S_2, nach der Axe des Kehlbalkens und nach der des Sparrens, die Verticalkraft $V_2 = {}^1/_3\, G$ endlich nimmt die Hängeſäule BF auf und

Fig. 176.



zerlegt ſich in zwei Seitenkräfte R, R, welche auf die Streben EF, EF übergehen. Die Kräfte P_1 und R zerlegen ſich ferner in E in Horizontal- und Verticalkräfte, deren Reſultanten von den Zugſtangen AE, AE und Hängeſtangen KE, KE aufgenommen werden. Die beiden Componenten von P_1 ſind, wenn die Streben DE, DE mit den Sparren AB, AB einerlei Neigung α haben:

$$P_1 \sin.\, \alpha = \frac{G}{6} \text{ und } P_1 \cos.\, \alpha = \frac{G}{6} \operatorname{cotang.}\, \alpha,$$

und die von R ſind, wenn α_1 den Neigungswinkel der Streben EF gegen den Horizont ausdrückt:

$$R \sin.\, \alpha_1 = {}^1/_6\, G \text{ und}$$

$$R \cos.\, \alpha_1 = {}^1/_6 \frac{G}{\sin.\, \alpha_1} \cdot \cos \alpha_1 = {}^1/_6\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha_1;$$

in Folge dieſer Kräfte wird daher die Hängeſtange KE mit einer Kraft

$$\frac{G}{6} + \frac{G}{6} = \frac{G}{3}$$

und die Zugſtange AE mit einer Kraft

$$\frac{G}{6} (\operatorname{cotang.}\, \alpha - \operatorname{cotang.}\, \alpha_1)$$

geſpannt. Durch die erſten dieſer beiden Kräfte wird V_2 verdoppelt, d. i. $= \frac{G}{3} + \frac{G}{3} = {}^2/_3\, G$, weshalb die Horizontalſpannung des Kehlbalkens:

$$H_2 = {}^2/_3\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha$$

und daher der horizontale Sparrenſchub in A:

$$H = H_1 + H_2 = S_1 \cos.\, \alpha_1 + H_2$$
$$= {}^1/_6\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha + {}^2/_3\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha = {}^5/_6\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha \text{ ausfällt.}$$

Die Durchzugſtange iſt endlich zwiſchen A und E mit der Kraft

$$H = {}^5/_6\, G \operatorname{cotang.}\, \alpha$$

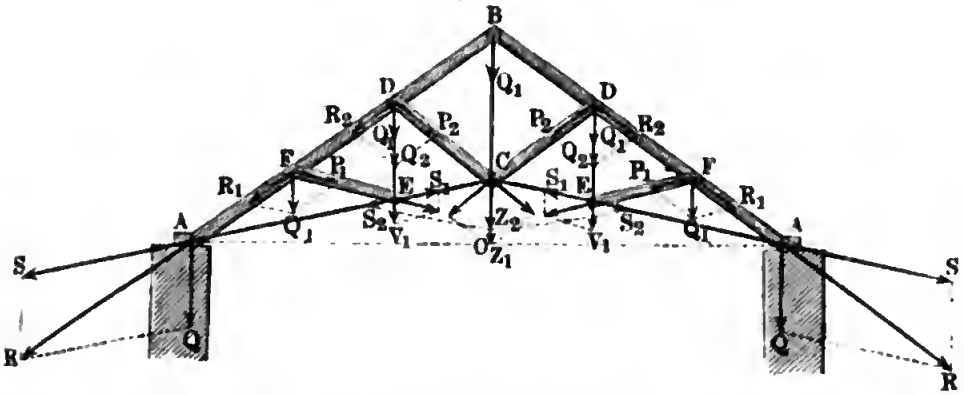
und zwiſchen E und E mit der Kraft

$$H_3 = {}^5/_6\, G\, cotang.\, \alpha - {}^1/_6\, G\, (cotang.\, \alpha - cotang.\, \alpha_1)$$
$$= {}^2/_3\, G\, cotang.\, \alpha + {}^1/_6\, G\, cotang.\, \alpha_1 \text{ geſpannt.}$$

§. 98

Die Spannungsverhältniſſe eines eiſernen Daches, wie Fig. 177, laſſen ſich entweder durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes, oder durch An-

Fig. 177.



wendung der Hebeltheorie wie folgt beſtimmen. Die Laſt G eines Sparren AB ſei ſo vertheilt, daß jeder der Zwiſchenpunkte D und F, $^1/_3\, G$, und jeder der Endpunkte A und B, $^1/_6\, G$ trage. Dieſem zu Folge iſt alſo anzunehmen, daß in jedem der fünf Punkte B, D, D und F, F, die Laſt $Q_1 = \frac{G}{3}$ niederziehe, und daß jeder der Sparrenfüße A und A mit der Kraft $Q = {}^5/_6\, G$ ſenkrecht niederdrücke. Iſt nun α der Neigungswinkel eines Sparrens AB und α_1 der einer Zugſtange AC gegen den Horizont, ſo erhält man mit Hülfe des Kräfteparallelogramms, deſſen eine Seite die Kraft Q iſt, den Sparrenſchub innerhalb AF:

$$R = \frac{Q\, cos.\, \alpha_1}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)},$$

ſowie der Stangenzug zwiſchen A und E:

$$S = \frac{Q\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)}.$$

Die Laſt Q_1 in F zerlegt ſich in zwei Seitenkräfte P_1 und R_1, wovon die eine durch Druck in der Strebe EF fortgepflanzt wird, während die andere einen Theil des Sparrenſchubes ausmacht. Bezeichnet β_1 den Neigungswinkel der Strebe EF gegen den Horizont, ſo iſt

$$P_1 = \frac{Q_1\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha + \beta_1)}, \text{ und } R_1 = \frac{Q_1\, cos.\, \beta_1}{sin.\, (\alpha + \beta_1)},$$

wonach noch der Sparrenſchub längs FD:

$$R - R_1 = \frac{Q\, cos.\, \alpha_1}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1\, cos.\, \beta_1}{sin.\, (\alpha + \beta_1)} \text{ folgt.}$$

Die Kraft P_1 in der Richtung der Strebe FE zerlegt ſich in E in zwei Kräfte S_1 und V_1, wovon

$$S_1 = \frac{P_1 \cos.\beta_1}{\cos.\alpha_1} = \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}$$ die Stange AE,

und $$V_1 = \frac{P_1 \sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos.\alpha_1} = \frac{Q_1 \cos.\alpha \sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}$$ die Stange DE ſpannt.

Hiernach iſt die Spannung der Zugſtange AC längs CE:

$$S_2 = S - S_1 = \frac{Q \cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}.$$

Die Verticalkraft V_1 vereinigt ſich mit der Laſt Q_1 in D zu einer Vertikalkraft $Q_2 = Q_1 + V_1$, und dieſe giebt nun den Druck in der Strebe CD, deren Neigung gegen den Horizont β_2 ſein möge,

$$P_2 = \frac{Q_2 \cos.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta_2)},$$ ſowie die Kraft in der Richtung des Sparrens

$$R_2 = \frac{Q_2 \cos.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)}.$$

In Folge der letzteren iſt der Sparrenſchub innerhalb BD:

$$R_3 = R - R_1 - R_2 = \frac{Q \cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)} - \frac{Q_2 \cos.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)},$$

woraus wieder der Zug in der Stange BC:

$Z = 2\ R_3 \sin.\alpha - Q_1$ folgt.

Letzterer iſt auch gleich der Summe von der Mittelkraft aus den Strebedrücken P_2, P_2, d. i.

$$Z_1 = 2\ P_2 \sin.\beta_2 = \frac{2\ Q_2 \cos.\alpha \sin.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)}$$

und von der Mittelkraft aus den Stangenzügen S_2, S_2, d. i.

$$Z_2 = 2\ S_2 \sin.\alpha_1$$
$$= 2\left(\frac{Q \cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}\right)\sin.\alpha_1.$$

Führt man ſtatt der Winkel die Seiten des Dachgeſpärres ein, ſo fallen die im Vorſtehenden gefundenen Formeln einfacher und überſichtlicher aus. Es bezeichne

l die Länge des Sparrens AB,

l_1 die Länge der Zugſtange AC,

a die Verticalprojection BO des erſteren,

a_1 die Verticalprojection CO der letzteren,

ferner $h = a - a_1$ die Höhe oder Länge der Zugſtange BC,

b die Horizontalprojection oder halbe Spannweite AO,

$c_1 = \frac{b}{3\cos.\beta_1}$, die Länge der Strebe EF, und

$c_2 = \frac{b}{3\cos.\beta_2}$, die Länge der Strebe CD.

Uebrigens ist im Dreiecke $A\,B\,C$

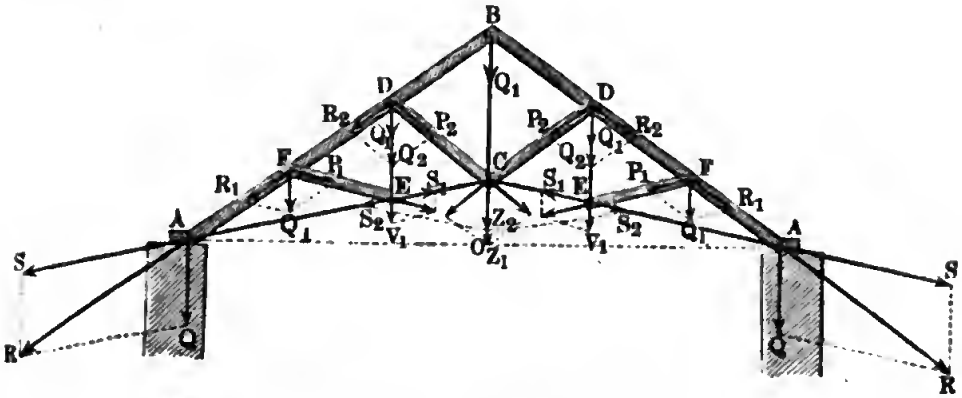
$$l_1^2 = l^2 + h^2 - 2\,a\,h,$$

sowie in den Dreiecken $A\,O\,B$ und $A\,O\,C$,

$$l^2 = a^2 + b^2, \text{ und } l_1^2 = a_1^2 + b^2.$$

Es giebt die Auflösung des Dreieckes $A\,B\,C$:

Fig. 178.



$$\frac{sin.(\alpha - \alpha_1)}{cos.\,\alpha_1} = \frac{h}{l} \text{ und } \frac{sin.(\alpha - \alpha_1)}{cos.\,\alpha} = \frac{h}{l_1},$$

daher folgt zunächst der Sparrenschub

$$R = \frac{Q\,l}{h} = {}^5/_6\,\frac{G\,l}{h}, \text{ und der Stangenzug } S = \frac{Q\,l_1}{h} = {}^5/_6\,\frac{G\,l_1}{h}.$$

Ferner ist $\frac{sin.(\alpha + \beta_1)}{cos.\,\alpha} = \frac{DE}{FE} = \frac{2\,h}{3\,c_1}$, und

$\frac{sin.(\alpha + \beta_1)}{cos.\,\beta_1} = \frac{DE}{DF} = \frac{2\,h}{l}$, daher folgt der Strebendruck

$P_1 = Q_1\,\frac{3\,c_1}{2\,h} = {}^1/_2\,G\,\frac{c_1}{h}$ und der Druck auf den Sparren

$R_1 = Q_1\,\frac{l}{2\,h} = {}^1/_6\,G\,\frac{l}{h}$, so daß sich der Sparrenschub innerhalb DF:

$R - R_1 = {}^5/_6\,G\,\frac{l}{h} - {}^1/_6\,G\,\frac{l}{h} = {}^2/_3\,G\,\frac{l}{h}$ ergiebt.

Aus diesem Strebendruck folgen nun, da

$$cos.\,\alpha_1 = \frac{b}{l_1},\ cos.\,\beta_1 = \frac{{}^1/_3\,b}{c_1} = \frac{b}{3\,c_1} \text{ und}$$

$$\frac{sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{cos.\,\alpha_1} = \frac{{}^1/_3\,h}{c_1} = \frac{h}{3\,c_1} \text{ ist, die Stangenkräfte}$$

$$S_1 = \frac{P_1\,cos.\,\beta_1}{cos.\,\alpha_1} = {}^1/_2\,G\,\frac{c_1}{h}\cdot\frac{l_1}{3\,c_1} = {}^1/_6\,G\,\frac{l_1}{h}, \text{ und}$$

$$V_1 = \frac{P_1\,sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{cos.\,\alpha_1} = {}^1/_2\,G\,\frac{c_1}{h}\cdot\frac{h}{3\,c_1} = {}^1/_6\,G.$$

Die Spannung der Stange $C\,E$ ist nun

$$S_2 = S - S_1 = {}^5/_6\, G\, \frac{l_1}{h} - {}^1/_6\, G\, \frac{l_1}{h} = {}^2/_3\, G\, \frac{l_1}{h},$$

und die Verticalkraft in D:

$$Q_2 = Q_1 + V_1 = {}^1/_3\, G + {}^1/_6\, G = {}^1/_2\, G.$$

Letztere giebt nun, da

$$\frac{sin.\,(\alpha + \beta_2)}{cos.\,\alpha} = \frac{BC}{CD} = \frac{h}{c_2} \text{ und}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha + \beta_2)}{cos.\,\beta_2} = \frac{BC}{BD} = \frac{h}{{}^1/_3\, l} = \frac{3\,h}{l}$$

iſt, den Druck in der Strebe CD:

$$P_2 = \frac{Q_2\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\alpha + \beta_2)} = {}^1/_2\, G\, \frac{c_2}{h},$$

und die Kraft, welche auf den Sparren übergeht,

$$R_3 = \frac{Q_2\ cos.\,\beta_2}{sin.\,(\alpha + \beta_2)} = {}^1/_2\, G\, \frac{l}{3\,h} = {}^1/_6\, \frac{Gl}{h},$$

woraus der Sparrenſchub innerhalb BD:

$$R_3 = R - R_1 - R_2 = {}^2/_3\, G\, \frac{l}{h} - {}^1/_6\, \frac{Gl}{h} = {}^1/_2\, \frac{Gl}{h} \text{ folgt.}$$

Nun ergiebt ſich die Zugkraft der Stange BC:

$$Z = 2\, R_3\, sin.\,\alpha - Q_1 = 2\,.\,{}^1/_2\, \frac{Gl}{h}\, \frac{a}{l} - {}^1/_3\, G = G\left(\frac{a}{h} - {}^1/_3\right).$$

Auch iſt die Mittelkraft aus den Strebendrücken P_2, P_2,

$$Z_1 = 2\, P_2\, sin.\,\beta_2 = 2\,.\,{}^1/_2\, G\, \frac{c_2}{h}\left(\frac{{}^2/_3\, h - {}^1/_3\, a_1}{c_2}\right) = G\left({}^2/_3 - \frac{a_1}{3\,h}\right),$$

und die aus den Stangenzügen S_2 und S_2:

$$Z_2 = 2\, S_2\ sin.\,\alpha_1 = {}^4/_3\, G\, \frac{l_1}{h}\, \frac{a_1}{l_1} = {}^4/_3\, G\, \frac{a_1}{h},$$

daher folgt die geſammte Spannung der Stange BC:

$$Z = Z_1 + Z_2 = G\left({}^2/_3 + \frac{a_1}{h}\right) = G\left({}^2/_3 + \frac{a - h}{h}\right) = G\left(\frac{a}{h} - {}^1/_3\right),$$

wie oben.

§ 99 Mit Hülfe der Momente- oder Hebeltheorie ergeben ſich die im Vorſtehenden beſtimmten Spannungen des Dachgeſpärres ABA, Fig 179, wie folgt. Die Reaction Q hält dem Sparrenſchub R und dem Stangenzug S das Gleichgewicht, daher iſt

$$R\,.\,\overline{KL} = Q\,.\,\overline{FN}, \text{ wonach } R = Q\cdot\frac{FN}{KL} \text{ folgt.}$$

$$\text{Aber } \frac{FN}{AF} = \frac{KL}{KF}, \text{ daher}$$

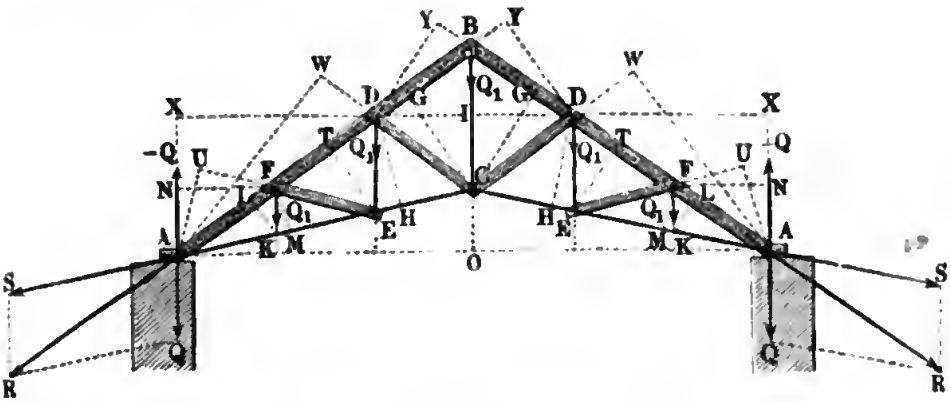
$$\frac{FN}{KL} = \frac{AF}{KF} = \frac{3\,AF}{3\,KF} = \frac{l}{h}, \text{ und } R = \frac{Ql}{h} = {}^5/_6\, G\, \frac{l}{h}.$$

Ebenso hat man $S \cdot \overline{FM} = Q \cdot \overline{FN}$, oder $S = Q \cdot \frac{FN}{FM}$;

Aber $\frac{FN}{AK} = \frac{FM}{FK}$, oder $\frac{FN}{FM} = \frac{AK}{FK} = \frac{3\,AK}{3\,FK} = \frac{l_1}{h}$,

daher hat man $S = Q \cdot \frac{l_1}{h} = {}^5/_6\, G\, \frac{l_1}{h}$, wie auch im vorigen Paragraphen gefunden worden ist.

Fig. 179.



Ferner hält in Beziehung auf den Stützpunkt A die Kraft P_1 in der Strebe EF der in F wirkenden Last Q_1 das Gleichgewicht, weil die Richtungen der Kräfte in AB und AC durch A gehen, und folglich die Momente der letzteren Null sind. Deshalb ist $P_1 \cdot \overline{AU} = Q_1\, \overline{NF}$, oder, da

$\frac{AU}{DE} = \frac{FN}{EF}$, also $AU = \frac{{}^1/_3\, b \cdot {}^2/_3\, h}{c_1} = {}^2/_9\, \frac{bh}{c_1}$ ist,

$$P_1 \cdot {}^2/_3\, \frac{bh}{c_1} = Q_1\, \frac{b}{3}, \text{ so daß}$$

$$P_1 = {}^3/_2\, Q_1\, \frac{c_1}{h} = {}^1/_2\, G\, \frac{c_1}{h} \text{ folgt.}$$

Um ferner die Spannung $R - R_1$ des Sparrens längs DF zu finden, setzen wir das Moment

$$(R - R_1) \cdot \overline{ET} = \text{dem Momente } Q \cdot {}^2/_3\, b - Q_1\, \frac{b}{3},$$

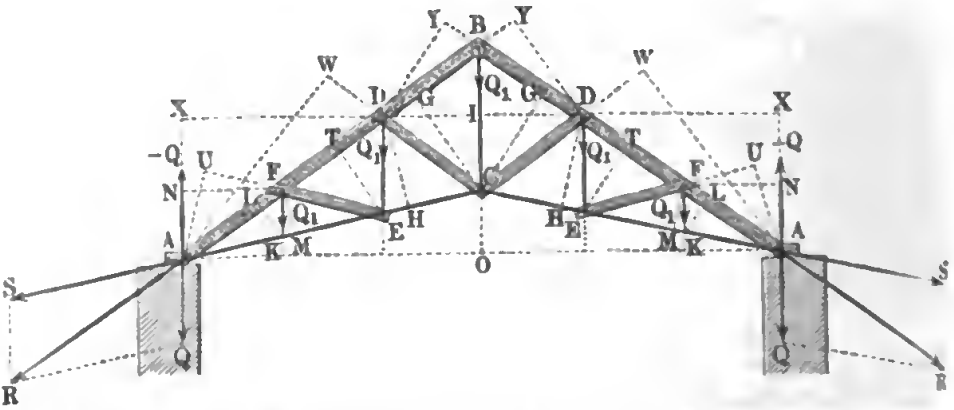
wonach dann, da $\frac{ET}{DE} = \frac{b}{l}$, also $ET = \frac{b}{l}\, DE = {}^2/_3\, \frac{bh}{l}$ ist,

$$R - R_1 = \left(\frac{{}^2/_3\, Q\, b - {}^1/_3\, Q_1\, b}{{}^2/_3\, b\, h}\right) l = (Q - {}^1/_2\, Q_1)\, \frac{l}{h} = {}^2/_3\, G\, \frac{l}{h} \text{ folgt.}$$

Die Spannung S_2 des Stückes CE der Stange AC ergiebt sich, indem man das Moment $S_2 \cdot \overline{DH} = {}^2/_3\, Qb - {}^1/_3\, Q_1\, b$ setzt. Da $\frac{DH}{DE} = \frac{b}{l_1}$, also $DH = {}^2/_3\, \frac{bh}{l_1}$ ist, so folgt hiernach

$$S_2 = (2\,Q - Q_1)\cdot\frac{l_1}{2\,h} = (5/3 - 1/3)\;G\cdot\frac{l_1}{2\,h} = 2/3\;\frac{G\,l_1}{h}.$$

Fig. 180.



Die Spannung Q_2 der Zugstange DE ist durch die Momentengleichung $Q_2 \cdot \overline{XD} = Q_1 \cdot \overline{XD} + Q_1 \cdot \overline{NF}$ bestimmt, welche, da $XD = 2/3\,b$ ist,

$$Q_2 = \frac{3\,Q_1\,b}{2\,b} = 3/2\;Q_1 = 1/2\;G \text{ giebt.}$$

Für die Spannung P_2 der Strebe CD ist ferner

$P_2 \cdot \overline{AW} = Q_1 \cdot \overline{NF} + Q_1 \cdot \overline{XD} = Q_1\,b$, und da man

$\frac{AW}{AD} = \frac{b}{l}\cdot\frac{h}{CD}$, also $AW = \frac{2\,bh}{3\,c_2}$ hat, so folgt

$$P_2 = \frac{3\,Q_1\,b\,c_2}{2\,b\,h} = 3/2\;Q_1\,\frac{c_2}{h} = 1/2\;G\,\frac{c_2}{h}.$$

Zur Bestimmung des Druckes $R - R_1 - R_2$ des obersten Sparrenstückes BD dient die Momentengleichung

$$(R - R_1 - R_2)\cdot\overline{CG} = Q\cdot b - Q_1\cdot 2/3\,b - Q_1\,\frac{b}{3} = (Q - Q_1)\,b.$$

Nun ist aber $\frac{CG}{CB} = \frac{AO}{AB}$, d. i. $CG = \frac{hb}{l}$, daher folgt

$$R - R_1 - R_2 = (Q - Q_1)\,\frac{l}{h} = 1/2\;G\,\frac{l}{h}.$$

Um endlich noch den Zug Z in der Stange BC zu bestimmen, setzen wir in Beziehung auf D als Stützpunkt, das Moment $Z\cdot\overline{DI}$ = dem Moment $(R - R_1 - R_2)\cdot\overline{DY}$ des Sparrenschubes BD minus dem Momente $Q_1\cdot DI$ der Belastung Q_1 im Scheitel B.

Hiernach ist $Z = 1/2\;G\,\frac{l}{h}\cdot\frac{DY}{DI} - Q_1$, folglich, da

$\frac{DY}{DD} = \frac{a}{l}$, also $\overline{DY} = \frac{a}{l}\,\overline{DD} = \frac{2\,a}{l}\,\overline{DI}$ ist,

$$Z = G\,\frac{a}{h} - \frac{G}{3} = G\left(\frac{a}{h} - 1/3\right),$$

ganz in Uebereinstimmung mit den Resultaten des vorigen Paragraphen.

Wenn ein Gespärre keinen Durchzug hat, so muß der Sparrenschub H von den Seiten- oder Stützmauern des Gebäudes aufgenommen werden, und es sind die Sparren durch Bänder und Zangen mit einander zu verbinden, sowie durch Streben zu stützen. In den Figuren 181, 182 und 183 (a. S. 229, 230 und 231) sind drei solche Gespärre abgebildet. Bei der Bestimmung des horizontalen Sparrenschubes gilt auch die §. 82 mitgetheilte Regel. Ist G das Gewicht des halben Gespärres ACB, ferner a die Höhe AE des Forstes B über dem Fuße des Gespärres und s der Horizontalabstand AD des letzteren Punktes von der verticalen Schwerlinie SD des Gespärres, so hat man den Horizontalschub am Fuße A und im Scheitel B:

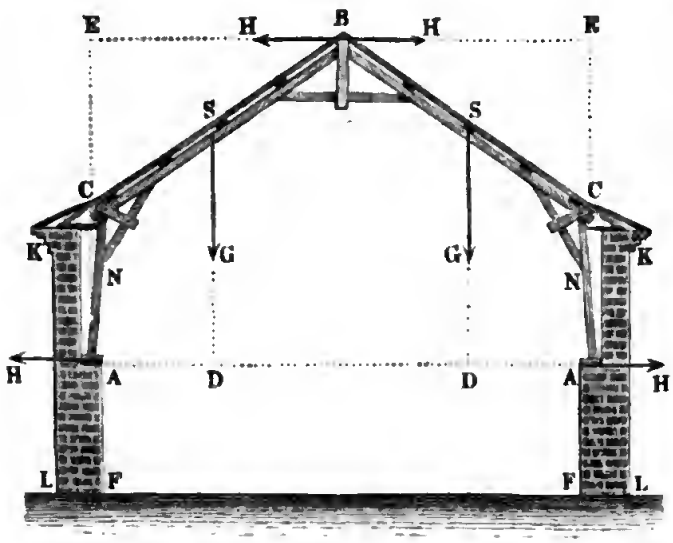
§. 100

$$H = \frac{Gs}{a}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird durch die Versuche Ardant's (siehe das am Ende des Capitels angeführte Werk) vollkommen bestätigt; nach diesen ist für die hier abgebildeten Gespärre:

$$H = 0{,}44\,G.$$

Fig. 181.



Aus dieser Formel sowie aus Ardant's Versuchen folgt, daß der Schub H um so kleiner ausfällt, je mehr sich der Schwerpunkt der Sparrenlast dem Fußpunkte A des Sparrens in horizontaler Richtung nähert.

Für ein halbkreisförmiges Sparrwerk mit gleichförmiger Belastung wäre z. B. nach Band I, §. 107:

$$\frac{s}{a} = 1 - {}^7/_{11} = {}^4/_{11}, \text{ daher auch:}$$

$$H = {}^4/_{11}\,G = 0{,}36\,G,$$

während Ardant's Versuche

$$H = 0{,}32\,G \text{ geben.}$$

Bildet das Gespärre einen flachen Parabelbogen, so ist nach §. 77 bei gleichmäßiger Belastung, der Sparrenschub

$$Q = \frac{q\,b^2}{2\,a}, \text{ d. i. } H = \frac{G\,b}{2\,a},$$

was mit der zuletzt gefundenen Formel $H = \frac{G\,s}{a}$ ebenfalls übereinſtimmt, da b die halbe Spannweite und a die Dachhöhe bezeichnet.

Bogengeſpärre, ſie mögen aus über einander liegenden krumm gebogenen Holzſchienen, oder aus neben einander liegenden krumm geſchnittenen Holzbohlen beſtehen, geben denſelben Horizontalſchub wie gerade Geſpärre. Dagegen läßt ſich der Sparrenſchub durch die Verbindung der Sparren unter einander mittels Bänder, Durchzüge u. ſ. w. herabziehen, weil ſich dadurch beide Geſpärrhälften einem einzigen ſtarren Körper mehr nähern, welcher natürlich keinen Horizontalſchub äußert.

Die Stärke der Mauer, welche den Sparrenſchub auszuhalten hat, iſt wie die einer Widerlagsmauer für Gewölbe (ſ. §. 27) zu berechnen.

Bezeichnen wir die Höhe und Breite des inneren Mauerſtücks AF durch h_1 und b_1 und die Höhe und Breite des äußeren Mauerſtückes KL durch h_2 und b_2, ferner den auf je 1 Fuß Mauerlänge kommenden Sparrenſchub durch H_1, und die auf eben dieſe Länge kommende Sparrenlaſt durch G_1, endlich noch die Dichtigkeit der Mauermaſſe durch γ, ſo haben wir bei dreifacher Sicherheit:

$$3\,H_1\,h_1 = G_1\,(\tfrac{1}{2}\,b_1 + b_2) + (\tfrac{1}{2}\,b_1 + b_2)\,b_1\,h_1\,\gamma + \tfrac{1}{2}\,b_2^2\,h_2\,\gamma,$$

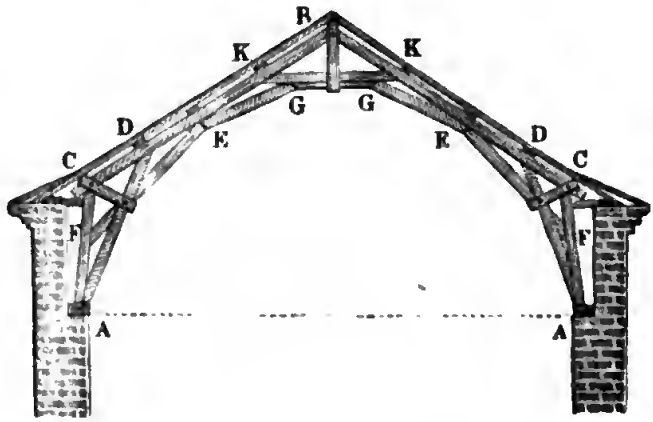
und es läßt ſich nun hieraus entweder b_1 oder b_2 berechnen. Zur Beſtimmung von b_2 hat man z. B. die quadratiſche Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,h_2\,\gamma\,.\,b_2^2 + (G_1 + b_1\,h_1\,\gamma)\,.\,b_2 = 3\,H_1\,h_1 - \tfrac{1}{2}\,G_1\,b_1 - \tfrac{1}{2}\,b_1^2\,h_1\,\gamma$$

aufzulöſen.

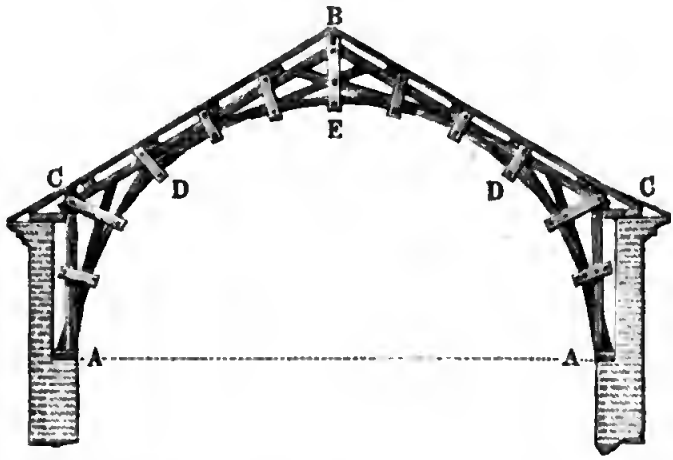
§. 101. Bei großen Spannweiten ſind die Sparren durch Streben oder Bögen zu ſtützen, weil ſie ſonſt der Belaſtung nicht hinreichenden Widerſtand leiſten können. In Fig. 182 wird ein Sparrwerk vor Augen geführt,

Fig. 182.



wo die Sparren BC, BC durch Streben AD, EF, EG, einen Kehlbalken KK, einen Spannriegel GG u. ſ. w. unterſtützt werden. Bei dem Sparrwerk in Fig. 181 iſt es ein aus Streben zuſammengeſetzter Bogen $ADEDA$, welcher die Sparren BC, BC ſtützt.

Fig. 183.

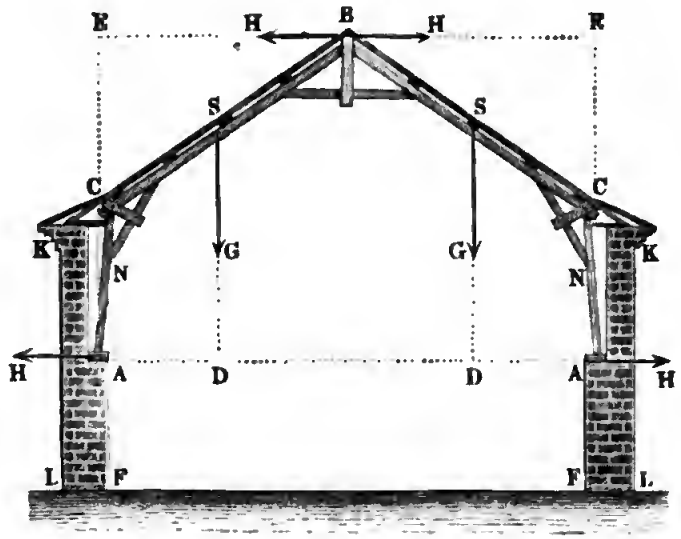


Die Stärken der Theile eines Geſpärres ſind vorzüglich nach der Theorie der zuſammengeſetzten Feſtigkeit (ſ. Band I, §. 270 ꝛc.) zu berechnen, da dieſe Hölzer meiſt der Biegung und Ausdehnung oder Zuſammendrückung zugleich ausgeſetzt ſind. Bei einem Geſpärre wie Fig. 184 (und Fig. 185 a. f. S.) wird dieſe Rechnung auf folgende Weiſe geführt.

Für den Sparren BC iſt das Moment zum Abbrechen in ſeiner Mitte S

$$M = {}^1/_2\, Hl \sin.\alpha - {}^1/_8\, Gl \cos.\alpha,$$

Fig. 184.



wenn l die Länge, α den Neigungswinkel und G das Gewicht deſſelben bezeichnet. Außerdem wird dieſer Sparren noch mit einer Kraft

$$S = H \cos.\alpha + {}^1/_2\, G \sin.\alpha$$

zuſammengedrückt; es iſt daher für den Querſchnitt bh dieſes Balkens die Formel:

$$bh = \frac{S}{T} + \frac{6M}{HT}$$ (ſ. Band I, §. 205 und §. 235)

zu ſetzen, oder wenn man den Tragmodul für den Druck $T = 500$, und den für die Biegung $T = 1200$ Pfund annimmt:

$$bh = \frac{S}{500} + \frac{M}{200\,h}.$$

Für das Abbrechen des Sparrens AC um ſeine Mitte N iſt dagegen, wenn l_1 die Länge, α_1 den Neigungswinkel und G_1 das Gewicht deſſelben bezeichnet, das Moment:

$$M_1 = {}^1/_8\, G_1 l_1 \cos.\alpha_1 + {}^1/_2\, G(l \cos.\alpha + l_1 \cos.\alpha_1) - H(l \sin.\alpha + {}^1/_2\, l_1 \sin.\alpha_1);$$

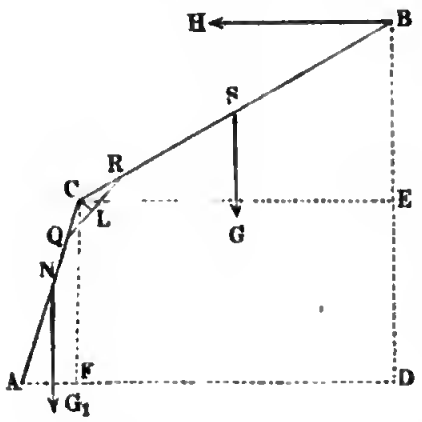
ferner iſt die Compreſſionskraft des Sparrens:

$$S_1 = H \cos.\alpha_1 + (G + {}^1/_2\, G_1) \sin.\alpha_1,$$

und der Querſchnitt deſſelben:

$$b_1 h_1 = \frac{S_1}{500} + \frac{M_1}{200\,h_1}.$$

Fig. 185.



Für eine Drehung um die Ecke C iſt das Moment

$M_2 = {}^1/_2\, G l \cos.\alpha - Hl \sin.\alpha$,

und der nöthige Querſchnitt der Strebe QR,

$$= \frac{M_2}{\overline{CL}.\,T_1} = \frac{M_2}{500\,d},$$

wenn d den Abſtand $\overline{CL}$ des Eckpunktes C von der Strebe QR bezeichnet.

Für dieſe Berechnung kann man die folgenden Erfahrungsreſultate zu Grunde legen:

Ein Quadratfuß Ziegeldach wiegt 12 Pfund,
„ „ Schieferdach „ $7^1/_2$ „
„ „ Zinkdach „ 5 „

Hierzu kommt noch auf jeden Quadratfuß 15 bis 20 Pfund zufällige Belaſtung durch Schnee und Wind, und außerdem noch 0,15 bis 0,20 Cubikfuß Holz, welches an Gewicht 4 bis 10 Pfund ausmacht, da ein

Cubikfuß Tannenholz 25 bis 40 Pfund und ein Cubikfuß Eichenholz 40 bis 50 Pfund wiegt.

Beiſpiel. Bei einem Ziegeldach, wie Fig. 184 und 185, ſei die Länge des oberen Sparrens, $BC = l = 30$ Fuß, die des unteren, $AC = l_1 = 15{,}5$ Fuß, ferner der Neigungswinkel des erſteren, $\alpha = 30^0$ und der des letzteren, $\alpha_1 = 75^0$; man ſucht die nöthigen Stärken dieſer Conſtruction. Nehmen wir die Laſt des Daches auf jeden Quadratfuß $= 12 + 8 + 20 = 40$ Pfund an, und ſetzen wir voraus, daß die Geſpärre 6 Fuß von einander abſtehen. Die ganze Laſt eines Sparrens BC iſt hiernach:

$$G = 30 . 6 . 40 = 7200 \text{ Pfund},$$

und die eines Sparrens AC:

$$G_1 = 15{,}5 . 6 . 40 = 3720 \text{ Pfund},$$

folglich iſt der Sparrenſchub:

$$H = [\tfrac{1}{2} G_1 l_1 \cos.\alpha_1 + G (l_1 \cos.\alpha_1 + \tfrac{1}{2} l \cos.\alpha)] : (l \sin.\alpha + l_1 \sin.\alpha_1)$$
$$= [1860 . 15{,}5 . \cos.75^0 + 7200 (15{,}5 \cos.75^0 + 15 \cos.30^0)] : (30 \sin.30^0 + 15{,}5 \sin.75^0)$$
$$= (28830 . 0{,}2588 + 7200 . 17) : (15 + 14{,}97)$$
$$= \frac{129861}{29{,}97} = 4333 \text{ Pfund}.$$

Für den Bruch in der Mitte S des Sparrens BC, Fig. 183, iſt nun das Moment:

$$M = \tfrac{1}{2} Hl \sin.\alpha - \tfrac{1}{8} Gl \cos.\alpha = 2166{,}5 . 15 - 900 . 25{,}98$$
$$= 32497 - 23382 = 9115 \text{ Fußpfund} = 109380 \text{ Zollpfund},$$

und die Spannung:

$$S = H \cos.\alpha + \tfrac{1}{2} G \sin.\alpha = 4333 . 0{,}8660 + 3600 . \tfrac{1}{2} = 5552 \text{ Pfund},$$

folglich hat man für den Querſchnitt dieſes Sparrens:

$$bh = \frac{S}{500} + \frac{M}{200\,h} = \frac{5552}{500} + \frac{109380}{200\,h} = 11{,}1 + \frac{546{,}9}{h},$$

alſo, wenn man $h = \tfrac{7}{5} b$ macht:

$$^{49}/_{25} b^2 = 11{,}1 . \tfrac{7}{5} b + 546{,}9,$$

folglich die Sparrenbreite:

$$b = \sqrt{279 + 7{,}9\,b} = 7 \text{ Zoll}$$

und die Sparrenhöhe:

$$h = \tfrac{7}{5} . 7 = {}^{49}/_{5} = 9{}^{4}/_{5},$$

alſo nahe 10 Zoll.

Für den Bruch in der Mitte N des Sparrens AC iſt ferner das Moment:

$$M_1 = \tfrac{1}{8} G_1 l_1 \cos.\alpha_1 + \tfrac{1}{2} G (l \cos.\alpha + l_1 \cos.\alpha_1) - H (l \sin.\alpha + \tfrac{1}{2} l_1 \sin.\alpha_1)$$
$$= \tfrac{1}{8} . 3720 . 4{,}01 + 3600 (25{,}98 + 4{,}01) - 4333 (15 + 7{,}485)$$
$$= 465 . 4{,}01 + 3600 . 29{,}99 - 4333 . 22{,}485 = 109828 - 97428$$
$$= 12400 \text{ Fußpfund} = 148800 \text{ Zollpfund},$$

und die Spannung:

$$S_1 = H \cos.\alpha_1 + (G + \tfrac{1}{2} G_1) \sin.\alpha_1 = 4333 . 0{,}2588 + (7200 + 1860) . 0{,}5$$
$$= 1121 + 4530 = 5651 \text{ Pfund};$$

hiernach hat man für den Querſchnitt dieſes Sparrens:

$$b_1 h_1 = {}^{5651}/_{500} + \frac{148800}{200\,h_1} = 11{,}3 + \frac{744}{h_1},$$

folglich, wenn man $h_1 = \tfrac{7}{5} b_1$ annimmt, die Sparrenbreite:

$$b_1 = \sqrt[3]{379 + 8{,}07\, b_1} = 7{,}6 \text{ Zoll},$$

und die Sparrendicke:

$$h_1 = 1{,}4 \,.\, b_1 = 10{,}64 \text{ Zoll}.$$

Das Moment zum Drehen um die Sparrenecke C ist endlich:

$$M_2 = \tfrac{1}{2}\, Gl \cos.\alpha - Hl \sin.\alpha = 3600 \,.\, 25{,}98 - 4333 \,.\, 15$$
$$= 93528 - 64995 = 28533 \text{ Fußpfund};$$

steht demnach die Strebe QR um $CL = 1$ Fuß von C ab, so ist der nöthige Querschnitt dieser Strebe:

$$F = {}^{28533}/_{500} = 57 \text{ Quadratzoll}.$$

Aus dem Horizontalschube $H = 4333$ Pfund und dem Abstande $a = 6$ Fuß je zweier Gespärre von einander folgt der Horizontalschub für den laufenden Fuß Mauer:

$$H_1 = {}^{4333}/_{6} = 722 \text{ Pfund},$$

und ebenso aus der Last $G = 10920$ Pfund eines Gespärres der Verticaldruck auf den laufenden Fuß Mauer:

$$G_1 = {}^{10920}/_{6} = 1820 \text{ Pfund};$$

ist nun noch die innere Mauer AF, Fig. 182, 30 Fuß hoch und 1 Fuß dick, hat der Aufsatz AK eine Höhe von 6 Fuß, und wiegt ein Cubikfuß Mauer 125 Pfund, so hat man, da nach dem vorigen Paragraphen

$$\tfrac{1}{2} h_2 b_2^2 \gamma + (G_1 + b_1 h_1 \gamma)\, b_2 = 3\, H_1 h_1 - \tfrac{1}{2}\, G_1 b_1 - \tfrac{1}{2}\, b_1^2 h_1 \gamma$$

ist:

$$18 \,.\, 125\, b_2^2 + (1820 + 30 \,.\, 125)\, b_2 = 90 \,.\, 722 - \tfrac{1}{2} \,.\, 1820 - \tfrac{1}{2} \,.\, 30 \,.\, 125$$

d. i. $2250\, b_2^2 + 5570\, b_2 = 62195$, oder $b_2^2 + 2{,}476\, b_2 = 27{,}64$,

daher:

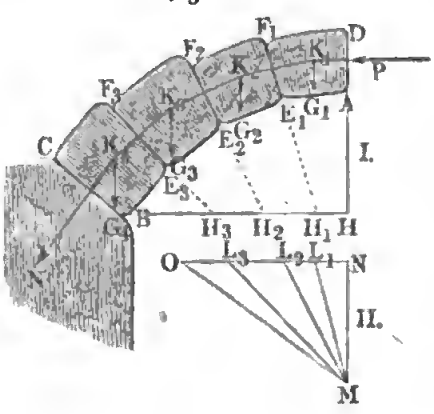
$$b_2 = -1{,}24 + \sqrt{27{,}64 + 1{,}54} = -1{,}24 + 5{,}40 = 4{,}16 \text{ Fuß},$$

also ist die erforderliche ganze Mauerdicke:

$$b = b_1 + b_2 = 1 + 4{,}16 = 5{,}16 \text{ Fuß}.$$

§. 102 Die zusammengesetzten Sprengwerke kommen vorzüglich auch bei den sogenannten Lehrgerüsten der Gewölbe (franz. cintres; engl. centres) vor. Diese Constructionen haben den Zweck, die Gewölbe während ihrer Aufführung zu unterstützen. Es handelt sich hier vorzüglich darum, die Kräfte kennen zu lernen, mit welchen die Gewölbsteine vermöge ihrer Schwere auf ihren Lagerflächen herabzugleiten suchen. Behalten wir die in §. 21 gebrauchten Bezeichnungen bei, bezeichnen wir auch hier die Gewichte der Gewölbstücke AF_1, E_1F_2, E_2F_3 ..., Fig. 186, durch G_1, G_2, G_3..., und die Neigungswinkel der Gewölbfugen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ... gegen den Horizont durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . ., dagegen die Kräfte, welche in den Richtungen der Gewölbfugen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ... dem Herabgleiten der Steine G_1, G_2, G_3 ... entgegenwirken, durch Q_1, Q_2, Q_3 ...

Fig. 186.



Zunächſt iſt (nach Band I, §. 176) die Kraft in der Richtung $E_1 F_1$, welche das Herabgleiten des erſten Steines verhindert:

$$Q_1 = G_1 \, (sin.\, \alpha_1 - \varphi \, cos.\, \alpha_1).$$

Da die Richtung dieſer Kraft den Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ mit der Fuge $E_2 F_2$ bildet, ſo läßt ſich dieſe Kraft in die Seitenkräfte $Q_1 \, cos.\,(\alpha_1 - \alpha_2)$ und $Q_1 \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_2)$ parallel und rechtwinkelig zu $E_2 F_2$ zerlegen, und es iſt daher die Kraft, mit welcher $G_1 + G_2$ auf $E_2 F_2$ herabzugleiten ſucht:

$$(G_1 + G_2) \, sin.\, \alpha_2 - Q_1 \, cos.\,(\alpha_1 - \alpha_2),$$

und die Reibung, welche dieſem Herabgleiten entgegenwirkt:

$$\varphi \, [(G_1 + G_2) \, cos.\, \alpha_2 - Q_1 \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

folglich die nöthige Kraft in der Richtung der Fuge $E_2 F_2$, um den Stein $E_2 F_2$ zu ſtützen:

$$\begin{aligned} Q_2 &= (G_1 + G_2) \, sin.\, \alpha_2 - Q_1 \, cos.\,(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\qquad - \varphi \, [(G_1 + G_2) \, cos.\, \alpha_2 - Q_1 \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_2)] \\ &= (G_1 + G_2)(sin.\, \alpha_2 - \varphi \, cos.\, \alpha_2) \\ &\qquad - Q_1 \, [cos.\,(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned}$$

Auf demſelben Wege findet man die Kraft in der Richtung $E_3 F_3$ zum Stützen des dritten Gewölbſteines:

$$\begin{aligned} Q_3 = (G_1 + G_2 + G_3)(sin.\, \alpha_3 - \varphi \, cos.\, \alpha_3) \\ - Q_1 \, [cos.\,(\alpha_1 - \alpha_3) - \varphi \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_3)] \\ - Q_2 \, [cos.\,(\alpha_2 - \alpha_3) - \varphi \, sin.\,(\alpha_2 - \alpha_3)]; \end{aligned}$$

ebenſo die Kraft gegen das Herabgleiten eines vierten Steines $E_4 F_4$:

$$\begin{aligned} Q_4 = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4)(sin.\, \alpha_4 - \varphi \, cos.\, \alpha_4) \\ - Q_1 \, [cos.\,(\alpha_1 - \alpha_4) - \varphi \, sin.\,(\alpha_1 - \alpha_4)] \\ - Q_2 \, [cos.\,(\alpha_2 - \alpha_4) - \varphi \, sin.\,(\alpha_2 - \alpha_4)] \\ - Q_3 \, [cos.\,(\alpha_3 - \alpha_4) - \varphi \, sin.\,(\alpha_3 - \alpha_4)]. \end{aligned}$$

U. ſ. w.

Dieſe Kräfte ſind auch wirklich von dem Lehrgerüſte unmittelbar vor dem Schluſſe des Gewölbes aufzunehmen.

Es iſt übrigens hiernach leicht zu ermeſſen, daß der Druck eines Gewölbſteines gegen das Lehrgerüſte abnimmt, wenn man über denſelben nach und nach noch andere Gewölbſteine legt. Der letzte von den Gewölbſteinen, welche keinen Druck auf das Gerüſte ausüben, liegt über der Fuge, deren Neigungswinkel α_n durch die Gleitung $tang.\, \alpha_n = \varphi$ (ſ. Band I, §. 172) beſtimmt iſt. Kommt nun auf dieſen ein zweiter Stein G_{n-1} mit der Fugenneigung α_{n-1}, ſo hat man dann die Kraft zum Stützen dieſes zweiten Steines:

$$Q_{n-1} = G_{n-1} \, (sin.\, \alpha_{n-1} - \varphi \, cos.\, \alpha_{n-1}),$$

und dagegen die zum Stützen des erſteren:

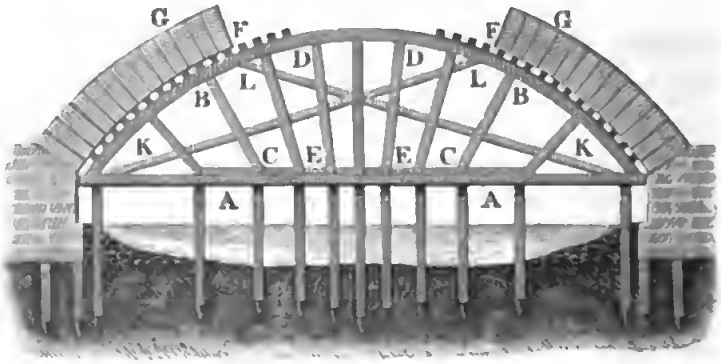
$$\begin{aligned} Q_n &= (G_n + G_{n-1}) \, (sin.\, \alpha_n - \varphi \, cos.\, \alpha_n) \\ &\qquad - Q_{n-1} \, [cos.\,(\alpha_{n-1} - \alpha_n) - \varphi \, sin.\,(\alpha_{n-1} - \alpha_n)] \\ &= - \, Q_{n-1} \, [cos.\,(\alpha_{n-1} - \alpha_n) - \varphi \, sin.\,(\alpha_{n-1} - \alpha_n)], \end{aligned}$$

alſo negativ. Es iſt folglich wohl nöthig, die Gewölbſteine in den Seiten des Gewölbes gegen das Ausſchieben durch Belaſtung von oben zu ſchützen.

§. 103 Die Lehrgerüſte beſtehen in der Regel aus zwei, drei oder mehreren Kränzen, welche von unten durch Streben unterſtützt werden, und durch Latten, die ſogenannten Schaallatten (franz. couchis; engl. bolstres) bedeckt werden, auf die nun die Gewölbſteine mit ihren inneren Flächen zu liegen kommen. Die Streben ſtemmen ſich entweder gegen die Widerlagspfeiler, oder ſie kommen auf feſteingerammte Pfähle oder auf beſonders zu dieſem Zwecke aufgeführte Pfeiler zu ſtehen. Damit ſich das durch die Gewölbſteine belaſtete Gerüſte ſo wenig wie möglich in ſeiner Form verändere, iſt nöthig, daß die Streben deſſelben gegen das Biegen und Nachgeben geſichert ſind.

Ein geſtütztes Lehrgerüſte, d. i. ein ſolches, deſſen Stützen ſich unter dem Gewölbe ſelbſt befinden, iſt in Fig. 187 abgebildet. Man ſieht hier

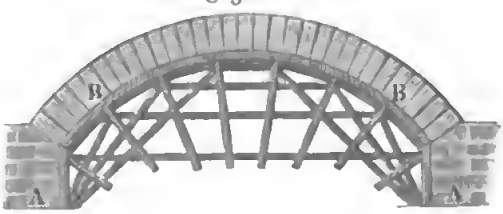
Fig. 187.



bei *A*, *A* eine Reihe von Pfählen, auf welchen das Gerüſte mittels der Streben *B C*, *D E* u. ſ. w. ruht; auch bemerkt man in *F*, *F*... die Schaallatten, auf welchen die Gewölbſteine *G*, *G* zunächſt ruhen. Um das Biegen der Streben zu verhindern, ſind noch die Zangen *K L*, *K L* eingezogen.

In den Figuren 188 und 189 werden zwei geſprengte Lehrgerüſte vor Augen geführt, welche ſich gegen die Widerlagspfeiler *A*. *A* ſtützen; bei dem erſteren Gerüſte befindet ſich zwiſchen je zwei zuſammengehörigen Streben ein Spannriegel, deshalb muß hier das Gewölbe gleichzeitig von beiden Seiten *B* und *B* her aufgeführt werden; bei dem zweiten Gerüſte ſtemmen ſich je zwei Streben unmittelbar gegen einander, weshalb

Fig. 188.



auch hier Gewölbsteine auf der einen Seite eher gelegt werden können, als auf der anderen Seite. Auch hier sind Bänder oder Zangen angebracht, um das Biegen der Streben zu verhindern.

Fig. 189.

Damit sich das geschlossene Gewölbe allmälig und ohne Nachtheile setzen könne, muß die Ausrüstung desselben nach und nach vorgenommen werden, und deshalb läßt man das Gerüste gewöhnlich auf Keilen ruhen, welche man nach Vollendung des Gewölbes nur nach und nach zu lüften braucht, um die allmälige Senkung des Gewölbes zu bewirken. Diese Keile können entweder zwischen den Pfählen und dem Hauptträger, oder zwischen diesem und den Streben, oder endlich zwischen den letzteren und den Lehrbögen angebracht werden. Auch hat man in neuerer Zeit statt der Keile starke eiserne Schrauben, sowie Sandsäcke u. s. w. angewendet, um die starken Erschütterungen, welche beim Zurücktreiben der Keile vorkommen, zu vermeiden.

Die Kräfte, welche die Streben auszuhalten, lassen sich nach §. 57 leicht finden. Ist Q der Normaldruck, welchen ein Strebenpaar aufzunehmen hat, und sind δ_1 und δ_2 die Winkel, um welche die Axen dieser Streben von der Richtung dieser Kraft abweichen, so hat man die Kräfte, welche auf diese Streben übergehen:

$$S_1 = \frac{Q \sin. \delta_2}{\sin.(\delta_1 + \delta_2)} \text{ und } S_2 = \frac{Q \sin. \delta_1}{\sin.(\delta_1 + \delta_2)}.$$

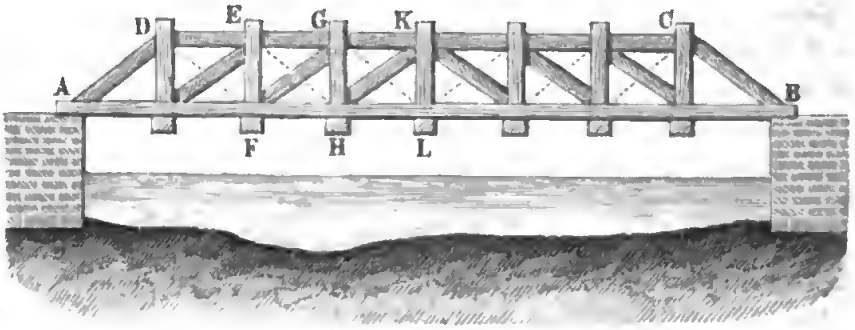
Hölzerne Brücken. Sehr zusammengesetzte Holzconstructionen kommen bei den hölzernen Brücken (franz. ponts en bois; engl. timber bridges) von großer Spannweite vor. Diese Brücken ruhen entweder auf steinernen oder auf hölzernen Pfeilern. Die letzteren sind entweder mit Steinen ausgefüllte Blockkästen, oder sie sind aus einer oder zwei Pfahlreihen bestehende und durch Schwellen verbundene Joche. Die Brücken selbst sind nach sehr verschiedenen Systemen aufgeführt. Das eine Brückensystem besteht in einer Verbindung von Hänge- und Sprengwerken, wie wir oben §. 56 u. s. w. schon mehrere behandelt haben; ein anderes System besteht aus Holzbögen, welche aus über einander liegenden Balken oder Bohlen zusammengesetzt sind (s. §. 81); ein drittes System besteht aus geraden, durch Streben und Bolzen mit einander verbundenen Balken, den sogenannten Gitterbalken (franz. poutres en treillis; engl. lattice trusses). Die älteren Brücken in Schaffhausen, Zürich, Wettingen u. s. w. sind zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerke mit einer Menge von über einander §. 104

weggreifenden Streben, und zwei- oder dreifachen Balken oder Rippen. Hölzerne Bogenbrücken sind von Wiebeking in Bamberg, Freysing und in späteren Zeiten von Burr zu Trenton über den Delaware aufgeführt worden. Bei den Wiebeking'schen Brücken läuft die Brückenbahn über dem Bogen weg; bei der Brücke von Burr ist hingegen die Brückenbahn mittels eiserner Stäbe an die Holzbögen aufgehangen. Im ersteren Falle hat man es also mit einer Bogenspreng- und im zweiten mit einer Bogenhängwerkbrücke zu thun. Viele ältere Holzbrücken bestehen aus einer Verbindung von einem Bogen mit einem Häng- und Sprengwerke.

Eine große Verbreitung haben in der neueren Zeit die Gitter- und Fachwerksbrücken (s. §. 62) erlangt, namentlich sind viele derartige Brücken in Nordamerika ausgeführt worden.

Zu diesem Brückensysteme gehört gewissermaßen die in Fig. 190 abgebil-

Fig. 190.

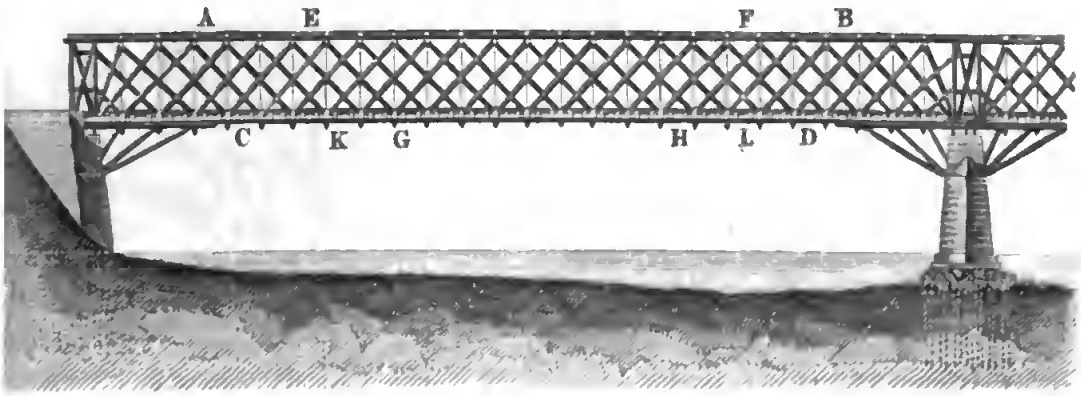


dete Brücke von Palladio. Es ist hier $ABCD$ ein gewöhnliches Hängewerk; der Spannriegel besteht aber aus kürzeren Stücken $DE, EG \ldots$, welche sich gegen dazwischen eingesetzte Hängesäulen $EF, GH \ldots$ stemmen, die den Balken oder die Rippe AB mittels Träger $F, H \ldots$ unterstützen. Zwischen je zwei Hängesäulen sind die Streben $FG, HK \ldots$ eingesetzt, welche der Construction erst eine größere Haltbarkeit geben, weil sie durch ihre rückwirkende Festigkeit der Verschiebung der Rechtecke EH, $GL \ldots$ in schiefwinkelige Parallelogramme entgegenwirken, welche bei der Biegung des Ganzen eintritt. Statt dieser Streben kann man auch Eisenstäbe EH; $GL \ldots$ einziehen, welche durch ihre absolute Festigkeit der Verschiebung der Parallelogramme entgegenwirken. In dieser Art ist z. B. von Wernwag die obere Shuylkill-Brücke bei Philadelphia ausgeführt; da diese Brücke auch auf dreifachen Bogenrippen ruht, so gehört sie jedoch mehr dem zweiten Systeme an.

Die meiste Verbreitung haben die Gitterbrücken nach Howe's System. Eine Seitenansicht von einer solchen Brücke zeigt Fig 191. Diese Brücke besteht aus zwei Gitterwänden, deren Hauptträger AB und CD aus je drei neben einander liegenden Balken bestehen. Deshalb besteht auch eine Tragwand aus lauter doppelten Hauptstreben $CE, DF \ldots$, welche sich

gegen die beiden äußersten Balken stemmen, und aus zwischen inne stehenden Gegenstreben $EG, FH \ldots$, welche mit dem mittleren Balken verbunden sind.

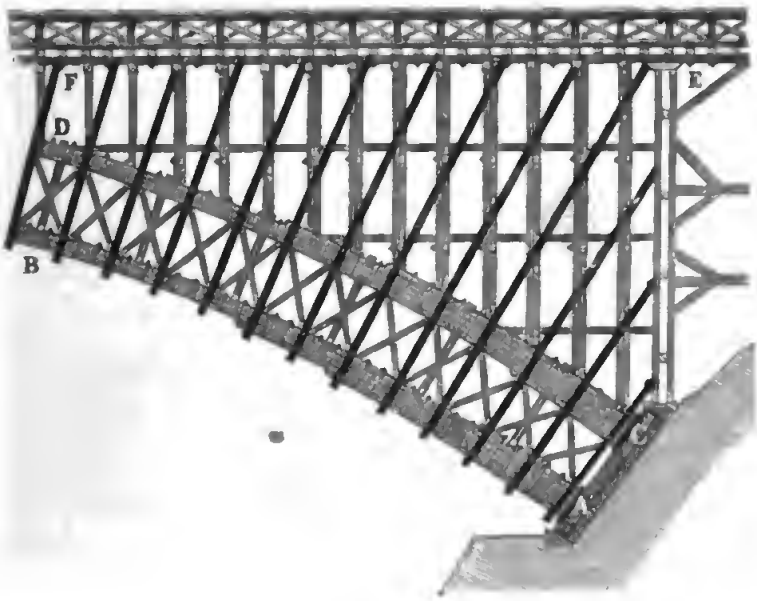
Fig. 191.



Die Verbindung dieser Streben mit den Balken erfolgt jedoch nicht unmittelbar, sondern mittels oben abgeschrägter Querhölzer C, E, $G \ldots$ Das Ganze wird durch je 2 Zoll starke schmiedeeiserne Zugstangen $EK, FL \ldots$ mittels Schrauben $K, L \ldots$ fest zusammengezogen, und es sind zu diesem Zwecke auch noch Querhölzer außen auf die Balken aufgelegt, so daß je zwei dieser Stangen zwischen je zwei der drei Balken und durch zwei Paar Querhölzer hindurch gehen.

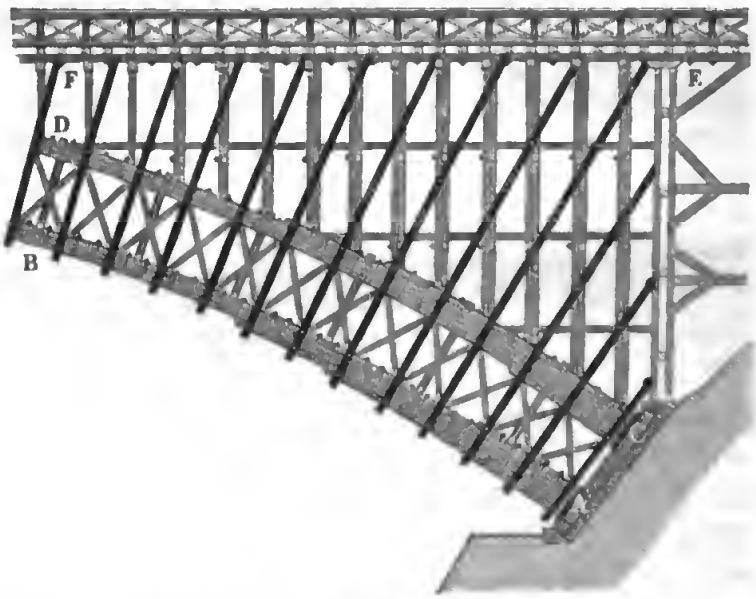
Eine der großartigsten Holzbrücken ist die auf der Newyork-Erie-Eisenbahn befindliche Cascadebrücke von Brown, welche über eine Schlucht von 300 Fuß Weite und 175 Fuß Tiefe gespannt ist. Von dieser Brücke zeigt Fig. 192 die Seitenansicht eines am Widerlager anstoßenden Stückes.

Fig. 192.



Wie man ſieht, ſo beſteht dieſe Brücke in der Hauptſache aus Tragbögen *AB*, *CD* mit zwiſchen befindlichen Kreuzſtreben. Dieſe Tragbögen ſind größten-

Fig. 193.

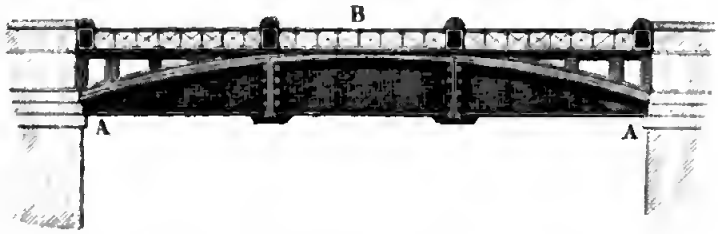


theils aus 3, nach den Enden zu aus 4, 5, und dicht an den Widerlagern ſogar aus 6 Balken zuſammengeſetzt. Die Stärke dieſer Balken iſt 8 und 9 Zoll, und die der Kreuzſtäbe 8 und 8 Zoll. Das Ende eines jeden Balkens ruht in einem eiſernen Schuh, und dieſe Schuhe ſtützen ſich auf eine untermauerte gußeiſerne Platte. Die ganze Brückenbahn *EF* ruht mittels verticaler Tragſäulen auf vier ſolchen Doppelträgern, welche unter einander wieder durch Kreuzſtreben verbunden ſind.

Anmerkung. Die größeren Holzbrücken haben zum Theil noch größere Spannweiten als die ſteinernen Brücken. Bei der oberen Schuylkill-Brücke kommt ein Bogen von 325 Fuß Spannweite und 20 Fuß Höhe vor. Die alten Schweizer Brücken, ſowie die Wiebeking'ſchen Brücken, haben ſchon Spannweiten von 160 bis 200 Fuß. Bei der Trenton-Brücke hat der mittlere Bogen eine Spannweite von 195 Fuß und eine Höhe von 26 Fuß. Eine ſehr große Gitterbrücke iſt bei Wittenberge über die Elbe geführt. Dieſelbe hat 11 Oeffnungen zu je 171 Fuß und 3 zu je 120 Fuß Spannweite. Die Tragwände dieſer Brücke haben eine Höhe von 19 Fuß, während ihr Abſtand von einander nur 13 Fuß mißt. Die Verſuche, welche vorläufig mit einem Theile dieſer Brücke angeſtellt worden ſind, haben ſehr günſtige Reſultate geliefert; bei der Fahrt und dem Stillſtande einer Locomotive von 600 Centner Gewicht betrug die Senkung nur 7 Linien; bei einem Marſch von 240 Mann über die Brücke war dieſelbe nur $6\frac{1}{2}$ Linien, erſt bei einer gleichmäßigen Beſtaſtung von 2000 Centnern und einer Ueberfahrt von zwei Locomotiven von 1260 Centner Gewicht betrug die Senkung 3 Zoll. Siehe die Nachrichten darüber in der Eiſenbahnzeitung, 1850, Nr. 29 bis 31, oder polyt. Centralblatt, 1850, Lief. 18.

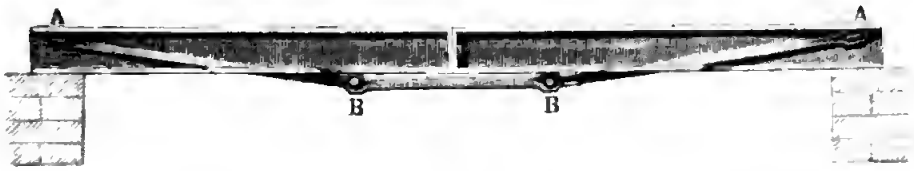
Gusseiserne Brücken. Die gußeisernen Brücken werden größ- §. 105
tentheils nach denselben Regeln gebaut wie die hölzernen Brücken, und kommen auch fast unter denselben Umständen zur Anwendung wie diese, haben aber vor diesen den Vorzug der großen Dauerhaftigkeit. Bei kleineren Brücken bestehen die Rippen aus geraden Balken mit I-förmigen oder ähnlichen Querschnitten. Da das Gußeisen dem Drucke mehr widersteht als dem Zuge, so ist es zweckmäßig, den an beiden Enden aufliegenden gußeisernen Brückenträgern eine breitere Fuß- und eine schmalere Kopfrippe, also den Querschnitten derselben die Form ⊥ zu geben (s. Band I, §. 237). Um die Tragkraft dieser Barrenbrücken zu erhöhen, kann man sie nach der Mitte zu verstärken, wie z. B. bei der Brücke ABA in Fig. 194, oder sie mit einem

Fig. 194.



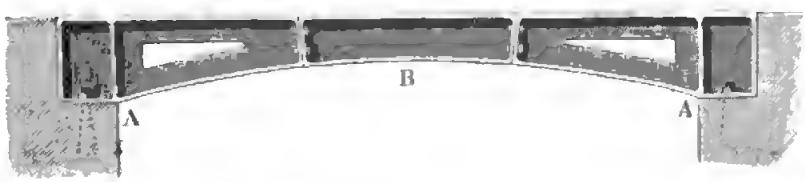
schmiedeeisernen Hängewerk verbinden, wie Fig. 195 vor Augen führt, wo dieses Hängewerk aus zwei Paar schmiedeeiserner Spannschienen AB, AB und den dieselben verbindenden schmiedeeisernen Tragschienen BB besteht. Lassen sich die gußeisernen Träger an ihren Enden stark befestigen, so daß sich

Fig. 195.



dieselben bei der Belastung nicht aufbiegen können, so widerstehen dieselben mehr durch ihre Druckfestigkeit, und es ist daher ihre Verstärkung in der Mitte nicht nöthig; man giebt vielmehr solchen Trägern eine innere Wölbung, wie ABA, Fig. 196, wobei die Höhe von der Mitte nach den Auflagerungsflächen hin allmälig größer wird.

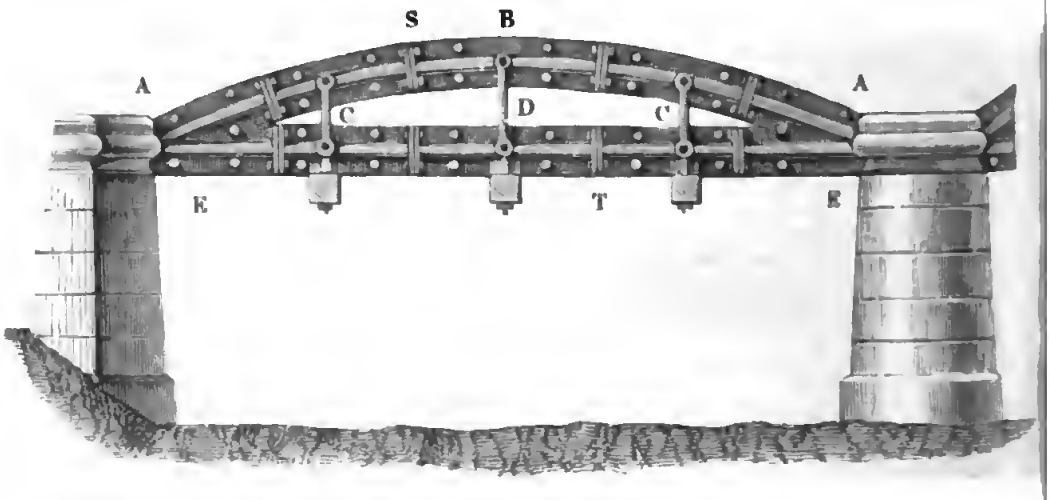
Fig. 196.



Sehr gewöhnlich ahmt man bei der Conſtruction gußeiſerner Brücken die Häng- und Sprengwerke hölzerner Brücken nach, indem man die Streben und Spannriegel aus Gußeiſen und die Zugbänder und Hängeſäulen aus Schmiedeiſen anfertigt. Eine hierher gehörige Conſtruction iſt in Fig. 107 §. 58 abgebildet.

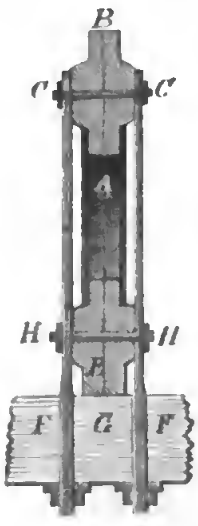
Es gehört hierher auch die Bogenconſtruction in Fig. 197, denn es

Fig. 197.



wirkt hier der Bogen ABA wie Streben und Spannriegel, und es wird der Brückenbarren EE durch die Hängeſtäbe C, C, D, unterſtützt. Die Art der Aufhängung iſt in Fig. 198 beſonders abgebildet; es iſt hier AB die Bogenrippe, E der gerade Brückenbarren, und es ſind CF, CF zwei Hängeſtäbe, welche durch ſchmiedeeiſerne Bolzen CC und HH mit beiden Rippen verbunden ſind und die Querſchwelle G tragen, auf welcher die Brückenbahn ruht. Sehr gewöhnlich läßt man die Bogenrippe als Hänge- und Sprengwerk zugleich wirken, indem man ſie über und unter die gerade Rippe weggreifen läßt. Wie die Rippen aus einzelnen Gußſtücken mittels Kränzen und Schrauben zu einem Ganzen zu vereinigen ſind, iſt bei S, T... in Figur 197 zu erſehen. Eine ähnliche Conſtruction hat die Elzbrücke bei Sexau in Baden.

Fig. 198.



Gußeiſerne Brücken von großen Spannweiten beſtehen meiſt aus einer Reihe neben einander ſtehender Bögen, welche die Brückenbahn von unten ſtützen, und ihr ganz das Anſehen ſteinerner Brücken geben. Die Bogenrippen ſind hier entweder aus maſſiven Platten, oder aus gitterförmigen Gerippen (ſ. Fig. 148, §. 81), oder aus Röhren zuſammengeſetzt. Röhrenbrücken mit kreisförmigen Querſchnitten ſind zuerſt von Reichen-

bach, und solche mit elliptischen Querschnitten von Polonceau ausgeführt worden. Schiefe Brücken lassen sich aus Gußeisen fast eben so leicht herstellen, als rechtwinkelige.

Anmerkung. Bei der berühmten von Rennie erbauten Southwarkbrücke über die Themse in London sind die Bogenrippen aus Segmentplatten zusammengesetzt. Die Spannweite der Bögen dieser Brücke beträgt 232,5 Fuß, die Spannhöhe 23¼ Fuß, und die Anzahl der Rippen eines Bogens ist 8. Die von Polonceau erbaute Carrousselbrücke über die Seine in Paris ist aus röhrenförmigen Bogenrippen zusammengesetzt. Der elliptische Querschnitt einer Rippe hat 13 Zoll Weite und 24 Zoll Höhe, die Zahl der Stücke einer Rippe ist 11. Die Spannweite dieser Brücke beträgt 146 Fuß und die Spannhöhe 15,7 Fuß.

Schmiedeeiserne Brücken. Das Schmiedeeisen ist in der neuesten Zeit das gewöhnlichste Material zur Construction der Brücken, es hat dasselbe eine größere Zug- und Biegungsfestigkeit als das Gußeisen, und besitzt nicht die Sprödigkeit des letzteren, vermöge welcher das Gußeisen bei Stößen und Schwingungen leicht in Stücke zerbricht. Deshalb kann man denn auch den schmiedeeisernen Trägern die einfache Balkenform geben, wogegen gußeiserne Träger, namentlich, wenn dieselben eine größere Länge haben, die dem Zerdrücken mehr widerstehende Bogenform erhalten müssen. Aus diesem Grunde lassen sich auch bei den schmiedeeisernen Brücken die größten Spannweiten erreichen. Uebrigens haben die schmiedeeisernen Brückenträger mit den Brückenträgern aus Gußeisen und aus Holz vor den steinernen Brückenbögen den großen Vorzug, daß sie die Brückenbahn nicht bloß von unten, sondern auch von oben, sowie in jedem beliebigen Punkte ihrer Höhe unterstützen können. §. 106

Zu kurzen Brücken verwendet man jetzt sehr häufig I-förmig gewalzte eiserne Träger; auch bildet man schmiedeeiserne Träger aus zwei gewalzten Eisenschienen, wovon die eine gekrümmt ist, und dadurch entweder ein in der Mitte verstärkter Träger, wie Fig. 199, oder ein Bogenträger, wie Fig. 200, entsteht, wobei der Zwischenraum mit Eisenblech ausgefüllt werden kann.

Fig. 199.

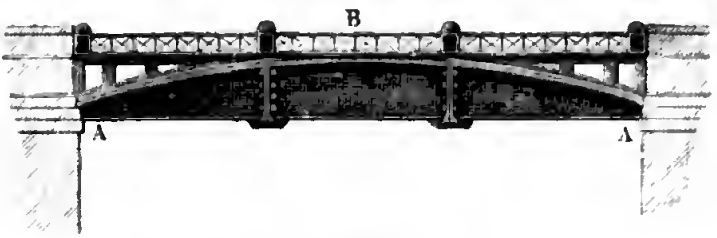
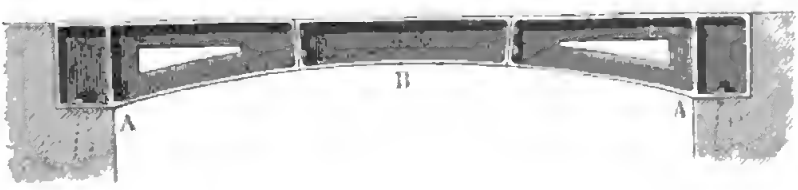


Fig. 200.



Größere Brücken werden vollständig aus Eisenblech zusammengesetzt. Es gehören hierher vor Allem die Röhrenbrücken (tubular-bridges) von Stephenson und zwar die Conway-Brücke und die Britannia-Brücke. Die erstere besteht aus zwei neben einander liegenden Röhren, wovon jede 424 Fuß lang, 14 Fuß 8 Zoll breit, 22½ Fuß hoch an den Enden und 25½ Fuß hoch in der Mitte ist, und ein Gewicht von 1446 Tonnen (à 2172 Pfund Preuß.) hat. Die Britannia-Brücke, welche wie die Telfort'sche Kettenbrücke über den Menai-Meeresstrom führt, besteht aus vier Brückenfeldern *A*, *B*, *B*, *A*, Fig. 201, zwei von je 460 Fuß und zwei von je 230 Fuß Länge, und hat im Ganzen eine Länge von 1513 Fuß. Die Breite dieser Brücke ist 14 Fuß 8 Zoll, die Höhe derselben an den Enden 22 Fuß 9 Zoll und in der Mitte 30 Fuß. Zu jeder Röhre waren nöthig: 2830 Tonnen ebenes Eisenblech, 594 Tonnen Winkeleisen, 418 Tonnen T-Rippen, 336 Tonnen (882000 der Zahl nach) Nieten, und außerdem noch 1000 Tonnen gußeiserne Rahmen u. s. w.; es wiegt folglich eine Röhre im Ganzen 5178 Tonnen. Durch jede Röhre führt ein Eisenbahngeleis.

Den Querschnitt einer Röhrenträgerbrücke (tubular girder bridge) von Fairbairn, welche sich auf einer Werfte (Great Landing Stage at St. Georg's Wharf in Liverpool) befindet, ist in Fig. 202 abgebildet. Zwei Röhrenträger *AB*, *AB*, welche in der Mitte durch einen eisernen Bogen *C* verbunden sind, tragen hier die Brückenbahn *DD* so, daß sie in der Mitte einen Weg für das Fuhrwerk und an den Seiten zwei Wege für die Fußgänger übrig lassen.

Ein Theil einer einfachen Blechträgerbrücke für eine Eisenbahn ist in Fig. 203 abgebildet. Die ganze Bahn *AB* ruht hier mittels Querschwellen *C*, *D*... auf sechs I-förmigen Blechträgern, wie *EF*, von 3 bis 5 Fuß Höhe, welche unter sich selbst wieder durch mehrere Querbalken von Eisenblech verbunden sind. Die Hauptträger liegen auf den Holzschwellen *G*, welche durch eiserne Stühle mit den Pfeilern *H* verbunden sind.

Bei einer vom Herrn Etzel entworfenen Eisenbahnbrücke über die Aar unweit Olten in der Schweiz hat man auch bogenförmige Blechträger angewendet, welche ihr das Ansehen einer gußeisernen oder hölzernen Brücke wie Fig. 192 geben. Diese Brücke besteht aus drei Oeffnungen von je 105 Fuß Spannung und 17 Fuß Bogenhöhe und jedes Brückenfeld wird aus 5 Blechbögen von 3 Fuß Höhe und 5 unmittelbar unter der 24 Fuß breiten zweigleisigen Bahn liegenden geraden Blechbalken von 2 Fuß Höhe zusammengesetzt.

Die Gitterbrücken aus Eisenblech haben bei den neuesten Eisenbahnanlagen die häufigste Anwendung gefunden (s. namentlich den unten citirten Atlas von Etzel über die schweizerischen Eisenbahnen). Fig. 204 (a. S. 246) zeigt die Seitenansicht von einem Stück der Gitterbrücke über die Kinzig bei Offenburg. Diese Brücke trägt neben dem doppelten Schienenweg *DE* noch zwei Trottoirs zu den Seiten, und besteht aus drei 6¼ Meter hohen

Fig. 201.

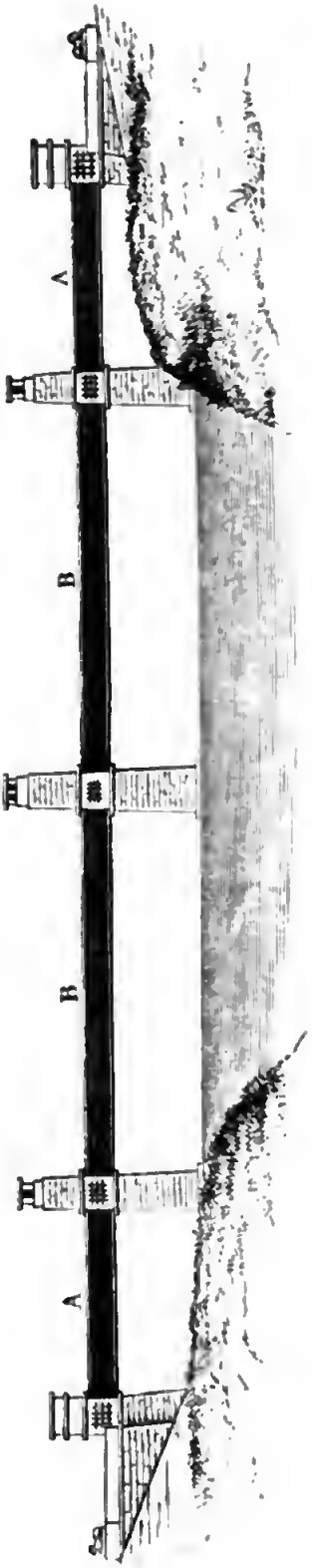


Fig. 203.

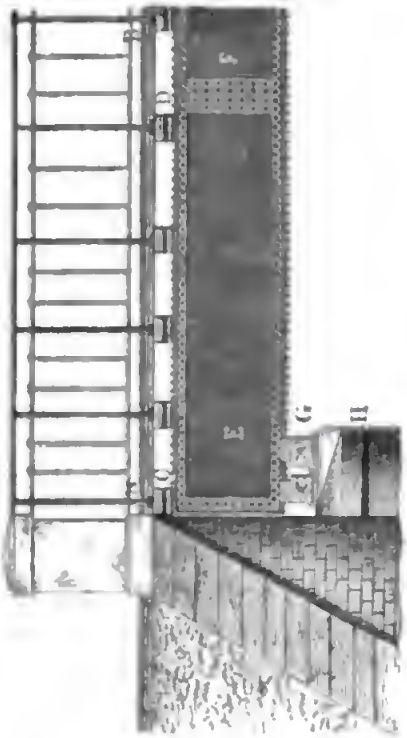
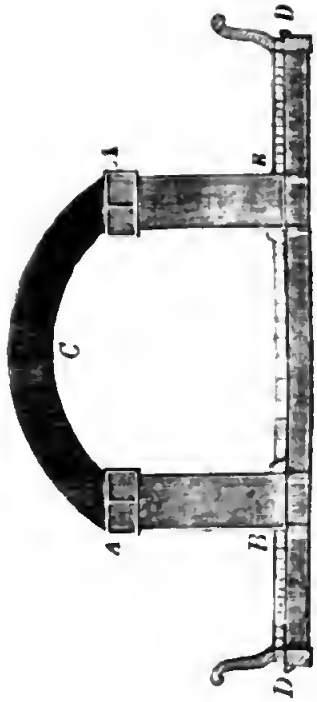
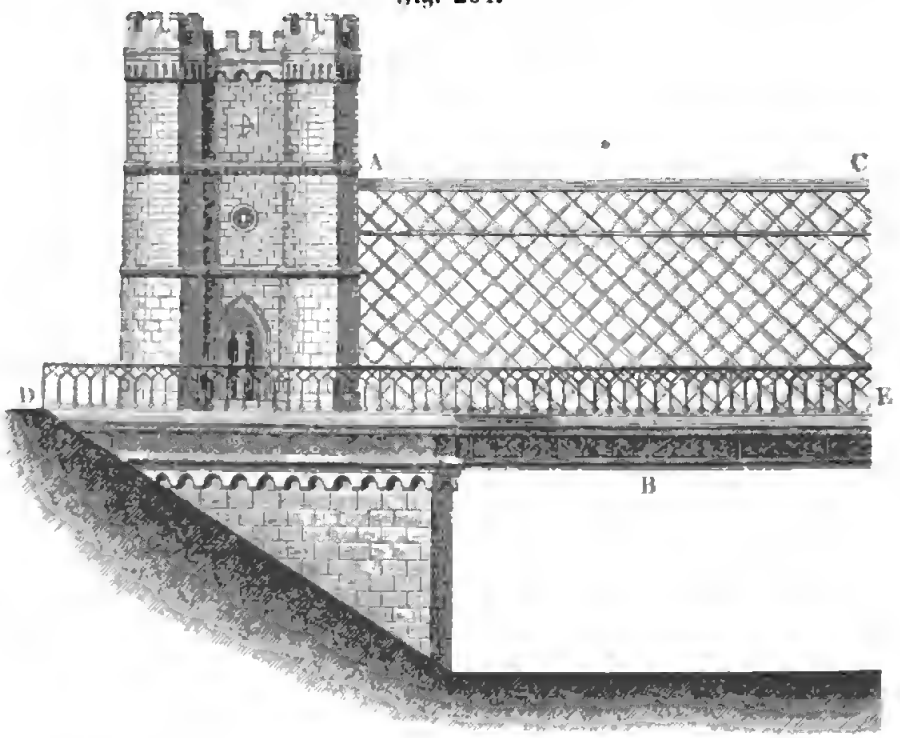


Fig. 202.



und $71\frac{1}{8}$ Meter langen Gitterwänden wie $A\,B\,C$. Die Gitterſtäbe kreuzen ſich unter rechten Winkeln, ſie haben bei 2,1 Centimeter Stärke $10\frac{1}{2}$ Centimeter Breite, und ſind in den Kreuzpunkten durch 3 Centimeter dicke Bolzen vernietet. Um die Feſtigkeit dieſer Brücke zu erhöhen, hat man die Tragwände derſelben nicht allein auf jeder Seite 4 Meter lang aufgelagert, ſon-

Fig. 204.



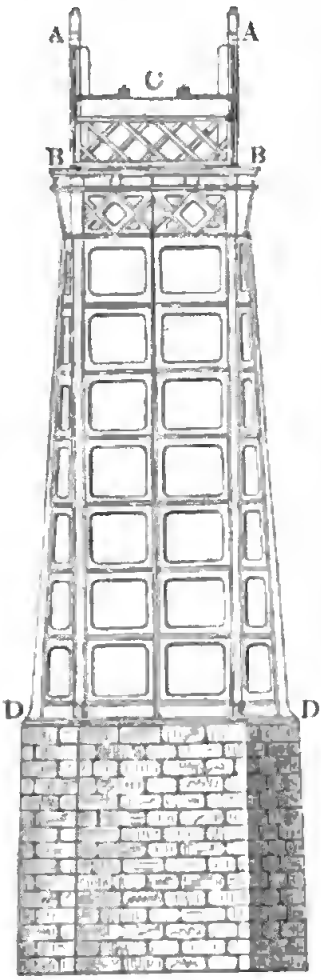
dern auch noch mit den Pfeilern feſt verankert. Zu Verhütung des Zurſeiteziehens ſind dieſe Wände auch oben noch durch Eiſenſchienen mit einander verbunden.

Statt der ſteinernen Brückenpfeiler ſind von Herrn Etzel bei Gitterbrücken in der Schweiz auch gußeiſerne Pfeiler angewendet worden. Einen ſolchen Pfeiler von einer eingeleiſigen Eiſenbahnbrücke über die Thur bei Wyl zeigt Fig. 205. Es ſtellen $A\,B$, $A\,B$ die Gitterwände vor, welche unter ſich durch gitterförmige Querwände $B\,B$ verbunden ſind und die Schienenbahn C unterſtützen. Der thurmförmige Pfeiler $B\,B\,D\,D$ iſt aus durchbrochenen Gußeiſenplatten etagenförmig zuſammengeſetzt, welche durch Schrauben feſt mit einander verbunden ſind. Bei einer anderen Brücke dieſer Art erreicht der gußeiſerne Pfeiler eine Höhe von 78,8 Fuß.

Die Rider'ſchen Brücken bilden den Uebergang zwiſchen den eiſernen Gitter- oder Fachwerksbrücken und den ſchmiedeeiſernen Bogenträgerbrücken. Die Tragwände dieſer Brücken beſtehen aus zwei concentriſchen Bögen, wovon der obere, oder Tragbogen aus Stücken von Gußeiſen, und der untere

oder Spannbogen aus Schienen von Schmiedeeiſen zuſammengeſetzt iſt, und die Verbindung dieſer Bögen zu einem Ganzen wird durch gußeiſerne Säulen und ſchmiedeeiſerne Diagonalſchienen bewirkt. Mit einer ſolchen Brücke von 116 Fuß Spannweite iſt der Rock-Creek zwiſchen Waſhington und Georgtown überbrückt. Vollkommen ſind die ſchmiedeeiſernen Bogen-Brücken von Fox und Henderſon. Die Tragwand einer ſolchen Brücke beſteht aus einem röhrenförmigen Tragbogen und aus einer horizontal geſpannten, mehrgliedrigen Spannkette, beide durch Säulen und Andreaskreuze zu einem Ganzen feſt mit einander verbunden. Eine ſolche Brücke von 120 Fuß Spannweite und 8 Fuß Bogenhöhe befindet ſich auf der Verbindung zwiſchen der Blackwall- und Eaſtern-Countiesbahn bei London.

Fig. 205.



Die Pauliſchen Brücken beſtehen aus Bogenträgern mit Fachwerk von Eiſenblech, wie in Fig. 137, §. 73 dargeſtellt wird. Der obere oder Druckbogen eines ſolchen Trägers iſt kaſtenförmig aus Eiſenblech zuſammengenietet; der untere, oder Spannbogen beſteht dagegen aus übereinander liegenden Eiſenblechſchienen. Durch die Ausbauchung eines ſolchen Trägers iſt es möglich, daß bei der größtmöglichen Belaſtung deſſelben die Spannungen der beiden Gurtbögen an allen Stellen gleichgroß, folglich die Maſſe derſelben möglich klein ausfällt. Das Fachwerk, welches die beiden Gurtbögen mit einander verbindet, beſteht aus gerippten Säulen oder Streben, welche nur der Druckkraft ausgeſetzt ſind, und aus diagonalen Bändern, welche nur Zugkraft auszuhalten haben. Die Brückenbahn iſt nur mit den Streben verbunden. Nach dem Pauli'ſchen Syſteme iſt unter anderen vorzüglich die Eiſenbahnbrücke über die Iſar bei Großheſelohe, und die Eiſenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz ausgeführt. Die letztere beſteht aus 4 Hauptöffnungen von je 90 Meter Weite, und aus 6 Flußöffnungen von je $33\frac{1}{2}$ Meter Weite, an welche ſich dann noch 22 Oeffnungen von kleinerer Weite anſchließen, ſo daß die ganze Brücke 1028,645 Meter lang ausfällt. Die Abbildungen in Fig. 206 und 207 (a. f. S.) ſtellen die Seitenanſicht und den Grundriß einer Hauptöffnung vor; AMA und ACA ſind die beiden Gurtbögen, DE, DE u. ſ. w. die Streben,

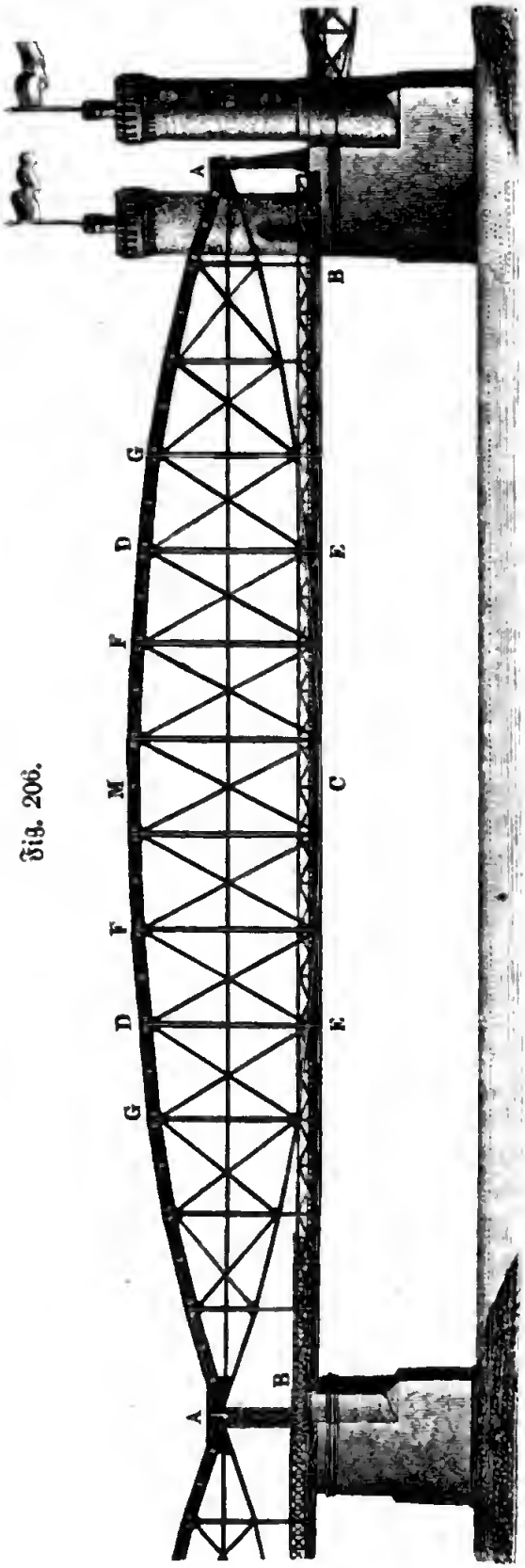


Fig. 206.

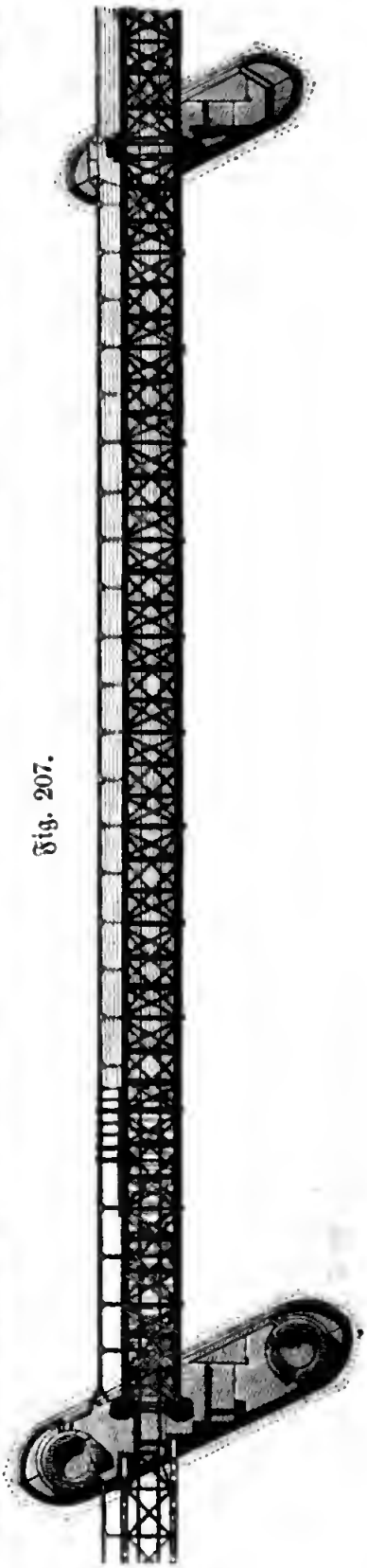


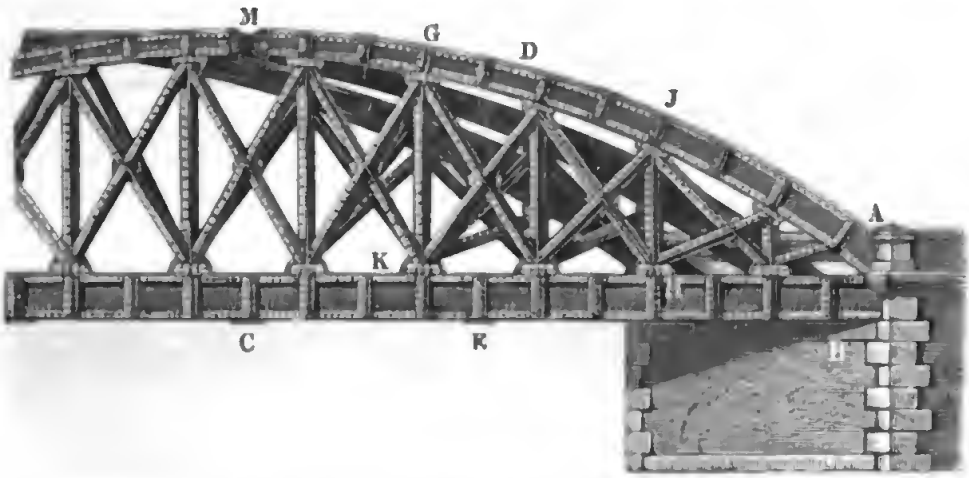
Fig. 207.

EF, *EG* u. ſ. w. die Zugſtangen, und *BCB* iſt die Brückenbahn. Die Enden *A* und *A* eines ſolchen Brückenträgers ruhen mittels ebenen Fußplatten auf cylindriſch abgedrehten Lagerplatten aus Stahl, greifen aber auch außerdem noch zahnförmig in einander ein, damit keine Verſchiebung eintreten könne. Die Lagerplatten ſind auf gußeiſernen Stühlen befeſtigt, von welchen der eine auf dem Pfeilerkopfe feſtſitzt, und der andere mittels Walzen auf demſelben aufruht, wodurch eine Längenverſchiebung des ganzen Trägers möglich gemacht wird. Die aus Sandſteinquadern aufgeführten Strompfeiler haben eine Stärke von $4\frac{1}{4}$ Meter, und ruhen bis zu einer Höhe von $1\frac{1}{2}$ Meter unter Null auf einer 3,5 bis 3,8 Meter dicken und 10 Meter breiten Betonſchicht, welche von einer dicken Pfahlwand eingefaßt und mittels eines ſtarken Steinwurfes vor Zerſtörung geſichert wird. Die Höhe der Tragbögen iſt in der Mitte 15 Meter, die lichte Brückenweite 4 Meter und die Höhe der Fahrbahn über den Nullpunkt des Pegels mißt 15,1 Meter; die Conſtructionsdicke der Brücke, gemeſſen von der Fahrbahn bis Unterkante der Träger, beträgt 1 Meter.

Die Querſchnittsdimenſionen der Brückenträger ſind ſo ausgewählt, daß die dreifache variable Laſt ſammt dem ganzen permanenten Gewicht der Brücke pr. Quadratcentimeter eine Spannung von 1600 Kilogramm, alſo pr. Quadratzoll eine ſolche von 22000 Pfund giebt. Dieſer Forderung wird dadurch entſprochen, daß die Spannbögen aus $9 . 2 = 18$ Blechbändern von je 20 Centimeter Breite und 1,2 Centimeter Dicke und die Druckbögen ſo zuſammengeſetzt ſind, daß ſie eine rectanguläre Blechröhre von 1 Meter Weite und 1,2 Centimeter Wandſtärke bilden.

In Fig 208 iſt noch ein Theil der ſchiefen Bogenbrücke (bowstring-

Fig. 208.



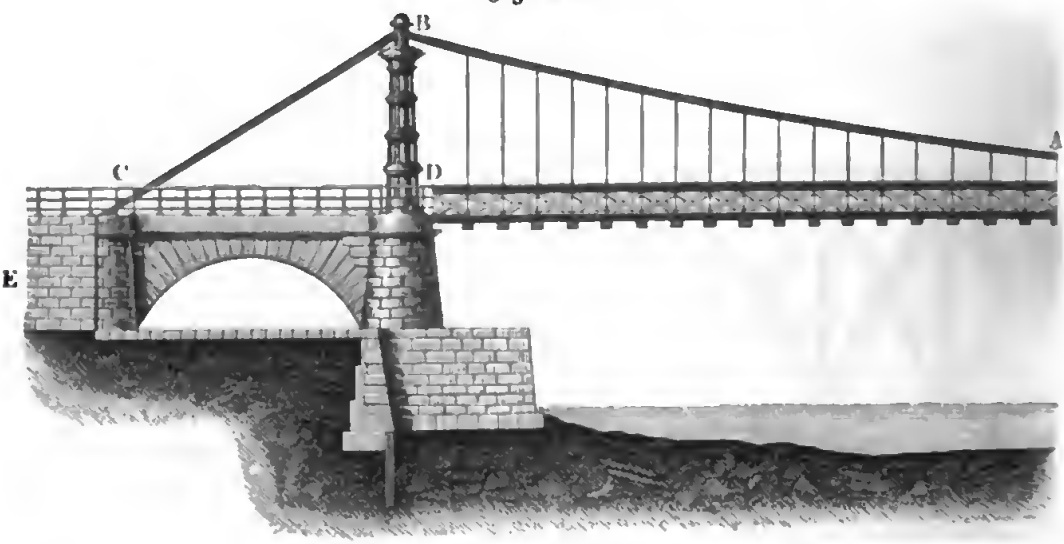
bridge) abgebildet, welche zu Dudenarden eine Eiſenbahn über die Schelde führt. Dieſe Brücke gehört in gewiſſem Grade dem Charnierbrückenſyſtem

an, denn die Druckbögen derselben bestehen hier aus zwei getrennten Stücken, wie *ADM*, welche sich im Scheitel *M* mittels eines eingeschobenen Keiles gegen einander stemmen. Es wird dadurch der Scheiteldruck localisirt, welches, wie aus §. 94 bekannt ist, seine besonderen Vortheile bei unsymmetrischer Belastung der Brücke gewährt. An den Enden sind dagegen die Druckbögen durch Nietung fest mit den geraden Zugbändern verbunden. Uebrigens sind die Tragwände an einem Ende mit dem Pfeilerkopfe *B* fest verbunden, während sie an dem anderen Ende mittels Rollen auf dem Brückenpfeiler aufruht. Die Länge einer Tragwand ist 27,8 Meter und Pfeilhöhe derselben 6 Meter. Der Druckbogen ist im Scheitel 0,35 und an den Füßen 0,80 Meter hoch, wogegen das Zugband durchgängig 0,96 Meter Höhe hat. Beide sind im Querschnitt T förmig und aus Eisenblech von 10 bis 13 Millimeter Dicke zusammengenietet. Die Bogenfüllung besteht, wie gewöhnlich aus verticalen Blechstreben, wie *KG*, *IH* und diagonalen Zugbändern, wie *DH*, *DK* u. s. w., welche unter einander sogenannte Andreaskreuze bilden. Diese Brücke hat noch die Eigenthümlichkeit, daß hier zwischen den Querträgern, welche die Tragwände mit einander verbinden, Ziegelgewölbe aufgeführt sind, welche ein über $^1/_2$ Meter dickes Schotterbette für die Bahnschwellen tragen.

§. 107 **Hängebrücken.** Eine neuere Hängebrückenanlage ist die von Brialmont construirte Kettenbrücke über die Maas bei Seraing.

Die Seitenansicht von einem Stück dieser Bahn führt Fig. 209 vor Augen.

Fig. 209.

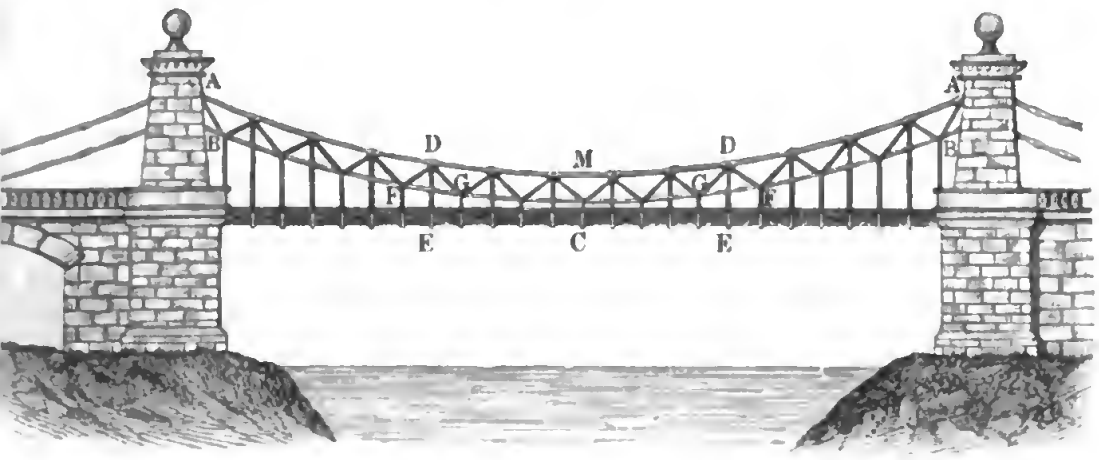


Diese Brücke, welche bei einer Breite von 5 Meter und einer Bogenhöhe von 7 Meter, eine Spannweite von 105 Meter hat, besteht aus acht und zwar auf jeder Seite aus vier nahe über und neben einander liegenden Dop-

pelketten. Die Glieder dieser Ketten, deren Metalldicke $2^1/_2$ und Höhe 5 Centimeter mißt, bilden Scheeren oder Ringe von 3 Meter Länge und 1 Decimeter lichter Weite. Die auf einer Seite neben einander liegenden Doppelketten sind durch 1 Decimeter dicke Bolzen mit einander verbunden, und an die letzteren sind die 3 Centimeter dicken Hängestangen angeschlossen. Die Tragketten AB sind mit den Spannketten BC durch die in Fig. 160 abgebildeten und in §. 85 beschriebenen Hebel verbunden, welche in einem 8 Meter hohen und aus vier Stücken und einem cylindrischen Kern bestehenden gußeisernen Thurme enthalten sind. Die Befestigung der Kettenenden in der Widerlagsmauer E ist ähnlich wie Fig. 161 darstellt. Die ganze Brücke wiegt auf das laufende Meter 1010 Kilogramm, und nimmt man die Belastung eben so groß an, so berechnet sich die Spannung der Ketten auf 418910 Kilogramm, so daß auf ein Quadratmillimeter desselben eine Spannung von 10 Kilogramm kommt. Die Hängestangen sind dagegen nur mit 2 Kilogramm und die gußeisernen Pfeiler mit $2^1/_2$ Kilogramm pr. Quadratmillimeter belastet.

Die Eisenbahnkettenbrücke über den Donau-Canal in Wien, ausgeführt von den Ingenieuren Schnirch und Fillunger ist in Fig. 210 skizzirt.

Fig. 210.



Dieselbe besteht aus je zwei durch Diagonalstäben DF, DG ... mit einander verbundenen Hängeketten AMA und $BGGB$, welche wie gewöhnlich, die Brückenbahn ECE mittels verticaler Hängestangen tragen. Diese Brücke hat eine Spannweite von 264 Wiener Fuß, eine Bogenhöhe von $13^1/_5$ Fuß und trägt eine Fahrbahn mit Doppelgeleisen von 35 Fuß Breite. Der Gesammtquerschnitt der Ketten ist 248 Quadratzoll, und der Materialaufwand dieser Brücke besteht aus 7290,8 Centner Schmiedeeisen, und aus 668 Centner Gußeisen.

Schlußanmerkung. Zum weiteren Studium der Statik der Holz- und Eiſenconſtructionen ſind folgende Schriften zu empfehlen. Eytelwein's Statik, Band II, Gerſtner's Mechanik, Band I, und Kaiſer's Handbuch der Statik. Ferner Navier: Resumé des leçons sur l'application de la mécanique. Part I, Paris 1833, auch deutſch von Weſtphal, unter dem Titel: Mechanik der Baukunſt, und Rebhann, Theorie der Holz- und Eiſenconſtructionen, mit beſonderer Rückſicht auf das Bauweſen, Wien 1856. Ardant, Theoretiſch-praktiſche Abhandlung über Anordnung und Conſtruction der Sprengwerke von großer Spannweite, aus dem Franzöſiſchen von Kaven, Hannover 1844. Ausführlich über Dachconſtructionen iſt die Schrift von M. Winter, Berlin 1862. Ein älteres Werk iſt: Elementary Principles of Carpentary etc. by Th. Tredgold, London 1820. Persy, Cours de stabilité des constructions. Sganziu, Cours des constructions. Cresy, An Encyclopaedia of Civil-Engineering, London 1847. Fairbairn, An account of the construction of the Britannia- and Conway-Tubular-Bridges etc. Dempsey, Tubular- and other Iron-Girder-Bridges, auch deutſch von Werther unter dem Titel: Praktiſches Handbuch bei dem Bau eiſerner Träger- oder Jochbrücken ꝛc., Dresden 1853; ſowie Dempsey, Iron applied to railway structures, ſowie: Malleable iron-bridges, und Examples for iron roofs etc. Ferner M. Becker, die gußeiſernen Brücken der badiſchen Eiſenbahnen, Carlsruhe 1847, ſowie deſſen angewandte Baukunde des Ingenieurs, und C. M. Bauernfeind, Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde mit erläuterndem Text, München 1853. Siehe auch „Die Brücken und Thalübergänge ſchweizeriſcher Eiſenbahnen, von C. v. Etzel, Baſel 1856, ſowie Duggan, Specimens of the stone-, iron- and wood-bridges, New-York 1850.

Was die Hängebrücken insbeſondere anlangt, ſo handelt hiervon ſchon Gerſtner in ſeiner Mechanik, Band I, ziemlich ausführlich, und beſchreibt namentlich die Hammerſmith- und die Menaikettenbrücke von Telford. In theoretiſcher Hinſicht iſt vorzüglich zu nennen: Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, auch deutſch von Scheffler, unter dem Titel: Die mechaniſchen Principien der Ingenieurkunſt und Architectur, Braunſchweig 1845. In Navier's Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823, wird nicht allein eine allgemeine Theorie der Kettenbrücken abgehandelt, ſondern auch eine in Paris über die Seine aufgehangene Kettenbrücke beſchrieben, welche leider durch das Nachgeben der Pfeiler unbrauchbar wurde und deshalb wieder abgetragen werden mußte. Ueber die in Frankreich ſehr häufig angewendeten Drahtbrücken handelt Seguin (der Aelt.) in einem Mémoire sur les ponts en fil de fer. Eine gedrängte Abhandlung über ältere Hängebrücken iſt in Sganzin's Cours des constructions zu finden. Nächſtdem findet man auch mehrere Kettenbrücken beſchrieben in den Annales des ponts et chaussées, ferner in Förſter's Bauzeitung u. ſ. w. Ueber engliſche Kettenbrücken wird auch gehandelt in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 5 und 11.

Ueber die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz handelt die letztere Zeitſchrift im 32. Jahrgange (1853); die Hängebrücke über die Maas bei Seraing wird (nach Armengaud's publication industrielle) im „Civil-Ingenieur", Band II, 1856, beſchrieben. Ferner die Prager Kettenbrücke von Schnirch iſt in einer beſonderen Schrift von Hennig, Prag 1842, beſchrieben, und ebenſo die Kettenbrücke über die Donau zu Peſth von Clark. Letztere Schrift iſt in engli-

scher Sprache erschienen unter dem Titel: An account of the suspension bridge across the river Danube, London 1853.

Ferner gehört hierher: Schnirchs erste Kettenbrücke für Locomotivenbetrieb, von J. Fauta. Wien 1861.

Die Theorie der Hängebrücken mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung, von H. Tellkampf. Hannover 1856, enthält in gedrängter Kürze das Wesentliche über die Theorie und die Anwendung dieser Brücken.

Endlich ist noch folgende ganz neue Schrift zum Studium der statischen Baukunst zu empfehlen:

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1857. Die Basis dieser Schrift bildet das zuerst von Herrn Moseley aufgestellte und vom Herrn Scheffler weiter ausgebildete „Princip des kleinsten Widerstandes". S. das oben citirte Werk von Moseley, sowie die Abhandlungen Schefflers im Crelle Journal für die Baukunst, Band 29 und 30.

Die Literatur über die statische Baukunst und insbesondere über den Brückenbau hat sich in der neuesten Zeit so sehr ausgedehnt, daß hier nur die wichtigsten Schriften über diesen Gegenstand angezeigt werden können. Vor Allem ist zu nennen: Rankine's Manuel of Civil-Engineering, London 1862. Ferner die Schrift von Laißle und Schübler über den Bau der Brückenträger, welche 1864 in Stuttgart in einer zweiten Auflage erschienen ist. Ueber die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz, nach Pauli's System ist 1863 in Mainz eine kurze Beschreibung erschienen. In dem Werke von Dr. A. Ritter: Elementar-Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, wird von der Methode der statischen Momente der ausgedehnteste Gebrauch gemacht. Ein größeres Werk über Brücken ist folgendes: Traité théorique et practique de la construction des ponts metalliques par Molinos et Pronnier, Paris 1857. Siehe Bd. IV des Civilingenieurs „über die allgemeine Methode der Berechnung von Brücken." Auch gehört hierher: Langer. Der Eisenbrückenbau. Wien 1863. Mehrere Abhandlungen über eiserne Brücken und Brückenträger sind in den letzten Jahrgängen des Civilingenieurs, sowie in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, in der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, und in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins enthalten.

Ueber die §. 106 beschriebene Brücke zu Oudenarden handelt speciell der Civilingenieur in Band IX, 1863. Eine Untersuchung des Einflusses bewegter Lasten auf den Widerstand eiserner Brücken mit geraden Trägern von Herrn Renaudot enthält Band VIII, 1862 des Civilingenieurs. Ueber die Theorie continuirlicher Brückenträger handelt die gedachte Zeitschrift in Band IV, VI und VIII. Die Blechbogenbrücke über den Canal von Saint-Denis ist in Band VI, und die Blechbogenbrücke über die Theiß bei Szegedin in Band VII des Civilingenieurs beschrieben. Die Construction steifer Hängebrücken mit Charnieren ist zuerst behandelt vom Herrn Köpcke im sechsten und siebenten Band der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover.

Zweite Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Kraft-Maschinen.

Einleitung.

Maschinen. Maſchinen (franz. und engl. machines) heißen alle künſtlichen Vorrichtungen, durch welche Kräfte in den Stand geſetzt werden, mechaniſche Arbeiten zu verrichten. Sie ſind inſofern von den Bauwerken (franz. constructions; engl. structures) verſchieden, als dieſe den Zweck haben, nur den Gleichgewichtszuſtand zwiſchen den Kräften verſchiedener Körper herzuſtellen. Inſtrumente oder Werkzeuge (franz. und engl. instruments) ſind von den Maſchinen weſentlich nicht verſchieden; ſie dienen nur zur Verrichtung kleiner Arbeiten durch Menſchenhände. §. 108

Bei jeder Maſchine iſt zu unterſcheiden: Kraft und Laſt oder Widerſtand. Kraft (franz. force; engl. power) iſt die Urſache der Bewegung, und Laſt oder Widerſtand (franz. résistance, engl. resistance) iſt Das, was der Kraft entgegenwirkt, und deſſen Ueberwindung Zweck der Maſchine iſt. Die Körper, deren Kräfte zur Bewegung von Maſchinen verwendet werden, heißen Beweger, Motoren (franz. moteurs; engl. motors); dieſe Kräfte ſelbſt ſind aber vorzüglich die animaliſchen Kräfte, die Schwerkraft, die Trägheit, Elaſticität, Expanſivkraft u. ſ. w. (ſ. Band I, §. 63). Laſt oder Widerſtand iſt aber zu überwinden, indem man Körper von einem Orte nach einem anderen bringt, oder Körper in ihrer Form verändert, z. B. zertheilt, zuſammendrückt u. ſ. w.

An jeder Maſchine laſſen ſich in der Regel drei Haupttheile unterſcheiden. Der erſte Haupttheil dient zur Aufnahme der Kraft, und heißt deshalb die Kraft- oder Umtriebsmaſchine (franz. récepteur; engl. receiver), der zweite Haupttheil dient zur unmittelbaren Verrichtung der Arbeit, und heißt deshalb die Laſt-, Ausübungs- oder Arbeitsmaſchine (franz. opérateur, outil; engl. operator), und der dritte dient zur Verbindung beider, indem er die Bewegung der Kraftmaſchine auf die Arbeitsmaſchine überträgt, ſie dem Zwecke entſprechend verändert u. ſ. w.; er heißt deshalb die Verbin-

dungs- oder Zwiſchenmaſchine (franz. communicateur; engl. communicator). Bei einer gewöhnlichen Mahlmühle iſt z. B. das Waſſerrad die Umtriebsmaſchine, der armirte umlaufende Mühlſtein die Arbeitsmaſchine und das Räderwerk zwiſchen beiden die Zwiſchenmaſchine (das Zwiſchengeſchirr).

Anmerkung. Nicht bei allen Maſchinen treten dieſe drei Haupttheile vollſtändig getrennt hervor, namentlich fehlt die Zwiſchenmaſchine zuweilen ganz, weil die Umtriebsmaſchine manchmal ſchon diejenige Bewegung hat, welche zur Verrichtung einer gewiſſen Arbeit nöthig iſt. Bei einem gewöhnlichen Schubkarren ſind die drei Haupttheile ganz mit einander vereinigt; die Handhaben deſſelben laſſen ſich als den kraftaufnehmenden, die Schenkel als den fortpflanzenden und der Kaſten als den ausübenden Maſchinentheil anſehen, jedoch machen alle drei nur einen einzigen Körper aus.

† §. 109 **Leiſtung.** Die Wirkung, Leiſtung oder der Effect einer Maſchine (franz. effet; engl. effect, work) wird durch die in einer Minute oder Secunde verrichtete Arbeit (ſ. Band I, §. 71) oder durch das Product aus der Kraft und dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege gemeſſen. Iſt P die Kraft und s der in jeder Secunde wirklich zurückgelegte oder einer Secunde entſprechende Weg, ſo hat man demnach als Maß der Leiſtung einer Maſchine: $L = Ps$ Pfundfuß (Fußpfund) oder Kilogrammeter.

Es iſt ſehr gewöhnlich, ſich noch einer größeren Einheit von 75 Kilogrammeter oder 478 Fußpfund zum Meſſen der Maſchinenleiſtungen zu bedienen, und dieſe Einheit eine Pferdekraft (franz. cheval-vapeur; engl. horse-power) zu nennen. In England rechnet man 550 Fußpf., in Preußen 480 Fußpf., und in Oeſterreich 430 Fußpf pr. Pferdekraft.

Es iſt auch nothwendig, Nutz-, Neben- und Totalleiſtung einer Maſchine von einander zu unterſcheiden. Nutzleiſtung (franz. effet utile; engl. useful effect, useful work) iſt diejenige, deren Ueberwindung die Maſchine bezweckt, welche auch wirklich verrichtet wird; Nebenleiſtung (franz. effet perdu; engl. lost effect, impeding effect) iſt diejenige Wirkung, welche die Maſchine durch die Reibung, Steifigkeit, Stöße u. ſ. w. ohne Nutzen conſumirt; Roh- oder Totalleiſtung (franz. effet total, effet absolut; engl. whole-effect) iſt die Summe beider oder das dem Motor innewohnende oder ihm entnommene Arbeitsvermögen. Eine Maſchine iſt um ſo vollkommener, je kleiner ihre Nebenleiſtung in Hinſicht auf die Nutz- oder Totalleiſtung, oder je größer ihre Nutzleiſtung in Hinſicht auf die Totalleiſtung iſt, je weniger alſo Wirkung durch die Maſchine beim Uebertragen vom Motor auf den Widerſtand verloren geht. Man bedient ſich deshalb des Verhältniſſes der Nutzleiſtung zur Totalleiſtung als Maß zur Beurtheilung der Vollkommenheit einer Maſchine, und nennt dieſes die relative Leiſtung oder den Wirkungsgrad (franz. rendement, engl. efficiency) einer Maſchine. Iſt L die Total-, L_1 die Nutz- und L_2 die Nebenleiſtung, ſo hat man den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{L - L_2}{L}.$$

Eine Maſchine iſt hiernach um ſo vollkommener oder um ſo zweckmäßiger eingerichtet, je mehr ſich ihr Wirkungsgrad der Einheit nähert. Da ſich die Nebenhinderniſſe, z. B. die Reibung, der Luftwiderſtand u. ſ. w., nie ganz beſeitigen laſſen, ſo iſt es allerdings nie möglich, den Wirkungsgrad einer Maſchine auf Eins zu bringen.

Beiſpiel. Ein Pochwerk beſteht aus 20 Stempeln, wovon jeder 250 Pfund ſchwer iſt und in jeder Minute 40 Mal 1 Fuß hoch gehoben wird; die Umtriebsmaſchine deſſelben beſteht in einem Waſſerrade, welches ein Waſſerquantum von 260 Cubikfuß pr. Minute bei 20 Fuß Gefälle aufnimmt. Man ſucht die Wirkungsverhältniſſe dieſer Maſchine. Die Nutzleiſtung pr. Secunde iſt:

$$\frac{20.250.40.1}{60} = 3333\tfrac{1}{3} \text{ Fußpfund} = 6\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekräfte};$$

die Totalleiſtung aber, da in jeder Secunde $\frac{260}{60}$ Cubikfuß $= \frac{260.61{,}75}{60} = 267{,}5$ Pfund Waſſer 20 Fuß hoch herabſinken:

$$= 267{,}5 . 20 = 5350 \text{ Fußpfund} = 11{,}2 \text{ Pferdekräfte};$$

die Nebenleiſtung:

$$= 5350 - 3333\tfrac{1}{3} = 2016\tfrac{2}{3} \text{ Fußpfund} = 4{,}2 \text{ Pferdekräfte};$$

der Wirkungsgrad der Maſchine endlich:

$$\eta = \frac{3333\frac{1}{3}}{5350} = 0{,}623.$$

Anmerkung. Ueber die Arbeitseinheit „Pferdekraft" ſ. eine Abhandlung des Herrn Reuleaux im Civilingenieur, Band III.

Nutz- und Nebenlaſt. Auch die Laſt einer Maſchine iſt in Nutz- und Nebenlaſt zu unterſcheiden; da aber die Kraft, Nutz- und Nebenlaſt in der Regel an verſchiedenen Punkten angreifen, ſo läßt ſich die Kraft nicht unmittelbar der Summe aus der Nutz- und Nebenlaſt gleichſetzen, ſondern es erfordert dieſes Gleichſetzen erſt eine Reduction. Dieſe Reduction iſt entweder mit Hülfe der gleichzeitigen Wege der verſchiedenen Angriffspunkte einer Maſchine, oder mittels der Hebelarme auszuführen. §. 110

Legt die Kraft P den Weg s zurück, während die Nutzlaſt P_1 den Weg s_1 und die Nebenlaſt P_2 den Weg s_2 macht, ſo hat man zu ſetzen:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2, \text{ daher } P = \frac{s_1}{s} P_1 + \frac{s_2}{s} P_2.$$

Man nennt den Punkt einer Maſchine, in welchem die Kraft (P) angreift oder angreifend gedacht werden kann, den Kraftpunkt, und den Punkt, in welchem die Laſt (P_1 und P_2) unmittelbar wirkt, den Laſtpunkt, und erhält in

$$\frac{s_1}{s} P_1$$

die auf den Kraftpunkt reducirte Nutz-, ſowie in

$$\frac{s_2}{s} P_2$$

die ebendahin reducirte Nebenlaſt; es iſt alſo die Kraft gleich der Summe aus der auf den Kraftpunkt reducirten Nutz- und der ebendahin reducirten Nebenlaſt. Auch folgt

$$P_1 = \frac{s}{s_1} P - \frac{s_2}{s_1} P_2,$$

d. i. die Nutzlaſt iſt die Differenz von der auf den Laſtpunkt reducirten Kraft und von der ebendahin reducirten Nebenlaſt.

Hiernach läßt ſich auch der Wirkungsgrad einer Maſchine:

$$\eta = \frac{P_1 s_1}{P s} = \frac{s_1}{s} P_1 : P = P_1 : \frac{s}{s_1} P,$$

d. i. dem Quotienten aus der auf den Kraftpunkt reducirten Nutzlaſt und der Kraft, oder dem Quotienten aus der Nutzlaſt und der auf den Laſtpunkt reducirten Kraft gleichſetzen.

Die meiſten Maſchinen ſind Zuſammenſetzungen von Radwellen (ſ. Bd. I, §. 165), weswegen ſich dieſe Reductionen oft mit Hülfe der Hebelarme vollziehen laſſen. Iſt bei der Radwelle ABC, Fig. 211, der Radhalbmeſſer $CA = a$, der Wellenhalbmeſſer $CB = b$, ſo hat man das ſtatiſche Moment der Kraft P:

Fig. 211.

$$= Pa,$$

und das der Nutzlaſt P_1:

$$= P_1 b;$$

daher die auf den Kraftpunkt A reducirte Nutzlaſt:

$$= \frac{P_1 b}{a} = \frac{b}{a} P_1,$$

und die auf den Laſtpunkt B reducirte Kraft:

$$= \frac{Pa}{b} = \frac{a}{b} P.$$

Beſteht nun die Nebenlaſt P_2 nur in der Zapfenreibung $\varphi (P + P_1 + G)$, und iſt r der Halbmeſſer CD des Zapfens, ſo hat man das Moment derſelben:

$$= P_2 r,$$

und daher die auf den Kraftpunkt reducirte Nebenlaſt:

$$= \frac{P_2 r}{a} = \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G),$$

dagegen die auf den Laſtpunkt reducirte Nebenlaſt:

$$= \frac{P_2 r}{b} = \frac{\varphi r}{b} (P + P_1 + G).$$

Es iſt daher die Kraft:

$$P = \frac{b}{a} P_1 + \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G),$$

ſowie die Nutzlaſt:

$$P_1 = \frac{a}{b} P - \frac{\varphi r}{b} (P + P_1 + G),$$

endlich der Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta = \frac{b}{a} P_1 : P = P_1 : \frac{a}{b} P = \frac{P_1 b}{P a}.$$

Beispiel. Wenn bei einer 250 Pfund schweren Radwelle der Radhalbmesser 30 Zoll, der Wellenhalbmesser 6 Zoll, der Zapfenhalbmesser $\frac{1}{2}$ Zoll mißt, ferner die Nutzlast 500 Pfund beträgt, und der Coefficient der Zapfenreibung $\frac{1}{10}$ angenommen wird, so hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Nutzlast:

$$= \frac{b}{a} P_1 = {}^6/_{30} \cdot 500 = 100 \text{ Pfund},$$

die ebendahin reducirte Nebenlast:

$$= \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G) = {}^1/_{10} \cdot \frac{1}{2 \cdot 30} (750 + P) = {}^5/_4 + \frac{P}{600},$$

daher zu setzen die Kraft:

$$P = 100 + {}^5/_4 + \frac{P}{600},$$

d. i.

$$P = 101{,}25 \cdot {}^{600}/_{599} = 101{,}42 \text{ Pfund},$$

und den Wirkungsgrad dieser Maschine:

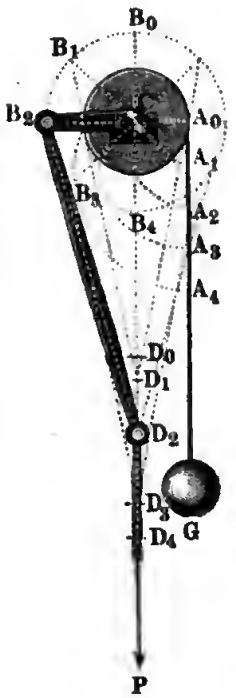
$$\eta = \frac{100}{101{,}42} = 0{,}986.$$

Beharrungszustand. Eine Maschine kommt, nachdem sie einmal in den Gang gesetzt worden ist, sehr bald in den Beharrungszustand, d. h. sie wiederholt periodenweise oder in gleichen Zeitabschnitten die nämlichen Verrichtungen. Deshalb betrachten wir denn auch die Maschinen in der Regel nur in ihrem Beharrungszustande. Bewegen sich sämmtliche Theile einer Maschine gleichförmig, so befindet sich dieselbe in einem gleichförmigen Beharrungszustande, bewegen sich dieselben aber innerhalb einer Periode ungleichförmig, so ist die Maschine in einem ungleichförmigen Beharrungszustande. Die Ursachen des letzten Zustandes sind: Veränderlichkeit der Kraft, der Last, oder der Masse der Maschine, ferner die durch die Zusammensetzung der Maschinentheile bedingte Veränderlichkeit des Verhältnisses zwischen den gleichzeitigen Wegen der Kraft und Last. Bei einer Dampfmaschine ist die Kraft veränderlich, wenn sie mit Expansion wirkt, wenn also der Dampfzufluß während der Kolbenbewegung aufgehoben wird, und bei einem Hammerwerke sind Kraft und Masse veränderlich, weil der Hammer während des Zurückfallens mit der Maschine außer Verbindung ist; beide Maschinen können daher nur einen ungleichförmigen Beharrungszustand annehmen; sind nun noch diese Maschinen mit einander verbunden, wird also das Hammerwerk durch die Expansionsdampfmaschine in Bewegung gesetzt, so ist dieser Zustand aus drei Ursachen zugleich ein ungleichförmiger. Wird ein Gewicht G, Fig. 212 (a. f. S.), mittels eines Rades CA_0 und §. 111.

einer Kurbel CB_2 durch eine Dampfmaschine mit constantem Dampfdrucke gehoben, so nimmt die Maschine ebenfalls einen ungleichförmigen Beharrungszustand an, weil, wenn man von dem Lastpunkte A_0 und dem Kraftpunkte D_0 ausgeht, gleichen Wegen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 der Last sehr ungleiche Wege D_0D_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 der Kraft entsprechen, das Wegeverhältniß während einer halben Umdrehung also ein veränderliches ist.

Bei einem gleichförmigen Beharrungszustande sind die trägen Massen der Maschine ohne Einfluß auf den Gang und die Wirkung der Maschine, weil sie nur anfangs, so lange noch ein Geschwindigkeitszuwachs statt hat, Arbeit in sich aufnehmen, später aber, bei unveränderlicher Geschwindigkeit, weder Arbeit aufnehmen noch ausgeben (s. Band I, §. 55). Befindet sich hingegen eine Maschine in einem ungleichförmigen Beharrungszustande, so haben die trägen Massen einen wesentlichen Einfluß auf den Gang der Maschine, weil sie beim Zunehmen an Geschwindigkeit Arbeit in sich aufnehmen und beim Abnehmen derselben wieder Arbeit ausgeben. Ist M die Summe aller auf den Kraft- oder Lastpunkt reducirten Massen der Maschine, v_1 die Minimal- und v_2 die Maximalgeschwindigkeit des Kraft- und Lastpunktes, so hat man die Arbeit, welche die trägen Massen in dem Theile der Periode, in welchem v_1 in v_2 übergeht, consumiren, und welche dieselben in dem Theile der Periode, in welchem v_2 wieder in v_1 sich umändert, wieder ausgeben,

Fig. 212.



$$= \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) M.$$

Es wird also hiernach durch die Trägheit der Massen in jeder Periode die Nebenleistung um diese Arbeit vergrößert und auch um so viel vermindert, und es ist daher die Totalleistung für die ganze Periode oder die mittlere Leistung überhaupt dieselbe, als wenn die trägen Massen nicht vorhanden wären; es gilt also die allgemeine Formel einer Maschine

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2$$

auch beim ungleichförmigen Gange, insofern man für s, s_1, s_2 die Wege einer vollständigen Periode, oder für P, P_1, P_2 die Mittelwerthe von Kraft, Nutz- und Nebenlast innerhalb einer Periode substituirt. Für den beschleunigten Bewegungszustand hat man:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) M,$$

daher:

$$v_2 - v_1 = \frac{Ps - (P_1 s_1 + P_2 s_2)}{\left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right) M}.$$

Dieſe Formel zeigt, daß die Geſchwindigkeitsveränderung einer Maſchine nicht allein um ſo kleiner ausfällt, je kleiner die Differenz zwiſchen der Arbeit der Kraft und der Summe der Arbeiten der Laſten iſt, ſondern auch je größer die Maſſen und Geſchwindigkeiten der Maſchinentheile ſind.

Anmerkung. Wenn hiernach die Maſſen nur auf den Bewegungszuſtand, nicht aber auf die Wirkung einer Maſchine Einfluß äußern, ſo folgt daraus noch nicht, daß es gleichgültig iſt, ob die Theile einer Maſchine mehr oder weniger Maſſe beſitzen. Veränderungen in Geſchwindigkeit vergrößern oft die Nebenhinderniſſe, wie z. B. die Reibung, veranlaſſen ſtörende Schwingungen und nicht ſelten Stöße, auch liefern manche Maſchinen beim ungleichförmigen Gange ein ſchlechteres Product u. ſ. w., weshalb es oft nöthig iſt, Mittel anzuwenden, um die Ungleichförmigkeit im Gange einer Maſchine zu vermindern. Wenn eine Maſchine oder ein Maſchinentheil abwechſelnd aus der Ruhe in Bewegung und aus der Bewegung in Ruhe übergehen muß, ſo iſt nicht ein gleichförmiger, ſondern ein ſolcher Bewegungszuſtand zu erzielen, daß die Geſchwindigkeit abwechſelnd von Null ſtetig bis zu einem gewiſſen Maximalwerthe zu-, und von dieſem wieder bis Null ſtetig abnimmt, da plötzliche Geſchwindigkeitsveränderungen Schwingungen und Stöße verurſachen, welche nicht allein mit Arbeitsverluſten (ſ. Band I, §. 335) verbunden ſind, ſondern auch ein ſtarkes Abführen der Maſchinen herbeiführen. Hierüber kann jedoch erſt in der Folge gehandelt werden.

Erſter Abſchnitt.

Von den bewegenden Kräften der Thiere, des Waſſers und des Windes, ſowie von den Maſchinen zur Aufnahme dieſer Kräfte.

Erſtes Capitel.

Von dem Meſſen der bewegenden Kräfte und ihrer Wirkungen.

§. 112 **Dynamometer.** Um die Wirkungen der Kräfte und Maſchinen angeben zu können, hat man drei Elemente nöthig, nämlich die Größe der Kraft, die Größe ihres Weges und die entſprechende Zeit der Wirkung. Zum Ausmeſſen der Kräfte dienen Kraftmeſſer oder Dynamometer, zu dem Ausmeſſen von Wegen gebraucht man Meßſtäbe, Ketten und Meßbänder, und zur Angabe der Zeit werden Pendel und Uhren angewendet. Iſt P die Größe der durch das Dynamometer angegebenen Kraft, und s der Weg, längs deſſen dieſelbe während einer gewiſſen Zeit t wirkt, ſo hat man die Leiſtung oder mechaniſche Arbeit dieſer Kraft auf dieſe Zeit, $= Ps$ und daher die Leiſtung pr. Secunde:

$$L = \frac{Ps}{t}.$$

Hier möge nur von den Dynamometern (franz. dynamomètres; engl. dynamometers) die Rede ſein. Dieſelben ſind entweder Gewichts-, oder Feder-, oder Bremsdynamometer. Gewichts- und Federdynamometer ſind von den Gewichts- und Federwagen nicht weſentlich verſchieden; während letztere vorzüglich nur zum Abwägen oder Meſſen der Gewichte der Körper dienen, wendet man erſtere zum Meſſen der Kräfte überhaupt an. Bremsdynamometer kommen nur beim Ausmeſſen der Kraft einer umlaufenden Welle in Anwendung.

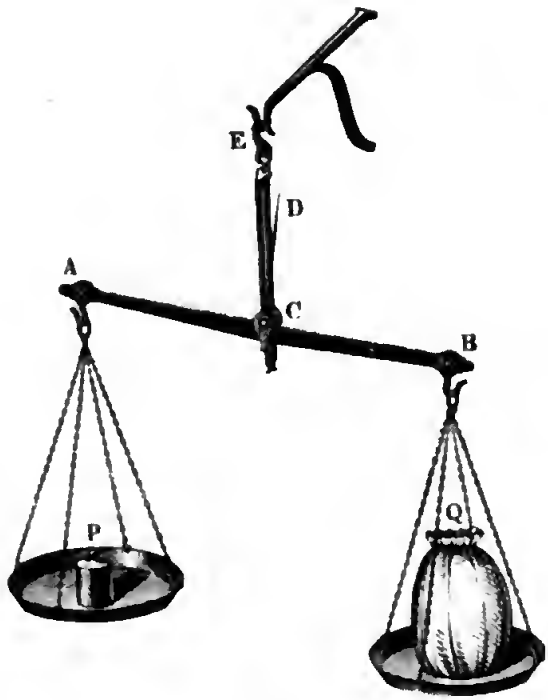
Die Gewichtsdynamometer oder Gewichtswagen ſind ein- oder mehrfache Hebel, an welchen die zu meſſende Kraft oder die abzuwägende Laſt mit bekannten Gewichten ins Gleichgewicht geſetzt wird; die Federdynamometer

ſind Stahlfedern, welche die Größe der auf ſie wirkenden Kräfte durch die bewirkte Formveränderung mit Hülfe von Zeigern angeben.

Die Gewichtswagen ſind entweder gleicharmige oder ungleicharmige, letztere wieder entweder einfache oder zuſammengeſetzte Wagen, je nachdem ſie aus einem gleicharmigen oder aus einem oder mehreren ungleicharmigen Hebeln beſtehen.

Die gleicharmige Wage. Die gemeine oder gleicharmige Gewichtswage (franz. balance ordinaire; engl. common balance) iſt im Weſentlichen ein gleicharmiger Hebel AB, Fig. 213, an welchem die abzuwägende Laſt Q mit einem gleich großen Gewichte P ins Gleichgewicht geſetzt wird. Man unterſcheidet an ihr den Wagebalken AB (franz. fléau; engl. beam), die Zunge CD (franz. aiguille, languette; engl. tongue), die Scheere CE (franz. und engl. chape), die durch ein dreiſeitiges Prisma gebildete Axe C (franz. axe; engl. axis) und die mittels Schnüre, Ketten u. ſ. w. aufgehängten, zur Aufnahme der Gewichte beſtimmten Wagſchalen (franz. bassins; engl. scales). §. 113

Fig. 213.



Von einer ſolchen Wage fordert man, daß ſie, und zwar nur dann einſpiele, d. h. der Wagebalken eine horizontale, alſo die Zunge eine verticale Lage annehme, oder mit der Richtung der Scheere zuſammenfalle, wenn das beſtimmte Gewicht in der einen Wagſchale ſo groß iſt als das Gewicht des Körpers in der anderen. Außerdem ſoll eine Wage auch noch Empfindlichkeit und Stabilität beſitzen, d. h. ſie ſoll eine Neigung annehmen, wenn auf der einen Seite der vorher im Einſpielen befindlichen Wage ein kleines Gewicht zugelegt wird, und ſoll in den horizontalen Stand zurückkehren, wenn die Gleichheit der Gewichte wieder hergeſtellt oder die Zulage wieder weggenommen wird.

Damit eine Wage bei gleichen Auflagen zu beiden Seiten einſpiele, müſſen die Hebelarme derſelben vollkommen gleich ſein. Iſt a die Länge

des einen, b die des anderen Armes, P das Gewicht an dem einen und Q das Gewicht an dem anderen Arme, ſo hat man beim Einſpielen

$$Pa = Qb;$$

vertauſcht man aber die Gewichte, bringt man P an den anderen Arm und Q an den erſten, ſo hat man auch:

$$Pb = Qa,$$

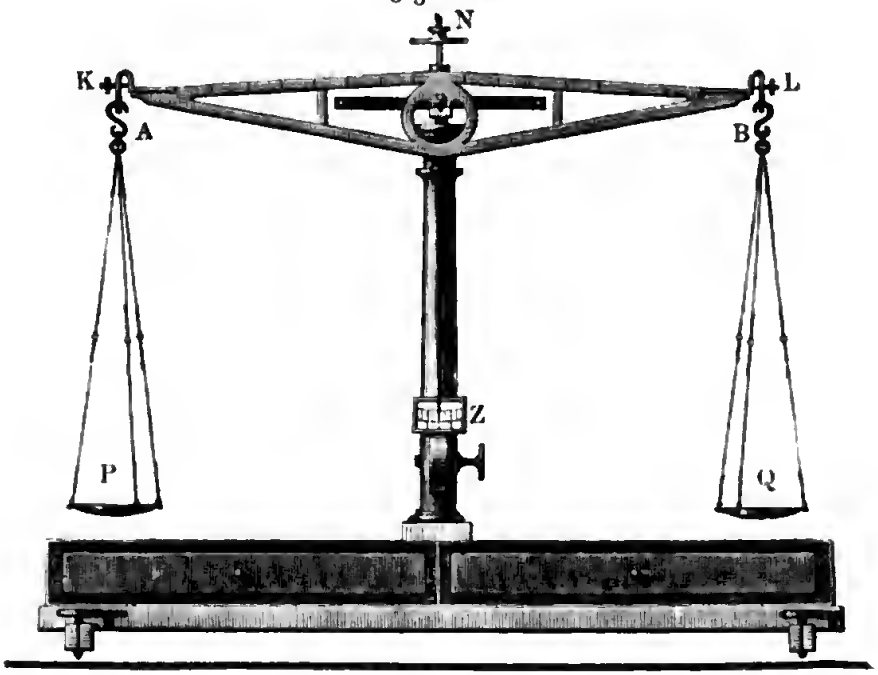
falls hierbei wieder ein Einſpielen ſtatt hat. Aus beiden Gleichungen folgt

$$P^2 . ab = Q^2 . ab,$$

d. i. $P = Q$ und ebenſo auch $a = b$.

Wenn alſo durch das Vertauſchen der Gewichte das Gleichgewicht nicht geſtört wird, ſo iſt dies ein Beweis von der Richtigkeit der Wage. Dieſe Prüfung läßt ſich aber auch auf folgende Weiſe bewerkſtelligen. Bringt man hinter einander zwei Gewichte P und P mit einem dritten Q in der zweiten Wagſchale ins Gleichgewicht, ſo ſind dieſelben unter ſich, wenn auch nicht mit dieſem dritten gleich; legt man daher nach Wegnahme dieſes dritten Gewichtes die beiden erſten auf, ſo hat man für den Gleichgewichtszuſtand $Pa = Pb$, und alſo auch $a = b$. Es liefert alſo hier das Einſpielen der Wage beim Auflegen von zwei gleichen Gewichten den Beweis

Fig. 214.



der Richtigkeit der Wage unmittelbar. Kleine Unrichtigkeiten kann man durch angeſchraubte Gegengewichtchen K, L beſeitigen, wie die feinere Wage Fig. 214 vor Augen führt.

Giebt eine Wage für einen und denſelben Körper die Gewichte P und

Q an, je nachdem man denſelben in der einen oder in der anderen Wagſchale wiegt, ſo hat man für den wahren Werth X des Gewichtes:

$$Xa = Pb \quad \text{und} \quad Xb = Qa,$$

daher:

$$X^2 \,.\, ab = PQ \,.\, ab,$$

alſo:

$$X^2 = PQ \quad \text{und} \quad X = \sqrt{PQ}.$$

Es iſt alſo das geometriſche Mittel aus beiden Angaben das wahre Gewicht des Körpers.

Auch läßt ſich

$$X = \sqrt{P\,(P + Q - P)} = P\sqrt{1 + \frac{Q - P}{P}},$$

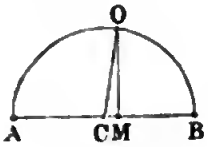
annähernd

$$X = P\left(1 + \frac{Q - P}{2P}\right) = \frac{P + Q}{2}$$

ſetzen, wenn, wie gewöhnlich, die Abweichung $Q - P$ nicht groß iſt; man kann alſo auch einfacher das arithmetiſche Mittel aus beiden Angaben als das wahre Gewicht des Körpers anſehen.

Beſchreibt man über der Summe AB von $\overline{AM} = P$ und $\overline{BM} = Q$ einen Halbkreis AOB, Fig. 215, ſo repräſentirt in demſelben der Halbmeſſer $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CO}$ den Näherungswerth $\frac{P + Q}{2}$, dagegen die Ordinate $\overline{MO}$ den genauen Werth $\sqrt{PQ}$ von X.

Fig. 215.

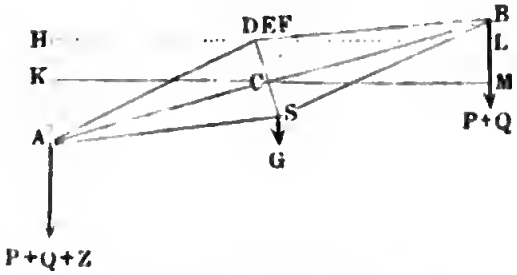


Bringt man die abzuwiegende Laſt erſt durch Hülfsgewichte, wie Sand, Schrot u. ſ. w., auf der Wage ins Gleichgewicht, und erſetzt ſie nachher durch gewöhnliche Gewichte, ſo geben dieſe ebenfalls die wahre Größe der Laſt an.

Empfindlichkeit der Wage. Damit die Wage ſich möglichſt frei §. 114
bewege, und namentlich durch die Axenreibung nicht aufgehalten werde, giebt man ihr eine dreiſeitige Stahlaxe und läßt dieſe noch auf harten Metall- oder Steinlagern ruhen. Damit ferner die Richtung der Mittelkraft der belaſteten oder unbelaſteten Wagſchale durch den Aufhängepunkt gehe und die Reibung eine Abweichung hiervon nicht hervorbringe, alſo der Hebelarm der Schale unveränderlich bleibe, iſt es nöthig, die Schalen ebenfalls an ſchneidigen Axen aufzuhängen. Wie nun auch eine ſolche Wage belaſtet iſt, immer läßt ſich annehmen, daß die angehängten und aufgelegten Gewichte in den Aufhängepunkten ſelbſt angreifen, und ebenſo der Angriffspunkt der Mittelkraft in der die beiden Aufhängepunkte verbindenden Linie liege. Da nach

Band I, §. 131 ein aufgehangener Körper nur dann Stabilität beſitzt, wenn ſein Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkte liegt, ſo folgt ſogleich, daß die Drehaxe D, Fig. 216, einer Wage ſtets über den Schwerpunkt S des leeren Wagebalkens, und auch nicht unter die Linie AB durch die Aufhängepunkte zu legen iſt. Der Allgemeinheit wegen wollen wir daher in Folgendem die Axe D über, und den Schwerpunkt S unter AB liegend annehmen.

Fig. 216.



Der Ausſchlag oder die Abweichung des Wagebalkens von der Horizontalen beſtimmt die Empfindlichkeit einer Wage; es iſt daher ſeine Abhängigkeit von der Zulage oder Differenz der Gewichte in beiden Wagſchalen kennen zu lernen. Setzen wir in dieſer Abſicht die Armlänge $CA = CB$ des Wagebalkens, $= l$, den Abſtand CD des Drehpunktes von der Linie AB durch die Aufhängepunkte, $= a$, den Abſtand SD des Schwerpunktes vom Drehpunkte, $= s$, ſetzen wir ferner den Ausſchlagswinkel, $= \varphi$, das Gewicht des leeren Wagebalkens, $= G$, das Gewicht auf der einen Seite, $= P$ und das auf der anderen, $= P + Z$, alſo die Zulage $= Z$, und endlich noch das Gewicht einer Wagſchale ſammt Aufhängeketten und Haken, $= Q$, ſo haben wir das ſtatiſche Moment auf der einen Seite der Wage:

$$(P + Q + Z) \cdot \overline{DH} = (P + Q + Z)(\overline{CK} - \overline{DE})$$
$$= (P + Q + Z)(l \cos.\varphi - a \sin.\varphi),$$

und das auf der anderen Seite:

$$(P + Q) \cdot \overline{DL} + G \cdot \overline{DF} = (P + Q)(\overline{CM} + \overline{DE}) + G \cdot \overline{DF}$$
$$= (P + Q)(l \cos.\varphi + a \sin.\varphi) + Gs \sin.\varphi;$$

es iſt daher für den Gleichgewichtszuſtand:

$$(P + Q + Z)(l \cos \varphi - a \sin.\varphi)$$
$$= (P + Q)(l \cos.\varphi + a \sin.\varphi) + Gs \sin.\varphi,$$

oder, wenn man $tang.\varphi$ einführt und transformirt:

$$([2(P + Q) + Z]a + Gs)\, tang.\varphi = Zl,$$

alſo die Tangente des geſuchten Ausſchlagwinkels:

$$tang.\varphi = \frac{Zl}{[2(P + Q) + Z]a + Gs}.$$

Dieſer Ausdruck ſagt uns, daß der Ausſchlag, und alſo auch die Empfindlichkeit, mit der Länge des Wagebalkens, ſowie mit der Zulage gleichmäßig wächſt, daß dagegen die Empfindlichkeit abnimmt, wenn die Gewichte P, Q,

G, Z und die Abſtände a und s größer werden. Es iſt daher eine ſchwere Wage weniger empfindlich als eine leichte unter übrigens gleichen Umſtänden, und es nimmt auch die Empfindlichkeit immer mehr und mehr ab, je größer die abzuwiegenden Gewichte ſind. Um endlich die Empfindlichkeit einer Wage zu erhöhen, ſoll man die Aufhängelinie AB und den Schwerpunkt des Wagebalkens dem Drehungspunkte D nahe bringen.

Wäre a und s = Null, fiele alſo D und S in AB, ſo hätte man:

$$tang.\,\varphi = \frac{Zl}{o} = \infty, \text{ alſo } \varphi = 90^0;$$

es würde alſo die geringſte Zulage eine Drehung des Wagebalkens um 90^0 bewirken. Auch wäre in dieſem Falle für $Z = 0$, $tang.\,\varphi = \frac{0}{0}$, d. h. es könnte die Wage bei jeder Lage in Ruhe bleiben, wenn gleiche Gewichte aufgelegt wären, es beſäße alſo die Wage ein indifferentes Gleichgewicht und wäre deshalb unbrauchbar. Macht man bloß $a = 0$, legt man alſo den Drehpunkt in die Linie AB durch die Aufhängepunkte, ſo hat man:

$$tang.\,\varphi = \frac{Zl}{Gs},$$

es iſt alſo in dieſem Falle die Empfindlichkeit gar nicht von den angehängten und aufgelegten Gewichten abhängig, daher die Wage beſonders brauchbar. Man kann durch ein angeſchraubtes Gegengewicht N, wie Fig. 214 vor Augen führt, die Empfindlichkeit reguliren.

Stabilität und Schwingungen einer Wage. Die Stabilität §. 115
oder das ſtatiſche Moment S, mit welchem eine gleichbelaſtete Wage in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, wenn ſie vorher einen Ausſchlag φ hatte, iſt beſtimmt durch die Formel:

$$S = 2(P+Q)\overline{DE} + G.\overline{DF} = [2(P+Q)a + Gs]\,sin.\,\varphi.$$

Es wächſt alſo das Maß $[2(P+Q)a + Gs]$ der Stabilität mit den Gewichten P, Q und G und mit den Abſtänden a und s, iſt aber von der Länge des Wagebalkens unabhängig.

Eine ſchwingende Wage läßt ſich mit einem Pendel vergleichen, und deren Schwingungsdauer auch nach der Theorie des letzteren berechnen. Es iſt

$$2(P+Q)a$$

das ſtatiſche und

$$2(P+Q).\overline{AD^2} = 2(P+Q)(l^2+a^2)$$

das Trägheitsmoment der belaſteten Wagſchalen, ferner Gs das ſtatiſche Moment des leeren Wagebalkens; ſetzt man noch das Trägheitsmoment deſſelben $= Gk^2$, ſo hat man die Länge des mathematiſchen Pendels, welches mit der Wage iſochron ſchwingt (ſ. Band I, §. 327):

$$r = \frac{2\,(P + Q)\,(l^2 + a^2) + G k^2}{2\,(P + Q)\,a + G s},$$

und daher die Schwingungszeit der Wage:

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,(P + Q)\,(l^2 + a^2) + G k^2}{g\,[2\,(P + Q)\,a + G s]}};$$

wofür man, wenn a ſehr klein oder gar Null iſt, ſetzen kann:

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,(P + Q)\,l^2 + G k^2}{g\,G\,s}}.$$

Man erſieht hieraus, daß die Schwingungsdauer wächſt, je größer P, Q und l, je kleiner aber a und s iſt. Bei gleichen Gewichten ſchwingt hiernach auch eine Wage um ſo langſamer, je empfindlicher ſie iſt. Es iſt alſo das Abwägen an empfindlichen Wagen aufhaltiger als bei weniger ſcharfen Wagen. Aus dieſem Grunde iſt es denn auch nützlich, empfindliche Wagen mit Scalen (wie bei Z, Fig. 214) zu verſehen. Um die Angaben dieſer Scalen beurtheilen zu können, ſetzen wir in dem Nenner der Formel

$$tang.\,\varphi = \frac{Z l}{[2\,(P + Q) + Z]\,a + G s}, \quad Z = 0,$$

und ſchreiben φ ſtatt $tang.\,\varphi$, ſo daß wir

$$\varphi = \frac{Z l}{2\,(P + Q)\,a + G s}$$

erhalten. Führen wir dann ſtatt Z, Z_1 und ſtatt φ, φ_1 ein, ſo erhalten wir:

$$\varphi_1 = \frac{Z_1 l}{2\,(P + Q)\,a + G s},$$

daher:

$$\varphi : \varphi_1 = Z : Z_1.$$

Bei kleinen Zulagen verhalten ſich alſo die Ausſchlagwinkel wie die Zulagen ſelbſt. Es iſt hiernach auch:

$$\varphi : \varphi_1 - \varphi = Z : Z_1 - Z;$$

und daher:

$$Z = \frac{\varphi}{\varphi_1 - \varphi}\,(Z_1 - Z).$$

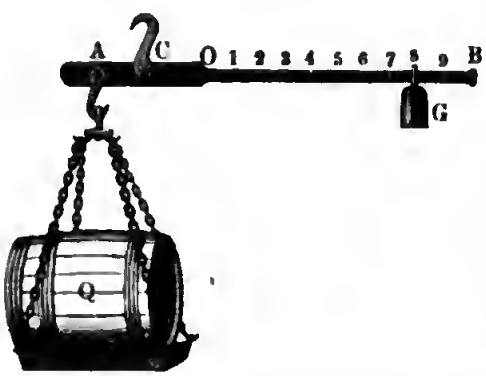
Man findet alſo die einem Ausſchlage φ entſprechende Zulage, indem man zuſieht, wie viel der Ausſchlag vergrößert wird, wenn man die Zulage um ein beſtimmtes Gewicht vergrößert, und nun dieſe Vergrößerung $(Z_1 - Z)$ durch das Verhältniß des erſten Ausſchlages zur nachherigen Vergrößerung deſſelben multiplicirt.

Anmerkung. Die gleicharmigen Wagen kommen in ſehr verſchiedenen Größen und in ſehr verſchiedenen Graden der Güte vor. Die gewöhnlichſte Wage iſt die im Handel vorkommende Krämerwage, wie ſie Fig. 211 vor Augen

führt; am feinsten sind aber die Probir- und solche Wagen, welche zu physikalischen und chemischen Zwecken bestimmt sind, wie deren eine in Fig. 212 abgebildet ist. An ihnen wiegt man höchstens 1 Pfund schwere Gegenstände ab, und sie geben gleichwohl noch $1/50$ Gran oder $1/3000$ Quentchen, also $1/384000$ von einem Pfunde oder von dem größten Gewichte an. Die feinsten Wagen zeigen sogar noch den millionten Theil der Last an, doch wiegt man damit nur höchstens wenige Lothe schwere Gegenstände ab. Wenn man den Wagbalken eine Eintheilung giebt, und an denselben ein feines Drahthäkchen hängt, so kann man durch Verschiebung desselben auch ohne ganz feine Gewichte die Schärfe in der Angabe einer guten Wage vergrößern. Uebrigens lassen sich auch große Wagen, womit man centnerschwere Gegenstände abwiegt, in sehr hohem Grade empfindlich construiren, namentlich wenn man dieselben leicht, ihre Balken aus Holz u. s. w. verfertigt. S. Lardner's und Kater's Lehrbuch der Mechanik.

Ungleicharmige Wagen. Der ungleicharmigen Gewichtswagen (Schnellwagen) giebt es dreierlei, nämlich die Schnellwage mit Laufgewicht, die Schnellwage mit verjüngtem Gewichte und die Schnellwage mit festem Gewichte. Die Schnellwage mit Laufgewicht (franz. balance romaine; engl. steel-yard), Fig. 217, ist ein ungleicharmiger Hebel AB, an dessen kürzerem Arme CA eine Schale und an dessen längerem eingetheilten Arme CB ein verschiebbares Gewicht (Laufgewicht) hängt, welches mit dem in der Schale liegenden Körper Q ins Gleichgewicht gesetzt wird. Ist l_0 der Hebelarm CO des Laufgewichtes G, wenn dasselbe die leere Wage zum Einspielen bringt, so hat man das statische Moment, mit welchem die leere Wagschale niederzieht: §. 116

Fig 217.



$$X_0 = G l_0.$$

Ist dagegen l_n der Hebelarm CG, wenn das Laufgewicht G der belasteten Wage das Gleichgewicht hält, so hat man für deren statisches Moment:

$$X_n = G l_n;$$

und es folgt daher durch Subtraction, das Moment der aufgelegten Last Q:

$$X_n - X_0 = G (l_n - l_0) = G . \overline{OG}.$$

Bezeichnet nun noch a den Hebelarm CA der Last und x die Entfernung OG des Laufgewichtes von dem Punkte O, wo dasselbe die leere Wage zum Einspielen bringt, so hat man:

$$Q . a = G . x,$$

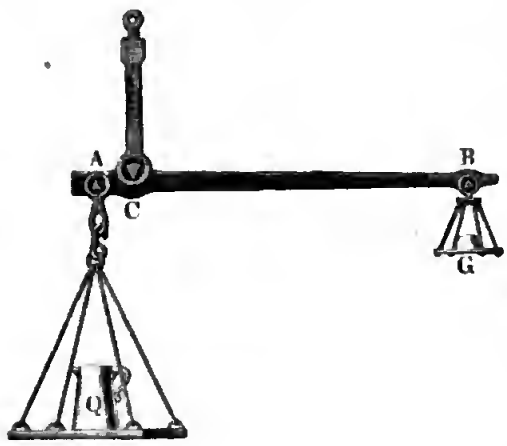
daher die Laſt ſelbſt:

$$Q = \frac{G}{a} \cdot x.$$

Es iſt alſo die Laſt oder das Gewicht Q der aufgelegten Waare der Entfernung x oder dem Wege des Laufgewichtes vom Punkte O aus, proportional. Dem doppelten x entſpricht ein doppeltes Q, dem dreifachen x ein dreifaches Q u. ſ. w.; es iſt daher die Scala OB eine gleichtheilige und ihr Anfang im Punkte O. Die Einheit der nöthigen Eintheilung ergiebt ſich, wenn man zuſieht, welches Gewicht Q_n aufzulegen iſt, um dem am Ende B niederziehenden Laufgewichte G das Gleichgewicht zu halten; es iſt dann Q_n die Anzahl der Theile und daher $\frac{OB}{Q_n}$ die Einheit der Eintheilung oder Scala OB. Iſt z. B. das Laufgewicht auf B, wenn die Laſt $Q = 100$ Pfund beträgt, ſo hat man OB in 100 gleiche Theile zu theilen, und daher die Einheit der Scala $= \frac{OB}{100}$. Hat man bei einer anderen Laſt Q das Gewicht auf $x = 80$ ſtellen müſſen, um die Wage zum Einſpielen zu bringen, ſo iſt auch $Q = 80$ Pfund; ſteht ebenſo das Laufgewicht auf 53, ſo iſt die Laſt Q, 53 Pfund ſchwer u. ſ. w.

Bei der Schnellwage mit verjüngtem Gewichte, Fig. 218, hängt die Laſt an einem kurzen Arme $CA = a$, und das Gewicht an einem langen Arme $CB = b$. Das Verhältniß $\frac{CB}{CA} = \frac{b}{a}$ der Armlängen iſt gewöhnlich ein ſehr einfaches, z. B. $^{10}/_{1}$, in welchem Falle die Wage eine Decimalwage heißt. Hat man die leere Wage durch ein beſonderes, übrigens nicht in Betracht zu ziehendes Gewicht (Tarirgewicht) zum Einſpielen gebracht, ſo iſt für das Gewicht Q des aufgelegten Gegenſtandes:

Fig. 218.



$$Q\,a = G\,b,$$

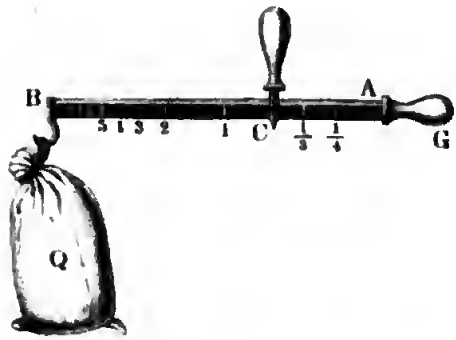
daher:

$$Q = \frac{b}{a}\,G.$$

Es wird alſo das Gewicht der Waare gefunden, wenn man das verjüngte Gewicht mit einer unveränderlichen Zahl, z. B. bei der Decimalwage, mit 10, multiplicirt, oder das letztere $\frac{b}{a}$mal, z. B. zehnmal ſo ſchwer ſetzt, als es wirklich iſt.

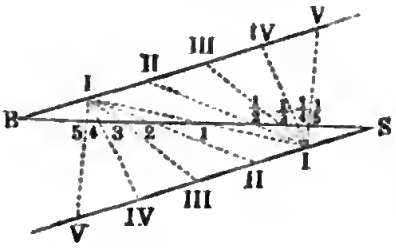
Die Schnellwage mit feſtem Gewichte (däniſche Wage, Fig. 219, hat eine veränderliche Drehaxe C, welche mit einer Handhabe feſtgehalten wird, während man den Wagebalken über ſie wegſchiebt und das Gleichgewicht zwiſchen der angehängten Laſt Q und dem feſten Knopfe G am anderen Ende herzuſtellen ſucht. Ihre Eintheilung iſt eine ungleichtheilige, wie in der Anmerkung gezeigt wird.

Fig. 219.



Anmerkung. Um die Eintheilung der Däniſchen Wage, Fig. 220, zu finden, ziehe man durch den Schwerpunkt S und durch den Aufhängepunkt B derſelben zwei Parallellinien, trage auf dieſe, von S und B aus, gleiche Theile auf, und ziehe von dem erſten Theilpunkte (I) der einen Parallellinie aus nach den Theilpunkten I, II, III u. ſ. w. der anderen Parallellinien gerade Linien; dieſe Verbindungslinien ſchneiden die Arenlinie BS des Wagebalkens in den geſuchten Theilpunkten. Der Theilpunkt (1) in der Linie I÷I liegt in der Mitte zwiſchen B und S, bei Unterſtützung deſſelben iſt daher im Gleichgewichtszuſtande das Gewicht Q der Waare dem Gewichte G der ganzen Wage gleich; der Theilpunkt (2) in der Linie I÷II ſteht von S noch einmal ſo weit ab als von B; bei Unterſtützung deſſelben iſt daher im Zuſtande des Gleichgewichtes, $Q = 2\,G$, ebenſo der Theilpunkt (3) in der Linie I÷III ſteht von S dreimal ſo viel ab als von B; es iſt daher derſelbe zu unterſtützen, wenn $Q = 3\,G$ beträgt u. ſ. w. Ebenſo läßt ſich leicht einſehen, daß bei Unterſtützung der Theilpunkte $1/2$, $1/3$ u. ſ. w. im Gleichgewichtszuſtande die Laſt Q, $1/2\,G$, $1/3\,G$ u. ſ. w. iſt. Man erſieht hieraus, daß die Theilpunkte für größere Laſten näher und für kleinere weiter von einander abſtehen, daß alſo auch dieſe Wage einen ſehr veränderlichen Grad von Empfindlichkeit beſitzt.

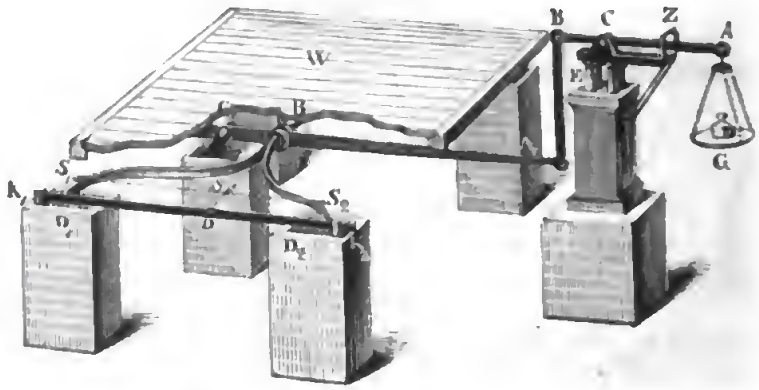
Fig. 220



Brückenwagen. Zuſammengeſetzte Gewichtswagen beſtehen §. 117
aus zwei, drei oder noch mehr Hebeln oder Wagebalken. Es gehören hierher die Brücken-, Straßen- und Mauthwagen, die Tafelwagen u. ſ. w. Sie dienen meiſt zum Abwiegen größerer Körper und ſind deshalb in der Regel verjüngte Wagen. Die Wagſchale für die Laſt wird hier durch eine große Tafel (Brücke) erſetzt, und es iſt dieſelbe ſo zu unterſtützen und mit den Hebeln zu verbinden, daß das Auf- und Abnehmen des abzuwiegenden Körpers die größte Bequemlichkeit gewährt, und die Angabe der Wage von der Stellung und dem Orte des Körpers auf der Brücke nicht abhängt.

Eine vorzügliche Brückenwage (franz. balance à bascule; engl. weighbridge) iſt die in Fig. 221 abgebildete Wage von Schwilgue in Straß-

Fig. 221.



burg. Die Brückenwage beſteht aus einem doppelarmigen Hebel ACB, aus einem einfachen einarmigen Hebel $A_1 B_1 C_1$ und aus zwei gabelförmigen einarmigen Hebeln $B_1 S_1 D S_2$ u. ſ. w. Die Drehaxen dieſer Hebel ſind C, C_1 und D_1, D_2. Die Brücke W iſt nur zum Theil abgebildet, und von den beiden gabelförmigen Hebeln iſt nur der eine ſichtbar. Für gewöhnlich ruht die Brücke auf den vier Bolzen K_1, K_2 u. ſ. w., während des Abwiegens aber wird dieſelbe durch die vier Schneiden S_1, S_2 u. ſ. w., welche auf den gabelförmigen Hebeln ſitzen, unterſtützt. Um dies zu können, iſt das Geſtell E der Wage AB beweglich und durch eine Kurbel mittels gezahnter Räder u. ſ. w. (hier nicht ſichtbar) auf und nieder ſtellbar. Das Geſchäft des Abwägens beſteht in dem Auflegen der Laſt (Auffahren des Laſtwagens), in dem Emporheben des Geſtelles EC, in dem Auflegen von Gewichten in die Wagſchale G und, nach bewirktem Einſpielen der Wage, in dem Wiederniederlaſſen des Geſtelles und der Brücke.

Gewöhnlich iſt das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = 2$,

das Hebelarmverhältniß $\frac{C_1 A_1}{C_1 B_1} \ldots\ldots = 5$,

und das Armverhältniß $\frac{DB_1}{DS} \ldots\ldots = 10$;

iſt demnach die leere Wage tarirt, ſo hat man die Kraft in B oder A_1:

$= 2$ mal Gewicht G in der Wagſchale;

die Kraft in B_1:

$= 5$ mal Kraft in $A_1 = 2 . 5 = 10$ mal Gewicht G,

und endlich die Kraft in S:

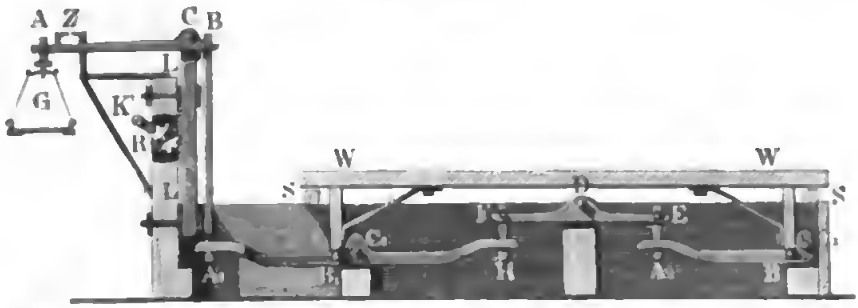
$= 10$ mal Kraft in $B_1 = 10 . 10 = 100$ mal Gewicht G;

es iſt alſo beim Einſpielen die aufgelegte Laſt 100 mal ſo groß als das

aufgelegte Gewicht G; und die Wage eine Centeſimal- oder 100fach verjüngende Wage.

Eine andere, von W. Becker in Straßburg conſtruirte Brückenwage iſt in Fig. 222 abgebildet. Die Brücke W dieſer Wage ruht mittels vier Säulen in B_1, B_2 u. ſ. w. auf den gabelförmigen einarmigen Hebeln $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, von denen der letztere durch einen gleicharmigen Hebel DEF mit einer Verlängerung $C_1 H$ des erſteren verbunden iſt. Vor dem

Fig. 222.



Abwägen ruht die Brücke auf den Lagern S, S, wenn aber die Laſt aufliegt, wird das Geſtelle LL der Wage AB, ſowie auch das ganze Hebelſyſtem mittels einer Kurbel K, eines gezahnten Rades R u. ſ. w. emporgehoben, und nun ſo viel Gewicht G in die Wagſchale gelegt, als zum Aequilibriren nöthig iſt. Wo und wie auch die Laſt Q auf der Brücke W aufruhe, immer iſt die Summe der Kräfte in B_1, B_2 u. ſ. w. der Laſt gleich. Nun iſt aber das Verhältniß $\frac{C_2 A_2}{C_2 B_2}$ der Armlängen dem Verhältniſſe $\frac{C_1 A_1}{C_1 B_1} = \frac{a_1}{b_1}$ gleich, auch die Armlänge $DE =$ der Armlänge DF, ſowie $C_1 H = C_1 A_1$; es kommt daher auf Eins hinaus, ob ein Theil der Laſt Q von B_2 oder unmittelbar von B_1 aufgenommen werde, oder die Gleichgewichtsverhältniſſe des Hebels $C_1 B_1 A_1$ ſind dieſelben, ob die ganze Laſt Q in B_1 unmittelbar, oder nur ein Theil in B_1, der andere Theil aber in B_2 aufruhe und erſt mittels der Hebel $C_2 B_2 A_2$, EDF und $C_1 H$ auf $C_1 B_1 A_1$ wirke. Iſt nun noch $\frac{a}{b}$ das Armverhältniß $\frac{CA}{CB}$ der oberen Wage ACB, ſo hat man die Kraft in der Zugſtange BA_1:

$$Z = \frac{a}{b} \cdot G,$$

und daher die Größe der Belaſtung der vorher tarirten Brücke:

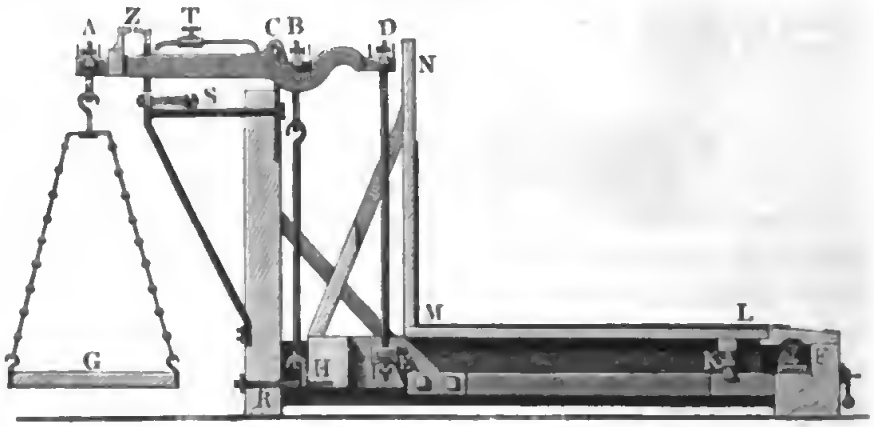
$$Q = \frac{a_1}{b_1} Z = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a}{b} G.$$

Gewöhnlich iſt $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = {}^{10}/_{1}$, daher $Q = 100\,G$, und die Wage eine Centeſimalwage.

Anmerkung. Die Straßen- oder Mauthwagen erfordern nur ſchmale Brücken, wenn man die Laſtwagen erſt mit den Vorder- und dann mit den Hinterrädern auffährt. Das Gewicht des ganzen Wagens iſt hier die Summe der Abwägungsreſultate, wie auch die Laſt auf die beiden Radaren vertheilt ſei.

§. 118 **Tragbare Brückenwagen.** In techniſchen Werkſtätten, Fabriken und Manufacturen findet man die in ſehr verſchiedenen Größen ausgeführten tragbaren Brückenwagen von Quintenz angewendet. Eine ſolche, in Fig. 223 abgebildete Wage beſteht aus drei Hebeln ACD, EF und HK. An dem erſten Hebel hängen die Wagſchale G für die Beſtimmungsgewichte

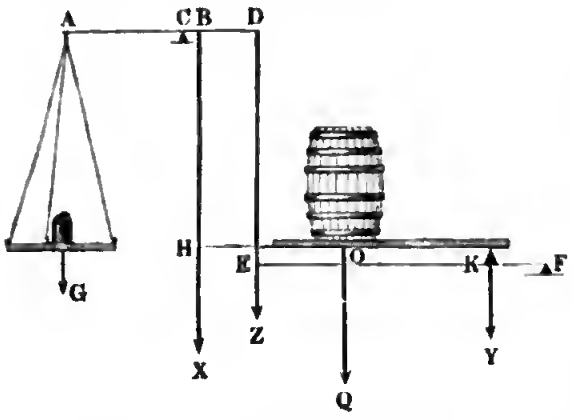
Fig. 223.



und noch zwei Stangen DE und BH herab; die Stange DE trägt den um den feſten Punkt F drehbaren Hebel EKF, und die zweite Stange BH trägt den Hebel HK, deſſen Drehungsaxe K auf dem Hebel EF aufſitzt. Um den beiden letzten Hebeln eine ſichere Lage zu verſchaffen, ſind dieſelben gabelförmig geſtaltet, und die Drehaxen F und K derſelben durch je zwei Schneiden gebildet. Auf dem Hebel HK ſitzt die trapezoidale Brücke ML, welche zur Aufnahme der abzuwiegenden Laſt beſtimmt und noch mit einer Rückwand MN verſehen iſt, um die verletzlichen Theile der Wage vor Beſchädigung zu ſchützen. Vor und nach dem Abwägen ruht der durch einen Rahmen gebildete Hebel auf drei Stiften, wovon in der Durchſchnittszeichnung nur der eine (R) ſichtbar iſt, der Wagebalken AD aber wird durch eine mit einer Handhabe ausgerüſtete hebelförmige Arretirung S unterſtützt. Hat man die Waare aufgelegt, ſo legt man die Arretirung nieder und ſetzt nun ſo viel Gewicht auf G, bis AD zum Einſpielen kommt. Nach dieſem wird die Arretirung wieder gehoben, ſo daß ſich HK wieder auf die drei Bolzen aufſetzt, und die Laſt, ohne die Wage zu beſchädigen, abgenommen werden kann. Den horizontalen Stand von AD erkennt man an dem Zeiger Z und die leere Wage tarirt man durch ein verſchiebbares Gewicht T oder durch eine beſondere Zulage bei G.

Wie bei allen Wagen, ſo iſt es auch bei dieſer Brückenwage nöthig, daß ihre Angabe nicht von der Lage und der Stellung des abzuwiegenden Körpers auf der Brücke abhänge; damit aber dieſer Bedingung Genüge geleiſtet werde, iſt es erforderlich, daß das Verhältniß $\frac{EF}{KF}$ der Arme des Hebels EKF, Fig. 224, gleich ſei dem Hebelarmverhältniß $\frac{CD}{CB}$ des Wagebalkens AD.

Fig. 224.



Ein Theil X der Laſt Q auf der Brücke wird durch die Zugſtange BH auf den Wagebalken AD übergetragen und wirkt an dieſem mit dem ſtatiſchen Momente $\overline{CB}.X$; ein anderer Theil Y hingegen geht bei K auf den Hebel EF über und wirkt in E mit der Kraft:

$$Z = \frac{KF}{EF} \cdot Y.$$

Nun geht wieder dieſe Kraft mittels der Stange DE in D auf den Wagebalken über; es wirkt daher der Theil Y mit dem ſtatiſchen Momente:

$$CD \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y$$

und in B mit der Kraft:

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y$$

am Wagebalken AD. Damit das Gleichgewicht des Wagebalkens weder von X noch von Y allein, ſondern nur von der Summe $Q = X + Y$ abhänge, iſt nöthig, daß Y in demſelben Punkte B genau ſo wirke, als wenn es unmittelbar von demſelben aufgenommen würde, daß alſo

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y = Y, \text{ d. i.}$$

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} = 1,$$

alſo

$$\frac{CD}{CB} = \frac{EF}{KF} \text{ ſei.}$$

Bezeichnen wir nun die Hebelarme CA und CB durch a und b, ſo haben wir wieder, wie bei der einfachen Wage,

$$G a = (X + Y)\, b = Q b,$$

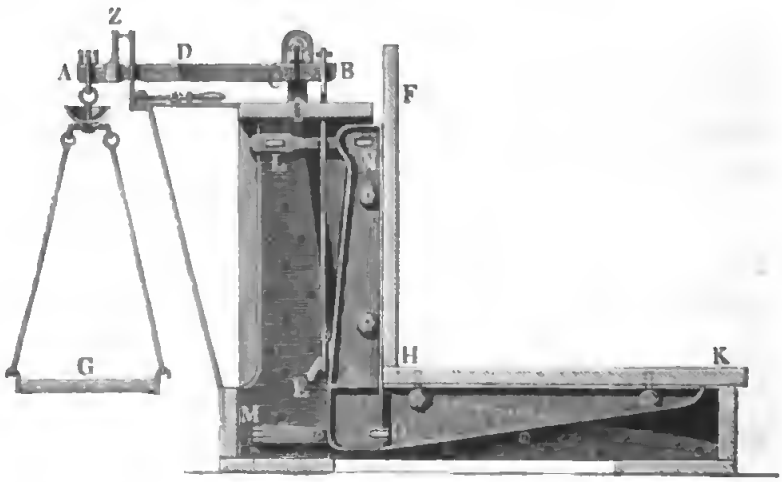
und daher das geſuchte Gewicht:

$$Q = \frac{a}{b}\, G,$$

z. B. $= 10\, G$, wenn die Armlänge CB in der Armlänge CA, 10 mal enthalten iſt. Dieſe Wage prüft man, indem man zuſieht, ob ein nach und nach in mehreren, und zumal in den Eckpunkten der Brücke aufgelegtes Gewicht Q ſtets einem $\frac{a}{b}$ (10) mal ſo kleinem Gewichte G in der Wagſchale das Gleichgewicht hält.

§. 119 Eine andere eigenthümliche Brückenwage iſt die (balance-bascule) von George in Paris, ſ. Bulletin de la Société d'Encouragement, Avril 1844, oder Dingler's Polyt. Journal, Bd. 93. Die weſentliche Einrichtung einer ſolchen Wage iſt folgende. ACB, Fig. 225, iſt eine Decimalwage mit der Wagſchale G und dem Zeiger Z, welche rechts von D in zwei

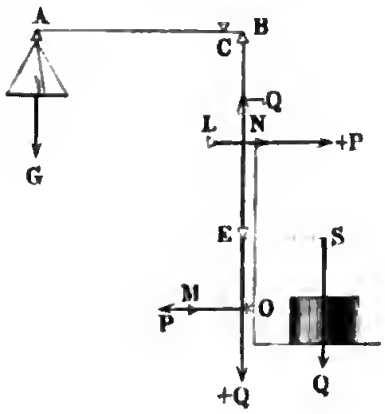
Fig. 225.



Armen ausläuft, wovon jeder mittels einer Schneide C auf dem Geſtelle aufruht und mittels einer anderen Schneide B eine Zugſtange BE erfaßt, woran die Brücke FHK hängt. Damit ſich die letztere nicht um den Aufhängepunkt E drehe und umſchlage, iſt das Wagegeſtelle mit zwei Paar horizontalen Schneiden L, M, ſowie der Rahmen, welcher die Brücke trägt, mit zwei Paar Schneiden wie N, O ausgerüſtet, und ſind je zwei dieſer Schneiden durch Querſtangen LN, MO dergeſtalt mit einander verbunden, daß die Componenten der aus der excentriſchen Belaſtung der Brücke hervorgegangenen Kräftepaare von N auf L durch Zug und von O auf M durch Druck übergetragen werden.

Denkt man ſich im Aufhängepunkte E der Brücke HK, Fig. 226, zwei gleiche Verticalkräfte $+ Q$, $- Q$ angebracht, ſo bildet die eine $(- Q)$ mit der Belaſtung Q der Brücke ein Kräftepaar, welches von dem Geſtelle mittels der Querſtangen aufgenommen wird, während die andere Kraft $(+ Q)$ mittels der Zugſtange BE auf den Wagebalken ACB wirkt. Iſt d der Abſtand ES des Aufhängepunktes E von der Laſt Q und e der Abſtand NO der Schneiden N und O oder L und M von einander, ſo hat man der Theorie der Kräftepaare zufolge (ſ. Bd. I, §. 93) für die Kräfte $+ P$, $- P$, mit welchen die Brücke auf die feſten Schneiden L, M wirkt,

Fig. 226.



$$Pe = Qd,$$

und daher:

$$P = \frac{d}{e} Q.$$

Sind ferner a und b die Hebelarme CA und CB des Wagebalkens, und iſt G das aufgelegte Gewicht, ſo hat man für den Gleichgewichtszuſtand der übrigens tarirten Wage:

$$Ga = Qb,$$

und daher:

$$G = \frac{b}{a} Q.$$

Es hängt alſo nur die Horizontalkraft $\pm P$, nicht aber das aufgelegte Gewicht G von der Entfernung e oder von der Lage der Laſt Q auf der Brücke ab.

Schiffswage. Zu den einfacheren Wagen mit verjüngten Gewichten §. 120
gehört die ſogenannte ſchwediſche Schiffswage. Dieſelbe beſteht in der Hauptſache aus zwei übereinander hängenden ungleicharmigen Wagebalken, welche ſo mit einander verbunden ſind, daß die Kraft des unteren Balkens als Laſt des oberen wirkt. Sind folglich bei beiden Balken die Laſtarme 10 mal in den Kraftarmen enthalten, ſo giebt die Kraft oder das Gewicht G in der Wagſchale des langen Armes des oberen Balkens die Laſt Q in der Wagſchale des kürzeren Armes vom unteren Balken hundertfach verkleinert an.

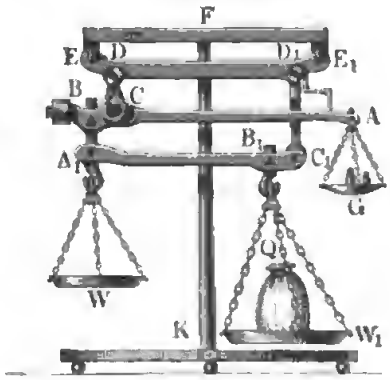
Nach demſelben Principe iſt auch die Decimal- und Centeſimalwage von Joſeph Beranger (ſ. Polyt. Centralblatt, 1850) conſtruirt. Es beſteht

dieſelbe ebenfalls aus zwei Balken ACB und $A_1C_1B_1$, Fig. 227, mit den Armverhältniſſen:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C_1A_1}{C_1B_1} = 10.$$

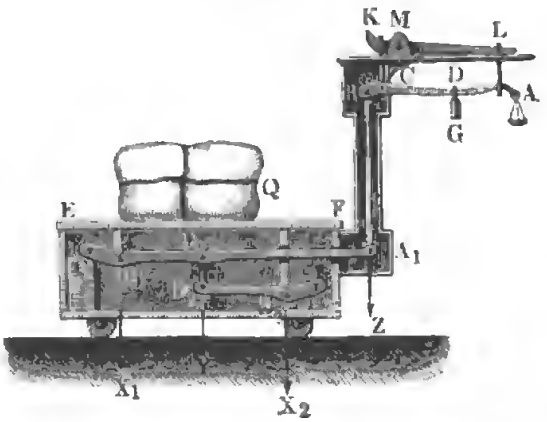
Die Scheeren CD, C_1D_1 derſelben ſind mit einem dritten Balken DD_1 verbunden, welcher mittels zwei Oeſen E und E_1 an das Geſtelle FK angehangen wird. Während der obere Wagebalken nur die kleine, zur Aufnahme der Gewichte dienende Wagſchale G trägt, ſind an den unteren Wagebalken zwei Wagſchalen W und W_1 zur Aufnahme der Laſt oder des abzuwiegenden Körpers angebracht. Je nachdem man nun dieſe Laſt Q in die eine oder in die andere Wagſchale legt und mit G ins Gleichgewicht ſetzt, giebt dieſes Gewicht die Größe von Q zehn oder hundertfach an.

Fig. 227.



§. 121 **Tafelwage.** Eine engliſche auf Rädern ruhende Brücken- oder Tafelwage iſt der Hauptſache nach in Fig. 228 abgebildet. Die Brücke oder Tafel EF zur Aufnahme der Laſt Q bildet hier den Deckel eines Kaſtens, worin der Hebelmechanismus der Wage eingeſchloſſen iſt und ruht mittels vier Füßen auf den Schneiden B_1, B_2 u. ſ. w. der um C_1 und C_2 drehbaren Hebel oder Wagebalken $C_1B_1D_1$ und $C_2B_2D_2$, welche unter ſich durch eine Hängeſtange D_1D_2 und mit dem Wagebalken ABC durch eine andere Stange BA_1 verbunden ſind.

Fig. 228.



Die Scheere CK des letzteren Wagebalkens hängt an einem um M drehbaren Hebel KL, deſſen Ende L niedergedrückt wird, um C und hiermit auch EF zu heben und die Wage ins Spiel zu ſetzen.

Iſt derjenige Theil, welchen die Doppelſchneide B_1 trägt, $= X_1$, ferner derjenige Theil, welchen die Doppelſchneide B_2 aufnimmt, $= X_2$, und ſind

die Hebelarme $C_1 A_1 = a_1$, $C_1 B_1 = C_2 B_2 = b_1$ und $C_1 D_1 = C_2 D_2 = d_1$, ſo hat man die Zugkraft in $D_1 D_2$:

$$Y = \frac{b_1 X_2}{d_1}$$

und die in $B A_1$:

$$Z = \frac{b_1 X_1}{a_1} + \frac{d_1 Y}{a_1} = \frac{b_1 X_1 + b_1 X_2}{a_1} = \frac{b_1 (X_1 + X_2)}{a_1} = \frac{b_1 Q}{a_1}.$$

Bezeichnet endlich a den veränderlichen Arm CD des Laufgewichtes G, und b den Arm CB der Zugkraft Z, ſo hat man, unter der Vorausſetzung, daß die leere Wage durch ein beſonderes Gewicht tarirt iſt:

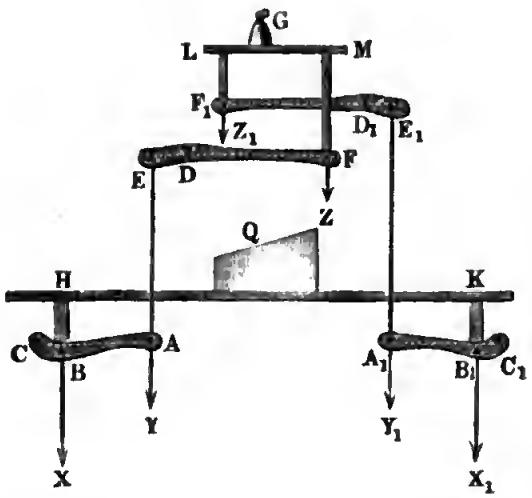
$$G a = Z b = \frac{b_1 b Q}{a_1},$$

und daher die Laſt:

$$Q = \frac{a a_1}{b b_1} G.$$

Die Einrichtung einer Tafelwage nach Kuppler iſt aus Fig. 229 zu erſehen. Die Laſt Q wird hier auf eine Tafel HK und das Gewicht G auf eine Tafel LM gelegt; während die erſtere vorzüglich von den Hebeln ACB und $A_1 C_1 B_1$ unterſtützt wird, ruht die letztere zunächſt auf den Hebeln DEF und $D_1 E_1 F_1$, welche durch die Zugſtangen AE und $A_1 E_1$ mit den erſteren Hebeln verbunden ſind. Bezeichnet man die Arme $CA = C_1 A_1$ durch a, die Arme $CB = C_1 B_1$ durch b, ferner die Arme $DF = D_1 F_1$ durch a_1 ſowie die Arme $DE = D_1 E_1$ durch b_1, und ſetzt man die aus Q hervorgehenden Drücke auf B und B_1, $= X$ und X_1, ſo hat man die hieraus reſultirenden Kräfte in den Zugſtangen AE und $A_1 E_1$:

Fig. 229.



$$Y = \frac{b}{a} X \quad \text{und} \quad Y_1 = \frac{b}{a} X_1,$$

und die das Gewicht G aufnehmenden Kräfte in den Füßen FM und $F_1 L$ der Tafel LM:

$$Z = \frac{b_1}{a_1}\, Y = \frac{b\,b_1}{a\,a_1}\, X \text{ und } Z_1 = \frac{b_1}{a_1}\, Y_1 = \frac{b\,b_1}{a\,a_1}\, X_1,$$

so daß nun

$$G = Z + Z_1 = \frac{b\,b_1}{a\,a_1}\,(X + X_1) = \frac{b\,b_1}{a\,a_1}\, Q,$$

sowie umgekehrt

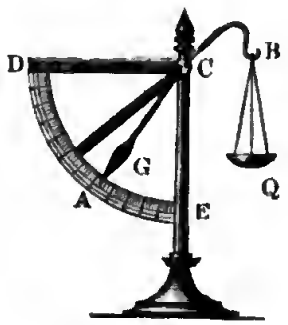
$$Q = \frac{a\,a_1}{b\,b_1}\, G,$$

z. B. für $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} = 10$, $Q = 100\,G$ folgt.

Anmerkung. Ueber die Brückenwagen wird ausführlich gehandelt in Hülse's Allgemeiner Maschinenencyclopädie, Bd. II, Art. Brückenwagen; nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. I. Ueber Hofmann's Tafelwagen, welche ebenfalls hierher zu zählen sind, ist in Poggendorff's Annalen 1845 und in Dingler's Polyt. Journal, Bd. 97, nachzusehen. Es gehören hierher auch die Wagen von Kuppler und Baumann, welche im Baierischen Kunst- und Gewerbeblatt, Jahrgang 1845 und dem oben citirten Artikel in der Allgemeinen Maschinenencyclopädie abgehandelt werden. S. auch die Beschreibung der Brückenwage zum Wägen belasteter Wagen von Däntzer und Schmidt in Bd. 27 (1861) des polytechnischen Centralblattes. Eine ausführliche Abhandlung über die Wagen von Burg enthält auch Prechtl's Technologische Encyclopädie Bd 20. Nächstdem ist Rühlmann's allgemeine Maschinenlehre Bd. I, 1862 zu empfehlen. Eine Brückenwage eigenthümlicher Construction, von Herrn Prof. Schönemann, wird in einer besonderen Monographie, Wien 1855, beschrieben.

§. 122 **Zeigerwage.** Die Zeigerwage (franz. peson ordinaire; engl. bentlever balance) ist ein ungleicharmiger Hebel ACB, Fig. 230, welcher das Gewicht Q der angehängten Waare mittels eines über einer festen Scala DE weggehenden Zeigers CA angiebt, indem sich das an dem Zeiger befestigte Gewicht G mit Q ins Gleichgewicht setzt. Um die Theorie dieser Wage zu entwickeln, denken wir uns zunächst den einfachen Fall, daß die Zungenaxe CD durch den Aufhängepunkt B der Wagschale, Fig. 231, gehe. Ist die leere Wage im Gleichgewicht, also ihr Schwerpunkt S_0 senkrecht unter der Drehaxe C, so stehe der Zeiger in CD_0, und es befinde sich der Aufhängepunkt der Last in B_0. Legt man aber eine Last Q zu, so komme B_0 nach B, D_0 nach D und S_0 nach S, es erhalte also die Last Q den Hebelarm CK und das Gewicht G der leeren Wage den Hebelarm CH. Es ist für den neuen Gleichgewichtszustand:

Fig 230.



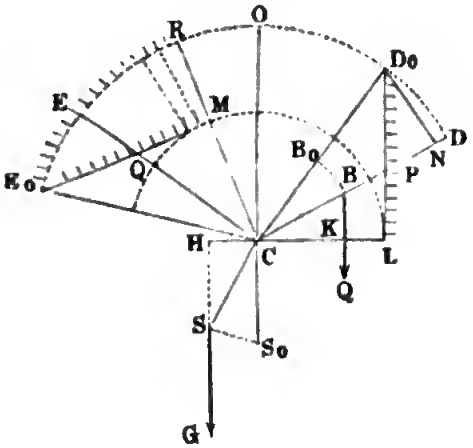
$$Q \,.\, CK = G \,.\, \overline{CH}.$$

Fällt man $D_0 N$ winkelrecht gegen CD, ſo erhält man in $CD_0 N$ und SCH zwei ähnliche Dreiecke, weshalb ſich

$$\frac{CH}{CS} = \frac{D_0 N}{CD_0}$$

ſetzen läßt; da nun auch noch die Dreiecke $D_0 PN$ und CBK einander ähnlich ſind, ſo hat man auch:

Fig. 231.



$$\frac{CK}{CB} = \frac{D_0 N}{D_0 P},$$

und daher:

$$Q \cdot \frac{CB \,.\, D_0 N}{D_0 P} = G \cdot \frac{CS \,.\, D_0 N}{CD_0},$$

d. i.:

$$Q = \frac{CS}{CB} \cdot \frac{D_0 P}{CD_0} G;$$

oder, wenn man $CS = a$, $CB = b$, $CD_0 = CD = d$ und $D_0 P = x$ ſetzt:

$$Q = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{d} G.$$

Es wächſt alſo Q mit dem Abſchnitte $\overline{D_0 P} = x$ der Zunge auf der Verticalen $D_0 L$, und es läßt ſich daher $D_0 L$ als eine gleichtheilige Scala gebrauchen. Hat man durch Auflegen einer bekannten Laſt den entſprechenden Theilpunkt P auf dieſer Scala gefunden, ſo erhält man folglich andere Theilpunkte, wenn man den Raum $D_0 P$ in gleiche Theile theilt.

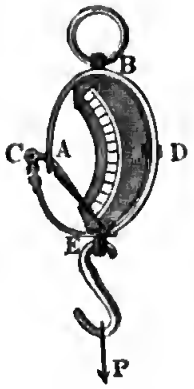
Geht die Zeigerlinie CD_0 nicht über den Aufhängepunkt B weg, ſondern hat ſie eine andere Richtung CE_0, ſo findet man die entſprechende gleichtheilige Scala $E_0 M$, wenn man das rechtwinkelige Dreieck $CD_0 L$ als $CE_0 M$ über CE_0 legt. Um endlich eine anders gerichtete oder kreisförmige Scala $E_0 R$ zu erhalten, zieht man aus dem Drehpunkt C gerade Linien durch die Theilpunkte der $E_0 M$ bis zum Kreiſe, welchen die Zeigerſpitze durchläuft.

Anmerkung. Es giebt noch andere Zeigerwagen, z. B. die Zeigerwage von Du Mont, die Zeigerwage von Braby u. ſ. w.; auch gehört hierher Weber's Kettenwage, ſowie Steinhiel's Brückenwage mit Zeiger, welche nicht mittels Schneiden unterſtützt, ſondern an Fäden oder Bändern aufgehangen iſt. Bei dieſen Wagen bildet die Scala mit dem Gewichte ein Ganzes, und es dient ein die Wagſchale tragendes Loth als Zeiger. Die Zeigerwagen kommen im praktiſchen Leben als Garn-, Sortir-, Papier-, Briefwagen u. ſ. w. vor. Siehe den Artikel „Wage" im Band 20 von Prechtl's Technologiſche Encyclopädie, ſowie im Band 10 von Gehler's Phyſikaliſchem Wörterbuche.

§. 123 **Federwage.** Federwagen oder Federdynamometer (franz. pesons à ressort; engl. spring-balances, spring-yards) bestehen aus gehärteten Stahlfedern, auf welche die zu messenden Gewichte oder Kräfte wirken, und aus Zeigern, welche auf Scalen hinlaufen, wo sie die von den Kräften hervorgebrachten Formveränderungen anzeigen und dadurch die Größe der Kräfte mittelbar angeben. Diese Stahlfedern müssen vollkommen elastisch sein, d. h. sie müssen nach Wegnahme der Kraft ihre erste Gestalt wieder vollkommen herstellen. Aus diesem Grunde darf man die Federwage auch nur bis zu einem gewissen, ihrer Stärke entsprechenden, Grade belasten; geht man damit über die Elasticitätsgrenze hinaus, so verlieren sie ihre vollkommene Elasticität und werden dadurch ganz unbrauchbar. Die zu diesen Wagen verwendeten Federn sind von sehr verschiedenen Formen. Zuweilen sind diese schraubenförmig gewunden, und in einem cylindrischen Gehäuse eingeschlossen, so daß sie durch ihre Verlängerung oder Verkürzung in der Axenrichtung dieses Cylinders die Größe der in eben dieser Richtung wirkenden Kraft anzeigen. Eine solche Federwage, wie sie in Frankreich gebraucht wird, ist in Fig. 232 abgebildet. Das eingetheilte Stäbchen AB endigt sich oben in einem Ringe C zum Aufhängen und unten in einem Kolben B, und ist mit einer, in der Figur durchschnitten dargestellten, Spiralfeder umgeben, welche nebst dem Kolben B von dem cylindrischen Gehäuse DE umgeben wird. Das letztere hat oben eine rectanguläre Oeffnung für das eingetheilte Stäbchen und trägt unten einen Haken H, woran der abzuwiegende Körper gehangen wird. Da hier das Gewicht des in H hängenden Körpers mittels der Spiralfeder auf den festen Kolben B des Stäbchens AB wirkt, so wird sich natürlich diese Feder um so mehr zusammendrücken, folglich das Gehäuse DE um so tiefer herabsinken und ein um so größerer Theil AD der Scala sichtbar werden, je größer dieses Gewicht ist.

Fig. 232.

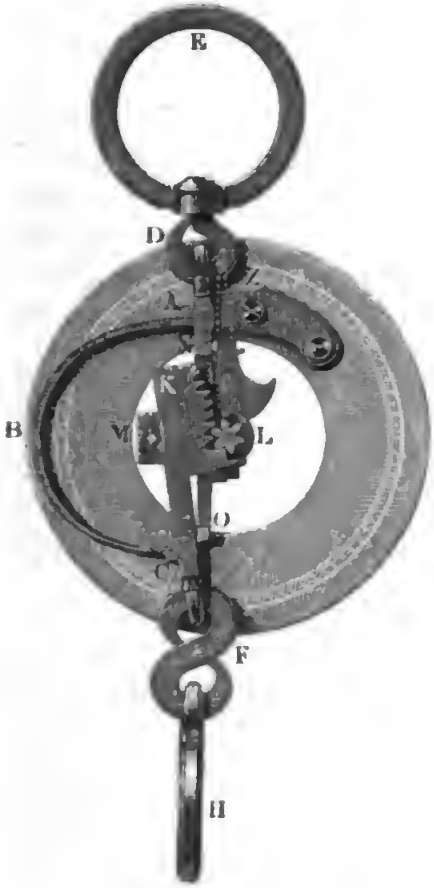
Fig. 233.



Bei anderen Federwagen bildet die Stahlfeder einen offenen Ring $ABDEC$, Fig. 233, und es ist der Zeiger CZ durch ein Scharnier mit einem Ende C derselben verbunden sowie durch das ringförmige Ende A gesteckt. Wird der bei B sitzende Ring festgehalten, während eine Kraft P an dem Haken EP zieht, so gehen die Enden A und C in der Richtung der Kraft aus einander und

es ſteigt der Zeiger CZ bis zu einer gewiſſen Stelle an der bei D auf der Feder befeſtigten Scala in die Höhe. Hat man vorher durch bekannte angehängte Gewichte die Eintheilung der Scala beſtimmt, ſo läßt ſich nun an dieſer Scala die Größe der unbekannten und auf die Wage wirkenden Kraft P beſtimmen.

Fig. 234.



In Fig. 234 iſt die hintere Anſicht einer franzöſiſchen Federwage derſelben Art abgebildet. Die Feder ABC iſt hier bei A auf der hinteren Seite eines kreisrunden Ziffernblattes befeſtigt, ſowie mit einem Haken D und Ringe E zum Aufhängen verbunden, und trägt mit dem freien Ende C eine Hakenverbindung FH, an welche die abzuwiegende Waare gehangen wird. Auch iſt an dieſem Federende C ein gezahnter Arm CK angeſchloſſen, welcher mit ſeinen Zähnen in ein Zahnrädchen L eingreift, auf deſſen Axe der (in der Figur nur zum Theil ſichtbare) Zeiger Z ſitzt. Dieſer gezahnte Arm läßt ſich in der Führung MNO verſchieben, welche mit A und dem Zifferblatte feſt verbunden iſt, und auch die Axenlager des Weiſers und Zahnrades L trägt. Es iſt leicht einzuſehen, wie durch die in H angreifende Laſt der Arm CK abwärts gezogen und dadurch das Zahnrädchen ſammt dem Zeiger LZ in Bewegung geſetzt wird, ſo daß der letztere durch ſeinen Stand auf dem Zifferblatte die Größe der Laſt angeben kann.

Fig. 235.

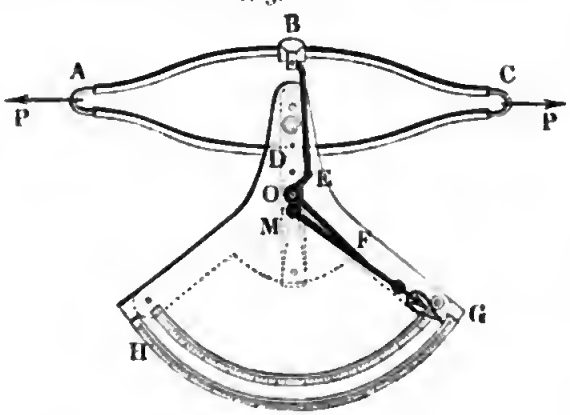
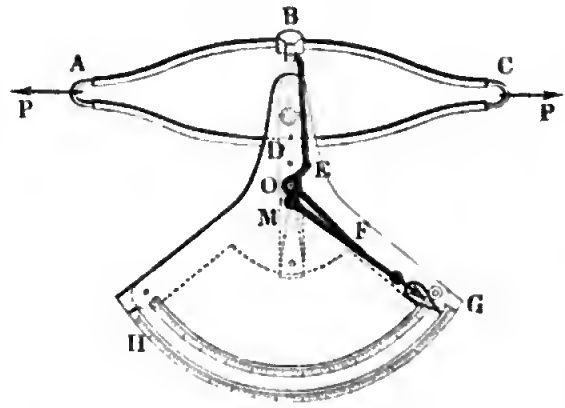


Fig. 235 zeigt einen Kraftmeſſer oder Dynamometer von Regnier; $ABCD$ iſt

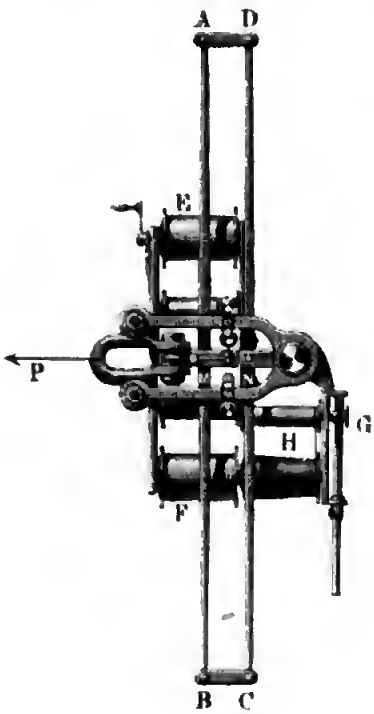
die einen geſchloſſenen Ring bildende Stahlfeder, die entweder durch Kräfte in A und C ausgezogen oder durch Kräfte in B und D zuſammengedrückt wird; $DEGH$ iſt ein mit zwei Kreisſcalen verſehener und bei DE mit der Feder feſt verbundener Sector, ferner MG ein um M drehbarer und auf den Scalen hinlaufender Doppelzeiger, und EOF iſt ein Winkelhebel, welcher bei Einwirkung der Kräfte und Sichnähern der Punkte B und D durch eine Stange BE um O gedreht wird, und den Zeiger MG mit Hülfe des Armes OF in Bewegung ſetzt. Damit der Zeiger nach Einwirkung der Kraft ſeinen Stand behält und dieſer bequem abgeleſen werden kann, wird der Zeiger auf ſeiner unteren Seite mit einem ſich auf der Zeigerebene reibenden Tuchläppchen verſehen.

Fig. 236.



§. 124 **Federdynamometer.** Die vollkommenſten und für maſchinelle Zwecke brauchbarſten Federdynamometer hat der General Morin bei ſeinen Verſuchen über die Reibung u. ſ. w. angewendet, und in der beſonderen Abhandlung (Description des appareils chronométriques à style et des appareils dynamométriques. Metz 1838) beſchrieben. Dieſe Dynamometer ſind aus zwei gleichen Stahlfedern AB und CD, Fig. 237, von $^1/_4$ bis $^1/_2$ Meter Länge zuſammengeſetzt, und geben die Größe der in der Mitte M der einen Feder angreifenden Kraft P durch die bewirkte Vergrößerung der Entfernung MN zwiſchen beiden Federmitten an. Um nun die Größe einer Kraft, z. B. die Zugkraft der Pferde vor einem Wagen, zu finden, wird die Feder CD in der Mitte N durch einen Bolzen mit dem Wagen feſt verbunden, und die Zugkette der Pferde in M angeſchloſſen, und es läßt ſich durch einen Zeiger in M

Fig. 237.



und an einer mit N verbundenen Scala der die Kraft P meſſende relative Weg von M beobachten. Sind die Federn parallelepipediſch geformt und von der Länge l, Breite b und Dicke h, ſo hat man nach Band I, §. 217 die der Kraft P entſprechende Bogenhöhe:

$$a = {}^1/_{48} \cdot \frac{Pl^3}{WE} = {}^1/_4 \cdot \frac{Pl^3}{Ebh^3};$$

es wächſt folglich die Bogenhöhe wie die Kraft und es läßt ſich alſo bei dieſem Dynamometer eine gleichtheilige Scala anwenden. Da hier die Ausbiegung s von zwei Federn angegeben wird, ſo hat man dieſelbe doppelt ſo groß als die einfache Bogenhöhe, d. i.:

$$s = {}^1/_2 \frac{Pl^3}{Ebh^3}.$$

Um Material zu erſparen, giebt man lieber dieſen Federn die bekannte parabolíſche Form eines Körpers von gleichem Widerſtande, wobei ſie zwar eine conſtante Breite, dagegen eine nach den Enden zu allmälig abnehmende Dicke erhalten (ſ. Bd. I, §. 253 bis §. 256), und die Durchbiegung doppelt ſo groß ausfällt, als bei einem Körper von conſtanter Dicke h. Es iſt alſo für ſolche paraboliſche Doppelfedern:

$$s = \frac{Pl^3}{Ebh^3} = \frac{1}{Eb}\left(\frac{l}{h}\right)^3 . P = \nu P,$$

wenn ν eine Erfahrungszahl bezeichnet.

Wenn man vor der Anwendung eines ſolchen Inſtrumentes ein bekanntes Gewicht angehängt und die bewirkte Ausbiegung s beobachtet hat, ſo läßt ſich das Verhältniß ν zwiſchen Ausbiegung und Kraft berechnen, und dieſelbe zur Anfertigung der Scala benutzen. Bei Anwendung des beſten Stahles hat ſich gezeigt, daß die Bogenhöhe bis ${}^1/_{10}$ der Länge ausfallen kann, ehe das Verhältniß zwiſchen Kraft und Weg ein anderes und die Elaſticitätsgrenze überſchritten wird.

Zeichnen- und Zählapparate. In der Regel wirken die Kräfte §. 125
nicht immer gleich ſtark, ſondern ſie ſind ſteten Schwankungen ausgeſetzt, es kann daher meiſt nur die Frage nach dem mittleren Werthe einer veränderlichen Kraft beantwortet werden. Nun geben aber die gewöhnlichen Zeigerapparate einer Federwage nur die Kraft für einen Augenblick, oder nur den Maximalwerth derſelben an; es laſſen daher die gewöhnlichen Dynamometer bei größerer Veränderlichkeit der Kräfte, wie z. B. bei Bewegung von Fuhrwerken, noch eine große Unſicherheit zurück. Aus dieſem Grunde iſt die Anwendung der zuerſt von Poncelet vorgeſchlagenen und von Morin zur Anwendung gebrachten Totaliſirungsapparate von Nutzen. Beide Apparate geben das Product aus Kraft und Weg oder die Arbeit derſelben an,

und es läßt ſich nun der mittlere Werth der Kraft finden, wenn man die Arbeit durch den Weg der Kraft, z. B. durch den zurückgelegten Weg des Wagens, dividirt.

Bei dem Zeichnenapparate (Dynamomètre à style et à bande de papier) wird das Maß der Kraftleiſtung von einem durch M geſteckten Stifte MS, Fig. 238, auf einem ſich unter ihm wegziehenden Papierſtreifen KL aufgezeichnet. Dieſer Papierſtreifen wird von der Rolle E auf die Rolle F aufgewickelt, die durch die Maſchine ſelbſt mittels Schnur ohne Ende und Räder, wie G, H u. ſ. w., Fig. 237, ihre Bewegung erhält. Ohne Spannung der Federn, und alſo auch ohne Kraft, würde während der Bewegung der Maſchine eine gerade Linie auf dem ſich unter dem Zeichnenſtifte hinziehenden Papierſtreifen entſtehen; da aber bei der Bewegung der Maſchine die Federn durch die Kraft P geſpannt ſind, ſo bildet ſich auf dem Papierſtreifen in einiger Entfernung von jener Linie eine im Ganzen mit ihr parallellaufende Curve OS ab. Der Flächenraum zwiſchen dieſen beiden Linien iſt das Maß von der Arbeit der Kraft, da er zur Baſis eine dem Wege der Kraft proportionale Linie und zur Höhe die der Kraft ſelbſt proportionale, übrigens aber mit ihr veränderliche Größe der Ausbiegung der Feder hat.

Fig. 238.

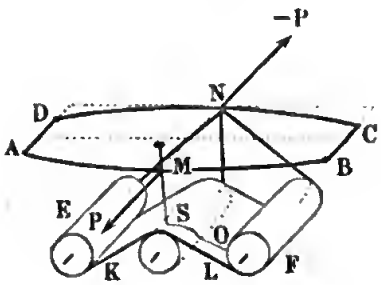
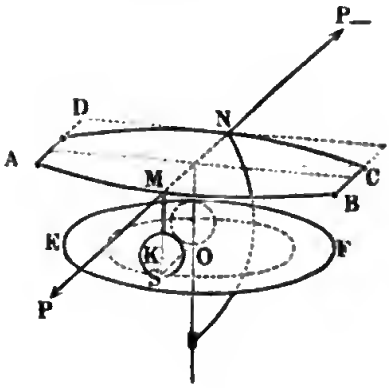


Fig. 239.



Der Zählapparat (Dynamomètre à compteur) beſteht in der Hauptſache 1) aus einem horizontalen Teller EF, Fig. 239, welcher mit der Mitte N der hinteren Feder CD in feſter Verbindung ſteht und durch die Maſchine, an welcher die zu ermittelnde Kraft wirkt, in Umdrehung geſetzt wird, und 2) aus einem verticalen Rädchen KS, welches mit der Mitte M der vorderen Feder AB feſt verbunden iſt und ſanft auf den Teller EF aufdrückt, ſo daß es in Folge der Reibung von letzteren um ſeine Axe K umgedreht wird. Macht der Teller pr. Minute u Umdrehungen und iſt die Entfernung OS des Berührungspunktes S zwiſchen dem Rädchen und dem Teller von der Umdrehungsaxe O des letzteren, $= z$, ſo läßt ſich die Geſchwindigkeit des Punktes S

$$v = \frac{2\pi z u}{60} = \frac{\pi u z}{30}$$

ſetzen.

Macht dagegen das Rädchen pr. Minute u_1 Umdrehungen und iſt der Halbmeſſer KS deſſelben $= r$, ſo hat man ſeine Umdrehungsgeſchwindigkeit:

$$v = \frac{\pi u_1 r}{30},$$

ſo daß nun folgt:

$$u_1 r = u z,$$

oder:

$$u_1 = \frac{u z}{r}.$$

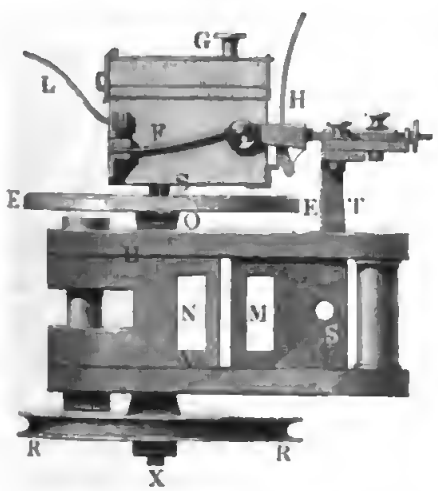
Steht das Rädchen im Mittelpunkte O des Tellers, wenn die Feder noch gar nicht geſpannt iſt, ſo rückt es durch die Einwirkung einer Zugkraft P um einen Weg $OS = z$ fort, welcher dieſer Kraft P proportional iſt, und da nun die Umdrehungszahl u des Tellers durch den Weg der Maſchine oder die Kraft P gemeſſen wird, ſo folgt, daß die Umdrehungszahl u_1 des Rädchens mit dem Producte aus Kraft P und Weg s gleichmäßig wächſt, daß ſie daher auch das Maß der Arbeit L der Kraft iſt.

Setzt man $z = \alpha P$ und $u = \beta s$, ſo hat man folglich:

$$L = \frac{\alpha \beta P s}{r} = \mu P s,$$

wenn man noch $\frac{\alpha\beta}{r}$ durch den conſtanten Coefficienten μ ausdrückt. Die ſpeciellere Einrichtung des Zählapparates iſt aus Fig. 240 zu erſehen. EE iſt wieder der mittels eines Seilrades RR u. ſ. w. um die Axe OX umzudrehende Teller und S der ſichtbare Theil des Laufrädchens. Der übrige Theil deſſelben iſt in dem Gehäuſe FG eingeſchloſſen, welches zugleich das Uhr- oder Räderwerk enthält, wodurch zwei eingetheilte Scheiben in Umdrehung geſetzt werden, welche die Anzahl der Umdrehungen des Laufrädchens angeben. Ein Paar Federn (F) drückt das Gehäuſe ſammt Laufrädchen S während der Beobachtung ſanft auf den Teller auf, wogegen es mittels der Haken L und H vom Teller abgehoben und über demſelben aufgehangen werden kann. Um den Beginn und das

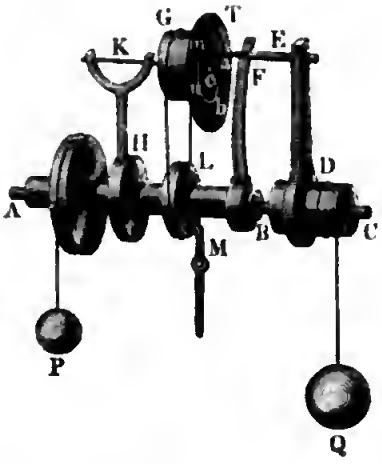
Fig. 240.



Ende der Beobachtung am Zählapparate zu markiren, wird auf einen Knopf G gedrückt, welcher mittels eines einfachen Mechanismus auf jedes der beiden eingetheilten Räder einen Punkt mit Tuſche angiebt. Die hintere Hauptfeder des Dynamometers ergreift das mit der Maſchine feſt verbundene und die Axe des Tellers tragende Geſtell UV im Punkte N, wogegen die vordere Hauptfeder in M auf den verſchiebbaren Support MST des Zählapparates wirkt.

§. 126 **Rotationsdynamometer.** Wenn es darauf ankommt, die Umdrehungskraft einer umlaufenden Welle zu ermitteln, ſo müſſen die im Vorſtehenden beſchriebenen Dynamometer modificirt werden. Die weſentliche Einrichtung eines ſo modificirten Dynamometers iſt aus der ideellen geometriſchen Darſtellung in Fig. 241 zu erſehen. Eine Maſchine, deren Umdrehungskraft und Arbeit man ermitteln will, beſtehe in der Hauptſache aus der Welle AB mit der Kraft P und aus der Welle BC mit der Laſt Q, und es ſei die Verbindung dieſer beiden Wellen mit einander durch eine auf der Welle AB ſitzende Stahlfeder BF und einen auf der Welle BC befeſtigten und mit einem Bolzen E ausgerüſteten Arm DE hergeſtellt. Wenn man nun an einer am Bolzen E angebrachten Scala die Seitenbiegung der Feder BF abliеſt, ſo erhält man dadurch ein Maß der Kraft R, womit die beiden Wellen auf einander wirken, und iſt noch der Abſtand a des Bolzens E von der gemeinſchaftlichen Axenrichtung AC beider Wellen ſowie die Umdrehungszahl u der Welle bekannt, ſo läßt ſich nun auch die Arbeit der Kraft P oder Q durch die Formel

Fig. 241.



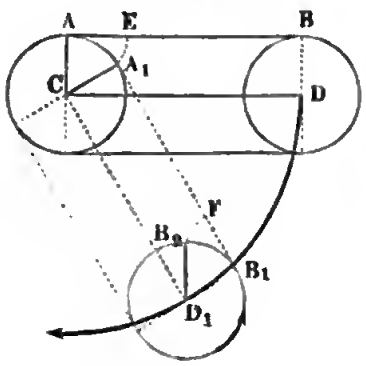
$$L = \frac{\pi u a}{30} R$$

berechnen.

Da von der gedachten Scala immer nur ein Einzel- und nicht der Mittelwerth der Kraft R angegeben wird, ſo erſetzt man dieſelbe durch einen Totaliſirungsapparat (ſ. den vorigen Paragraphen), welcher das Maß der Arbeit der Kraft R angiebt. Ein ſolcher Totaliſeur beſteht zunächſt in einer Welle oder Trommel G, welche ſich nicht allein mit der Welle AB gemeinſchaftlich, ſondern auch noch um ihre eigene Axe K umdreht, und es iſt zu dieſem Zwecke die Axe K auf einem Arme HK gelagert, welcher auf

der Welle AB feſtſitzt; damit ſich dieſe Trommel G auch um ihre eigene Axe drehe, iſt ſie noch mit einer anderen Trommel L, welche zwar auf der Welle AB aufſitzt, jedoch mit dieſer nicht feſt verbunden iſt und durch einen Arm M an der Umdrehung verhindert wird, durch eine Schnur ohne Ende verbunden. In Folge der Umdrehung der Axe K um AB dreht ſich dann auch die Rolle G um K. Es ſtelle in Fig. 242 AC die feſte und BD die um C drehbare, mit AC durch eine Schnur ohne Ende verbundene Rolle von beliebiger Größe vor. Gelangt dieſe Rolle BD nach B_1D_1, wobei ihre Axe D den Winkel DCD_1 zurücklegt, ſo legt ſich von der Schnur AB ein Stück AE als Bogen AA_1 auf die feſte Rolle auf und es wickelt ſich ein anderes $B_1B_2 = B_1F$ von der umlaufenden Rolle ab. Da $A_1B_1 = AB$ iſt, ſo muß auch $B_1B_2 = B_1F = AE = AA_1$ ſein. Wären nun die Halbmeſſer der Rollen $CA = r_1$ und $DB = r_2$, ſowie die gleichzeitigen Drehungswinkel $ACA_1 = DCD_1 = \varphi_1$ und $B_1D_1B_2 = \varphi_2$, ſo hätte man:

Fig. 242.



$$AA_1 = r_1\varphi_1 \quad \text{und} \quad B_1B_2 = r_2\varphi_2,$$

und daher das Verhältniß zwiſchen den Winkelgeſchwindigkeiten der Drehungen um D und C:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Wäre z. B. $r_2 = r_1$, ſo hätte man dieſes Verhältniß:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1,$$

dann würde ſich alſo die Rolle genau ein Mal um ihre Axe D drehen, während die letztere ſelbſt ein Mal um C läuft; wäre dagegen $r_2 = 2r_1$, ſo hätte man:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1/2,$$

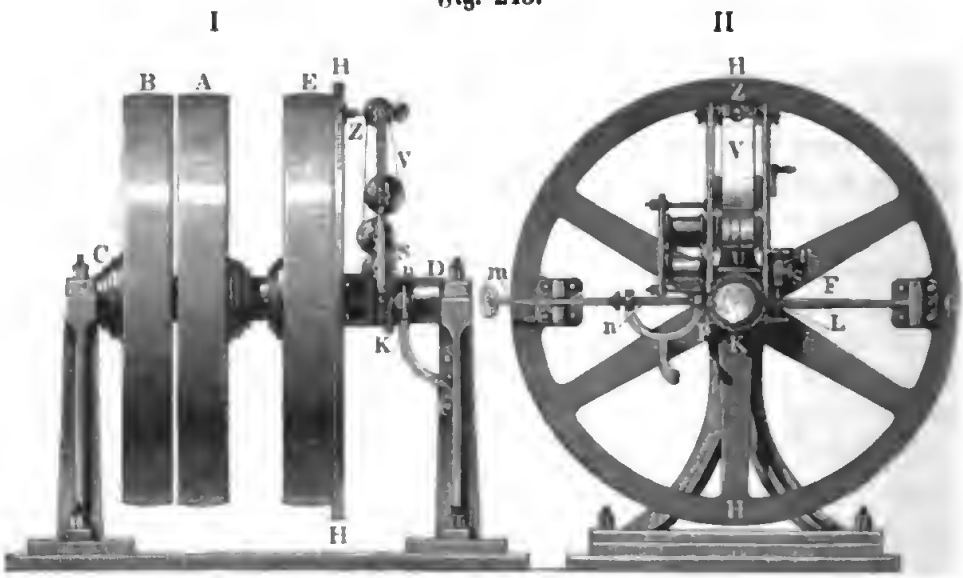
und es würde folglich die Rolle BD zwei Mal um C laufen, während ſie ſich um ihre eigene Axe D ein Mal umdreht.

Den einfachſten Totaliſeur erhält man nun, wenn man die Rolle G, Fig. 241, mit einem Teller T verſieht und denſelben mit Papier überzieht, auf welches dann der Stift a, in welchem der Bolzen E ausläuft, eine Curve $amnb$ beſchreibt. Nimmt man dann aus den verſchiedenen Ab-

ſtänden ca, cm, cn, cb ... dieſes Bogens von dem Mittelpunkte c des Tellers, das Mittel, ſo erhält man dadurch auch das Maß von dem mittleren Werthe der Kraft R, mit welcher während Durchlaufung des dem Umdrehungswinkel acb entſprechenden Weges, die Feder F den Bolzen E im Kreiſe herumführt.

§. 127 Um die Arbeit einer Maſchine für größere Wege oder Zeiten zu ermitteln, erſetzt man den Teller T, Fig. 241, durch ein Paar Trommeln mit einem Papierſtreifen ohne Ende nach der oben beſchriebenen Einrichtung, ſo daß dann die Spitze a des Bolzens E auf dem unter ihr weggehenden Streifen eine Curve beſchreibt, durch deren Quadratur das Maß der mechaniſchen Arbeit ermittelt wird, welche die Maſchine verrichtet, während der Papierſtreifen einen gewiſſen Weg unter dem Stifte a zurücklegt. Die Einrichtung eines ſolchen Rotationsdynamometers nach Morin iſt aus zwei Anſichten I und II, Fig. 243, zu erſehen und beſteht weſentlich in Folgendem.

Fig. 243.



Auf der horizontalen Welle CD ſitzen eine feſte Riemenſcheibe A und zwei loſe Riemenſcheiben B und E, und es wird durch die erſtere die Kraft der Umtriebsmaſchine (ſ. §. 108) auf die Welle CD, ſowie durch die Rolle E von der genannten Welle auf die Arbeitsmaſchine übergetragen, deren Kraft und Leiſtung man durch das Dynamometer ermitteln will. So lange der Riemen auf B liegt und E nicht mit der Welle in feſter Verbindung ſteht, findet natürlich weder eine Umdrehung der Welle, noch eine Bewegung der Arbeitsmaſchine Statt. Um das erſtere zu bewirken, hat man dagegen den Riemen von B nach A zu rücken. Die feſte Verbindung der Rolle E mit der Welle CD erfolgt durch zwei aus dem Obigen bekannte dynamometriſche

Federn, wie FG, welche mit der Welle CD feſt verbunden ſind, mit dem einen Ende F aus derſelben radial hervorragen und mit dem anderen Ende G einen an der Rolle E feſtſitzenden Ring HGH ergreifen. Auf der Welle CD ſitzt zugleich noch ein gezahntes Rad K, welches ſeitwärts eine Naſe p hat, womit es während der Meſſung mittels einer Zugſtange mn an der Umdrehung verhindert werden kann. Dieſes Zahnrad greift in ein Zahnrädchen L ein, welches auf der Welle einer Schraube S ſitzt, die mittels eines anderen Zahnrädchens T die erſte Welle U des Trommelſyſtemes in Umdrehung ſetzt, wodurch der Papierſtreifen V von einer Rolle über eine andere geführt und auf eine dritte Rolle aufgewickelt wird. Während dieſer Bewegung drückt ein Stift Z, welcher in einem Arme des Ringes GH ſitzt, auf den Papierſtreifen und es entſteht dadurch eine Curve, welche, wie aus dem Obigen bekannt, als Maß der Arbeit der Maſchine benutzt werden kann.

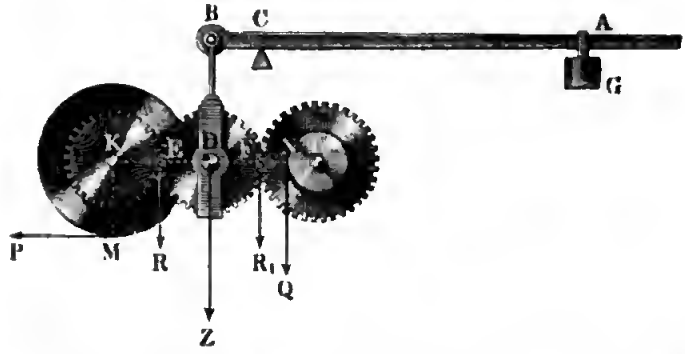
Statt des im Vorſtehenden beſchriebenen Zeichnenapparates kann man ſich auch zur Ausmittelung der Umdrehungskraft einer Maſchine eines Zählapparates bedienen, wo der Stift Z durch ein Laufrädchen mit einem Zeigermechanismus und der Papierſtreifen V durch einen mittels des Räderwerkes $KL\ldots$ umzudrehenden Teller erſetzt wird (vergl. §. 124, Fig. 240).

Wenn ſich die Bewegung des Papierſtreifens oder des Tellers nicht unmittelbar von der Maſchine ableiten läßt, ſo kann man auch dieſe Theile des Inſtrumentes durch ein beſonderes Uhrwerk, welches ungefähr die Einrichtung eines Bratenwenders oder des Schlagwerkes einer Uhr hat, in Bewegung ſetzen. Das Inſtrument giebt aber dann nicht ein Product aus Kraft und Weg, ſondern ein Product aus Kraft und Zeit an; um daher die mittlere Kraft zu finden, muß man dieſes Product durch die Zeit dividiren, und um die Arbeit der Maſchine zu beſtimmen, iſt der letzte Quotient noch durch den Weg zu multipliciren.

Dynamometriſche Zapfenlager. Bei einem anderen Dynamometerſyſteme wird der Druck des Zapfens der umlaufenden Welle gemeſſen und hieraus die Größe der Umdrehungskraft der Maſchine beſtimmt. Das einfachſte Dynamometer dieſer Art iſt die dynamometriſche Schnellwage von Hachette. Dieſelbe beſteht aus einer gewöhnlichen Schnellwage ACB, Fig. 244 (a. f. S.), an welcher ſtatt der Wagſchale für die Laſt ein Zahnrad DEF hängt, welches zwiſchen die Zahnräder KE und LF eingeſetzt wird, deren Umdrehungskraft ermittelt werden ſoll. Iſt P die Umdrehungskraft der einen Welle am Hebelarme $KM = a$ und Q der Umdrehungswiderſtand der anderen Welle am Hebelarme $LN = b$, ſowie r der Halbmeſſer KE des einen und r_1 der Halbmeſſer LF des anderen Zahnrades, ſo hat man die Kräfte, mit welchen beide Räder auf das eingeſchaltete Zahnrad in E und F vertical abwärts drücken: §. 128 ×

$$R = \frac{Pa}{r} \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{Qb}{r_1}.$$

Fig. 244.



Da dieſelben an gleichen Armen DE und DF wirken, ſo iſt auch

$$R = R_1,$$

und daher die Laſt oder Zugkraft der Wage ACB in B:

$$Z = R + R_1 = 2R,$$

ſowie umgekehrt, der Druck R zwiſchen den Zähnen oder Zahnrädern:

$$R = \frac{Z}{2}.$$

Hat man die Wage durch Verſchiebung des Laufgewichtes G mit der Zugkraft $Z = 2R$ ins Gleichgewicht gebracht, ſo iſt dadurch auch Z und R, ſowie

$$P = \frac{r}{a} R = \frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2}, \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{r_1}{b} R = \frac{r_1}{b} \cdot \frac{Z}{2}$$

beſtimmt, und iſt nun noch die Umdrehungszahl u der Kraft- oder die Umdrehungszahl u_1 der Laſtwelle pr. Minute bekannt, ſo kann man endlich die Arbeit der Maſchine mittels einer der Formeln

$$L = \frac{\pi u a}{30} P = \frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2} \quad \text{und}$$

$$L = \frac{\pi u_1 b Q}{30} = \frac{\pi u_1 r_1}{30} \cdot \frac{Z}{2}$$

berechnen.

Wegen der Reibungen am Zapfen D und zwiſchen den Zähnen bei E und F fällt, genau genommen, R_1 etwas kleiner als R aus, es iſt daher R etwas größer als $\frac{Z}{2}$, und die nach der Formel

$$L = \frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2}$$

berechnete Leiſtung der Kraft etwas zu klein.

In der Regel wird man

$$R = \frac{Z}{2}(1 + \mu) \text{ und}$$

$$R_1 = \frac{Z}{2}(1 - \mu)$$

ſetzen können, wo μ eine von den Verhältniſſen der Wage abhängige Erfahrungszahl iſt. Hiernach hat man:

$$P = (1 + \mu)\frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2}, \text{ ſowie:}$$

$$Q = (1 - \mu)\frac{r_1}{b} \cdot \frac{Z}{2},$$

und daher:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \frac{b}{a},$$

ſowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{P a r_1 - Q b r}{P a r_1 + Q b r}.$$

Wenn man durch einen Vorverſuch zwei Kräfte P und Q ermittelt, welche einander an dieſem Mechanismus das Gleichgewicht halten, ſo kann man hieraus die Erfahrungszahl μ berechnen und nun mit Hülfe derſelben in anderen Fällen die Kraft

$$P = (1 + \mu)\frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2},$$

ſowie die Arbeit

$$L = (1 + \mu)\frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2} = (1 + \mu)\frac{\pi u r}{60} Z$$

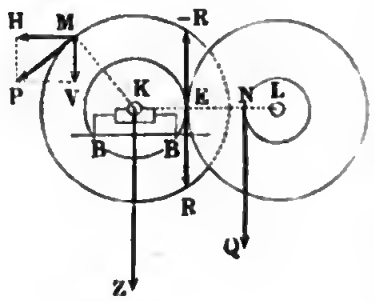
beſtimmen.

Das Dynamometer von Schinz (ſ. Polytechniſches Centralblatt, 1848) iſt von der dynamometriſchen Schnellwage weſentlich nicht verſchieden. Ebenſo Rittinger's verbeſſertes Dynamometer (ſ. die öſterreichiſche Zeitſchrift für Berg- und Hüttenweſen, 1855).

Das dynamometriſche Zapfenlager (ſ. Rittinger's Abhandlung in der öſterreichiſchen Zeitſchrift für Berg- und Hüttenweſen, 1856) beruht auf demſelben Principe wie die dynamometriſche Schnellwage; nur wird hier kein drittes Zahnrad eingeſchaltet, ſondern gleich der verticale Zapfendruck der einen oder anderen Welle ermittelt und hieraus die Umdrehungskraft derſelben berechnet. Zur Beſtimmung dieſes Zapfendruckes Z der Welle

MKE, Fig. 245, kann man ſich am beſten einer Brückenwage bedienen, auf deren Brücke BB die beiden Zapfenlager K der Welle zu ſtellen ſind. Wirkt die Kraft dieſer Welle am Hebelarm $KM = a$, weicht die Richtung derſelben um den Winkel α vom Horizont ab, iſt ferner der Halbmeſſer KE des auf dieſer Welle ſitzenden Zahnrades, $= r$, und wiegt die ganze armirte Welle KEM, $= G$, ſo hat man den durch die Brückenwage zu beſtimmenden verticalen Componenten des Zapfendruckes:

Fig. 245.



$$Z = G + P \sin.\alpha + \frac{a}{r} P = G + \left(\sin.\alpha + \frac{a}{r}\right) P,$$

ſo daß nun die Umdrehungskraft

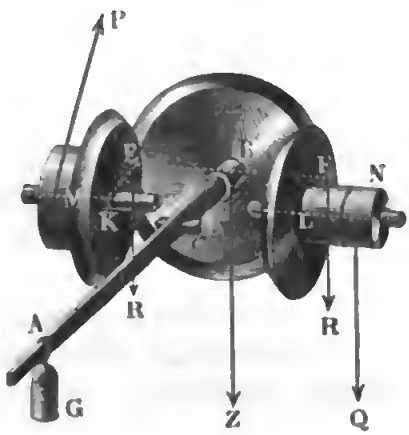
$$P = \frac{Z - G}{\sin.\alpha + \frac{a}{r}}$$

folgt.

Die Beſtimmung dieſer Kraft fällt natürlich um ſo ſchärfer aus, je kleiner das Gewicht G der Welle iſt.

§. 129 **Differenzialdynamometer.** Wenn die Wellen K und L, Fig. 244, deren Umdrehungskraft die dynamometriſche Schnellwage angeben ſoll, nicht neben, ſondern hinter einander liegen, ſo daß ihre Axen in eine Linie fallen, wie Fig. 246 monodimetriſch darſtellt, ſo müſſen die Zahnräder KE und LF eine kegelförmige Geſtalt erhalten, alſo ſogenannte coniſche Räder ſein, wogegen alles Uebrige, wie z. B. die Wage ACB, woran das Mittelrad EF hängt, unverändert bleiben kann. Iſt auch hier Z der von der Wage angegebene Zapfendruck des Rades EF, ſo läßt ſich der Zähnedruck bei E wieder

Fig. 246.



$$R = (1 + \mu)\frac{Z}{2},$$

und folglich die am Hebelarme a wirkende Umdrehungskraft

$$P = (1 + \mu)\,\frac{a}{r}\,\frac{Z}{2},$$

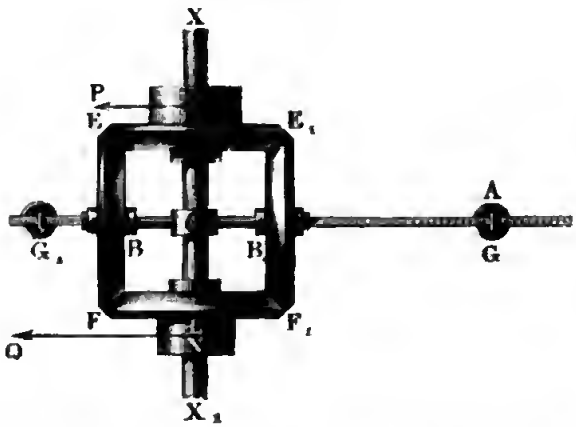
ſowie die Arbeit der Welle

$$L = (1 + \mu)\,\frac{\pi\, u\, r}{60}\,Z$$

ſetzen, inſofern wieder r den Halbmeſſer KE des auf KM ſitzenden Zahnrades, ſowie u die Umdrehungszahl der Welle MK bezeichnet.

Dieſes Dynamometer wird dadurch noch vervollkommnet, daß man Hebel oder Wagebalken ACB mit zwei coniſchen Rädern ausrüſtet, ſo daß das Zahnrad KE der Kraftwelle durch beide Räder auf das Zahnrad LF der Laſtwelle wirken kann. Die allgemeine Einrichtung eines ſolchen Dynamometers iſt aus dem Grundriſſe deſſelben in Fig. 247 zu erſehen. Mit der Krafttrommel M iſt das coniſche Zahnrad EE_1 und mit der Laſttrommel N

Fig. 247.



das coniſche Zahnrad FF_1 feſt verbunden; beide Räder ſitzen loſe auf der feſten Welle XX_1 und ſtehen durch die coniſchen Zahnräder EF und E_1F_1 mit einander in Verbindung. Durch die Kraft P und die Laſt Q und mittels der Räder EE_1 und FF_1 wird das Zahnrad EF bei E und F ab- und dagegen das Zahnrad E_1F_1 bei E_1 und F_1 aufwärts gedrückt.

Der abgebildete Rädermechanismus heißt ein Differenzialgetriebe, weshalb dieſes Dynamometer auch den Namen Differenzialdynamometer erhalten hat.

Iſt R die Größe des Druckes zwiſchen den Zähnen an jeder dieſer vier Stellen, ſo beträgt daher die Wirkung der Räder EE_1 und FF_1 auf den Hebel ACB aus einem abwärts gerichteten Verticaldruck

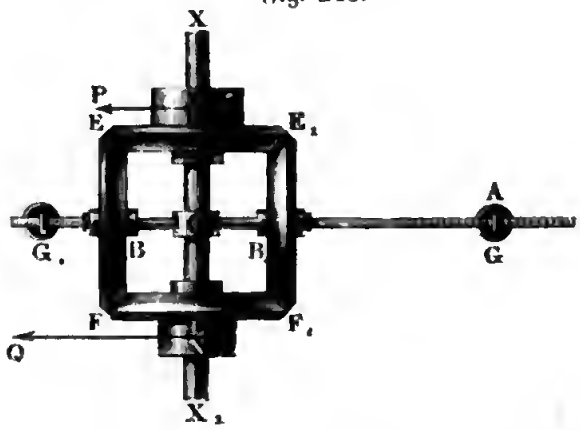
$$Z = 2R \text{ in der Axe } B \text{ des Rades } EF$$

und aus einem aufwärts gerichteten Verticaldruck

$$Z = -\,2R \text{ in der Axe } B_1 \text{ des Rades } E_1F_1.$$

Beide Drücke bilden nun ein Kräftepaar, welchem durch das Laufgewicht G im Punkte A des Hebels und durch den Widerſtand $(-G)$ der Welle

Fig. 248.



XX_1 in C, wo dieſelbe mittels einer Hülſe vom Hebel umſchloſſen wird, das Gleichgewicht zu halten iſt. Sind a_1 und b_1 die Hebelarme CA und $CB = CB_1$ des durch ein Gewicht G_1 gehörig tarirten Wagebalkens ACB, ſo hat man:

$$Ga_1 = Zb_1 + Zb_1 = 2Zb_1 = 4Rb_1;$$

bezeichnet ferner, wie ſeither, a den Hebelarm der Kraft P und r den Halbmeſſer eines Zahnrades EE_1 und FF_1, ſo iſt auch:

$$Pa = Rr + Rr = 2Rr,$$

und daher:

$$P = \frac{r}{a} \cdot 2R = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{G}{2},$$

wobei natürlich nicht auf die Nebenhinderniſſe Rückſicht genommen wird.

Mit Rückſicht auf die Nebenhinderniſſe läßt ſich

$$P = (1 + \mu) \frac{a_1}{b_1} \frac{r}{a} \frac{G}{2},$$

ſowie die mechaniſche Arbeit

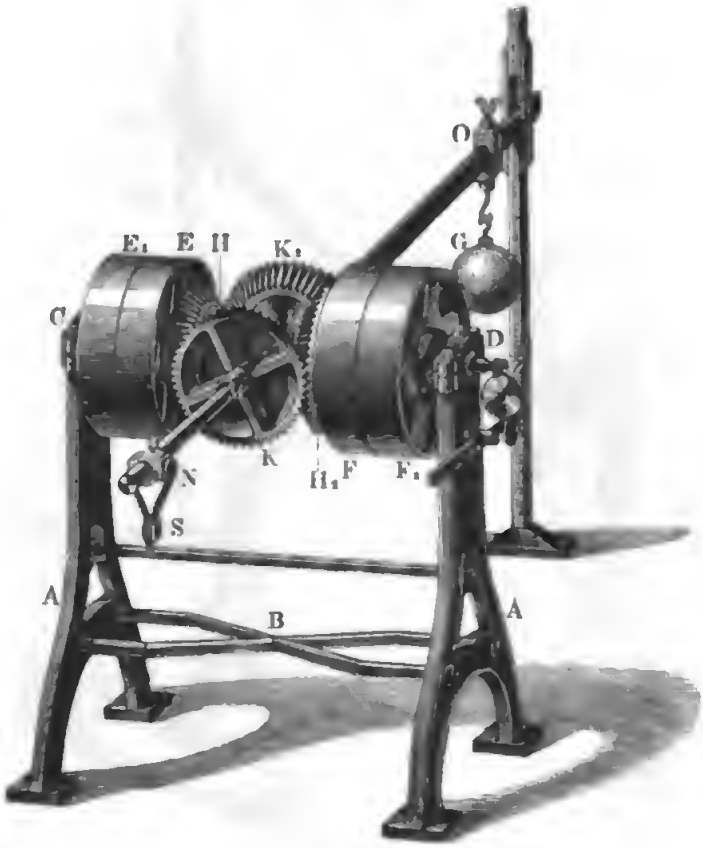
$$L = (1 + \mu) \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\pi u r}{60} G$$

ſetzen.

Nach demſelben Principe ſind die Dynamometer von Batchelder (ſiehe Dingler's Polytechn. Journal, 1844) conſtruirt, deren weſentliche Einrichtung aus der monodimetriſchen Abbildung in Fig. 249 zu entnehmen iſt. Zwei durch ſchmiedeeiſerne Stangen B zuſammengehaltene gußeiſerne Ständer A, A unterſtützen die Zapfenlager C, D der horizontalen Welle CD, welche zwei Paar gleich große Riemenſcheiben E, E_1 und F, F_1, ſowie die coni-

ſchen Räder H, H_1 trägt. Das Rad H iſt mit E, ſowie das Rad H_1 mit F feſt verbunden, und während die erſtere Verbindung feſt auf der

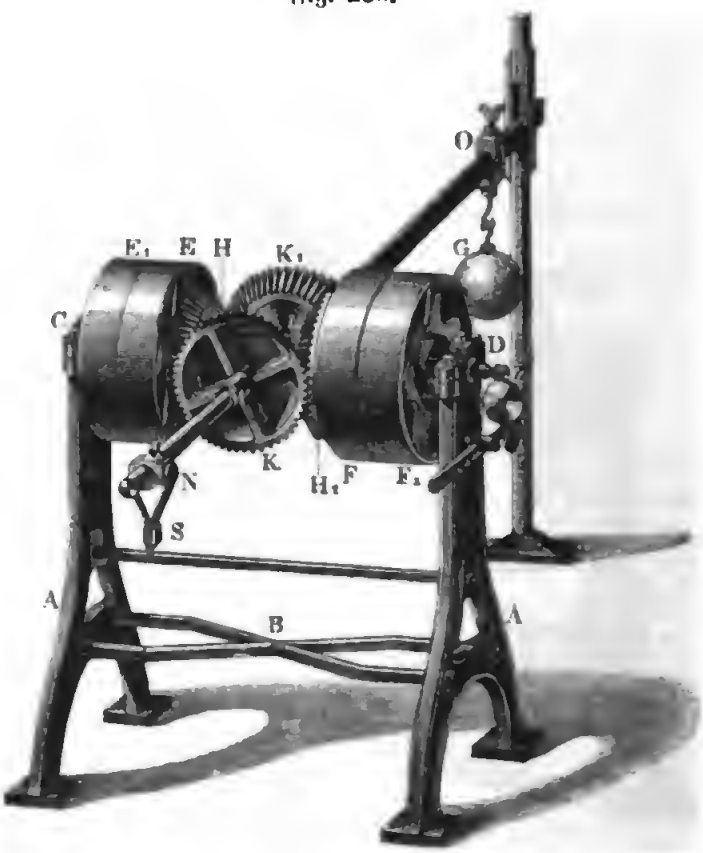
Fig. 249.



Welle CD ſitzt, iſt die letztere, ſowie die Rolle E_1 und die Rolle F_1, loſe auf derſelben. Zwei andere coniſche Räder K, K_1, welche mit den erſteren im Eingriff ſtehen, ſitzen loſe auf der Welle LM, deren Verlängerung LO den Wagebalken mit dem Laufgewichte G bildet. In der Mitte zwiſchen den beiden Rädern K und K_1 bildet die Welle LM eine Hülſe, durch welche die Welle CD hindurchgeht, und an dem Ende N der erſteren Welle iſt ein Haken angebracht, an welchen das dieſe Welle äquilibrirende Tarirgewicht angehangen wird. Endlich iſt Z ein die Anzahl der Umdrehungen angebender Zählapparat, welcher durch das ſchraubenförmig geſchnittene Ende D der Welle CD in Bewegung geſetzt wird. Vor dem Verſuche liegt der Riemen, welcher mit der Kraftmaſchine in Verbindung ſteht, auf der loſen Rolle E_1, und derjenige Riemen, welcher die Laſtmaſchine ergreift, auf der loſen Rolle F_1; bei Beginn des Verſuches werden aber dieſe Riemen auf die Rollen E und F geſchoben, welche mittels der Zahnräder in Verbindung ſtehen, ſo daß dadurch die Kraftmaſchine in den Stand geſetzt wird, mecha-

niſche Arbeit zu verrichten. Wird endlich hierbei durch gehörige Verſchiebung des Laufgewichtes G der Arm LO in horizontaler Lage erhalten, ſo

Fig. 250.



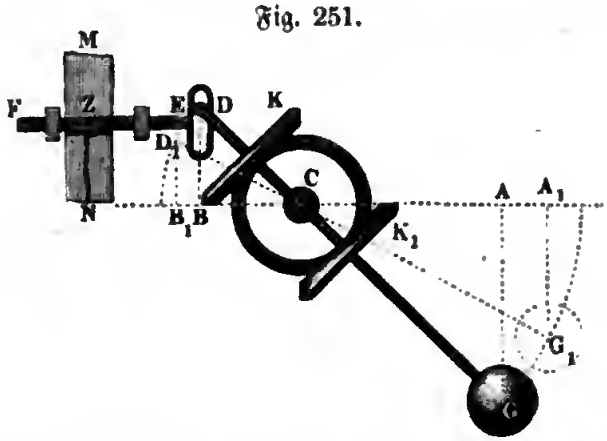
erhält man in G das zur Beſtimmung der Kraft der Maſchine erforderliche Element.

Will man durch dieſes Inſtrument die Arbeit der Maſchine, in welche daſſelbe eingeſchoben worden iſt, unmittelbar angeben oder totaliſiren, ſo kann man ſtatt des Laufgewichtes G in N ein Federdynamometer, wie Fig. 237, anſchließen, und von dem Stift deſſelben auf einen von Z in Bewegung zu ſetzenden Papierſtreifen eine Curve aufzeichnen laſſen.

Zu dieſem Totaliſiren iſt übrigens ein Federdynamometer nicht unbedingt nöthig; man kann auch den Zeichnenſtift durch das Gewicht am Hebel LO ſelbſt in Bewegung ſetzen laſſen. Ein ſolches Dynamometer, bei welchem der Zeichnenſtift durch das die Kraft der Maſchine beſtimmende Gewicht bewegt wird, iſt dem Mechaniker J. Wagner in Paris (ſchon im J. 1837) patentirt worden. Die weſentliche Einrichtung eines ſolchen Zeichnenapparates iſt aus Fig. 251 zu erſehen. Der Wagebalken, welcher eine Verlängerung der Umdrehungsaxe der coniſchen Räder K, K_1 bildet, iſt um C drehbar und hat eine geneigte

Lage CG, ferner iſt an dem anderen Ende der gedachten Drehungsaxe ein Frictionsrädchen D angebracht, welches von dem ringförmigen Kopfe E einer Stange EF, woran der Zeichnenſtift Z befeſtigt iſt, ergriffen wird.

Fig. 251.



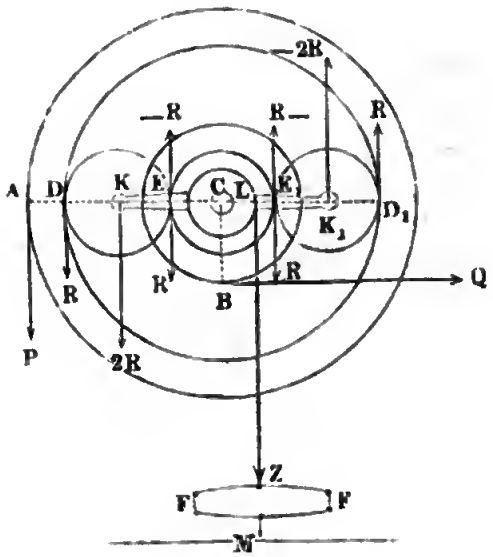
Wenn nun unter dem letzteren der Papierſtreifen MN mittels der Maſchine oder eines chronometriſchen Apparates hinbewegt wird, ſo zeichnet dieſer Stift die Arbeitscurve der Maſchine auf, zwiſchen welche letztere die beiden coniſchen Räder K, K_1 ſammt Hebel DG eingeſchaltet ſind. Aendert ſich die Kraft, ſo nimmt der Arm CG eine andere Neigung an, wobei der Hebelarm CA in CA_1 übergeht und ſich um eine gewiſſe Größe AA_1 ändert, welche nicht allein der Veränderung der Kraft, ſondern auch der Projection BB_1 vom Wege DD_1 des Hebelendes D in der Richtung von CA, proportional iſt, ſo daß folglich auch die Verſchiebung der Stange EF ſammt Stift Z mit der Aenderung der Kraft gleichmäßig zu- und abnimmt.

§. 130

Ein, wie es ſcheint, ſehr zweckmäßiges Dynamometer für Arbeitsmaſchinen mit Zähl- und Zeichnenapparat beſchreibt Herr Dr. E. Hartig im Polytechniſchen Centralblatt, 1857. Nro. 1, und es iſt das Princip dieſes Inſtrumentes aus Folgendem zu erſehen. Mit dem Rade CA, Fig. 252 (a. f. S.), woran die Umdrehungskraft wirkt, iſt ein innen verzahntes Rad DCD_1 feſt verbunden, und das letztere greift bei D und D_1 in zwei gleiche Zahnräder DE, D_1E_1 ein, welche gemeinſchaftlich auf ein drittes Zahnrad EE_1 wirken. Dieſes Rad ruht loſe auf der Welle C des Rades DD_1 und iſt mit der Trommel BC_1, woran die Laſt Q wirkt, in feſter Verbindung, wogegen die Räder DE, D_1E_1 mit ihren Axen auf einem Hebel KCK_1 ſitzen, welcher ſich frei um C drehen läßt. Mit dem letzteren iſt eine Rolle CL verbunden, um welche ein Riemen liegt, welcher an das bei M befeſtigte Federdynamometer FF angeſchloſſen iſt. Es läßt ſich leicht einſehen, daß hier der Umdrehungskraft P durch zwei Kräfte, R, $-R$, das Gleichgewicht gehalten wird, daß aus den letzteren wieder ein Kräftepaar,

— R, R, entſteht, welches ſich mit der Laſt Q ins Gleichgewicht ſetzt, und daß in Folge deſſen in den Axpunkten K und K_1, die Kräfte $2R$ und $-2R$ wirken und das Federdynamameter mit einer gewiſſen Kraft Z ſpannen.

Fig. 252.



Iſt a der Hebelarm CA der Kraft,

b der Hebelarm CB der Laſt,

r der Halbmeſſer CD $= CD_1$ des größeren,

r_1 der Halbmeſſer CE $= CE_1$ des kleineren, alſo

$\frac{r - r_1}{2}$ der Halbmeſſer $KD = K_1 D_1$ eines der beiden Zwiſchenräder, und

c der Hebelarm CL der Spannkraft Z, ſo hat man:

$Pa = 2Rr$, $Qb = 2Rr_1$

und

$$Zc = 2R(r + r_1);$$

daher:

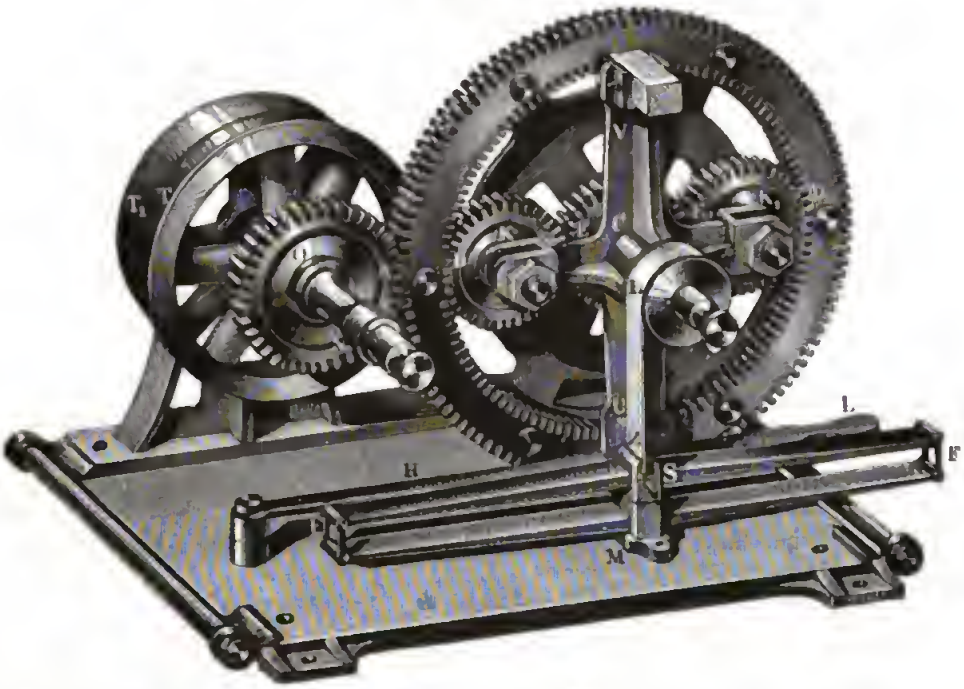
$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{b}{a} \text{ und}$$

$$\frac{P}{Z} = \frac{r}{r + r_1} \cdot \frac{c}{a}.$$

In der monodimetriſchen Abbildung, Fig. 253, dieſes Inſtrumentes ſieht man noch bei T und T_1 die feſte und loſe Riemenſcheibe, ſowie in O das Zahnrad, wodurch die von der letzteren aufgenommene Kraft auf das außen und innen gezahnte Rad ADD_1 übergetragen wird. Auch bemerkt man bei N die Schraube, womit der (nicht abgebildete) Zähl- oder Zeichnenapparat in Bewegung geſetzt wird. Die Arme KC und K_1C, welche die in die Verzahnungen DD_1 und EE_1 eingreifenden Zahnräder DK, D_1K_1 tragen, bilden mit zwei anderen Armen U und V, ſowie mit der auf der Welle des Rades EE_1 loſe ſitzenden Trommel CL ein Ganzes. Letztere iſt durch den Riemen LZ mit den dynamometriſchen Federn FF verbunden, deren eine den Stift S trägt, welcher auf dem vorbeilaufenden Papierſtreifen eine Curve aufzeichnet. Durch den in das Armende U eingreifenden Hebel HL kann die Thätigkeit des Inſtrumentes nach Belieben hervorgerufen und

aufgehoben werden. Um das übermäßige Anſpannen der Federn zu verhindern, iſt das Ende des Armes CV mit einem ſtarken Holzdaumen verſehen,

Fig. 253.



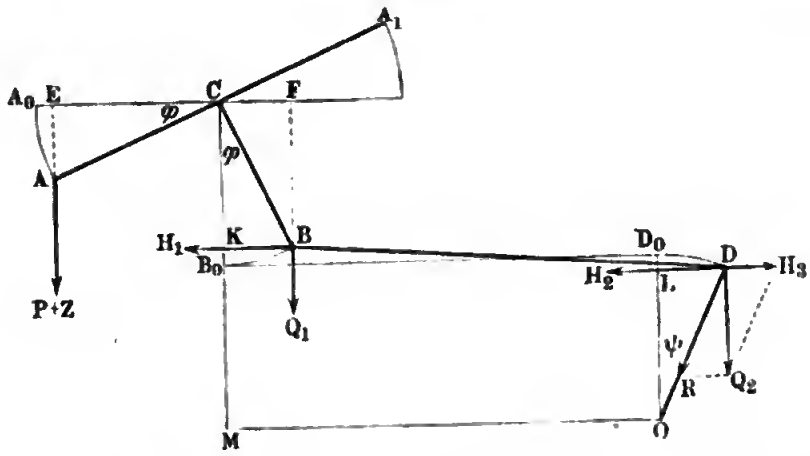
welcher ſich bei einer gewiſſen Stellung des Kreuzes KUK_1V gegen ein feſtes Hinderniß ſtemmt.

Anmerkung. Bentall's Dynamometer mit Spiralfedern ſind in Dingler's Journal Bd. 167 (1863), vom Herrn M. Eyth beſchrieben.

Horizontal-Dynamometer. Zum Meſſen horizontaler Kräfte von §. 131
mäßiger Größe läßt ſich das vom Herrn Profeſſor Schönemann erfundene Horizontal-Dynamometer mit Vortheil anwenden. Deſſen weſentliche Einrichtung beſteht in Folgendem: ACA_1 (Fig. 254 a. f. S.) iſt ein gewöhnlicher, um C drehbarer Wagebalken und BD iſt die zur Aufnahme der zu meſſenden Kraft dienende Tafel- oder Wagſchale, welche mit dem einen Ende B auf dem Ende eines mit dem Wagbalken feſt verbundenen Armes CB und mit dem anderen Ende D auf dem Kopfe eines um O drehbaren Tragarmes OD ruht. Natürlich müſſen die Stützpunkte A, B, C, D und O in ſogenannte Schneiden beſtehen. Beim Einſpielen der Wage hat die Tafel BD die horizontale Lage B_0D_0 und ſind die Arme CB und OD in den verticalen Stellungen CB_0 und OD_0. Bei dieſem Stande der Wage werden die verticalen Kräfte und Gewichte der Wage mittels der Arme B_0C und D_0O direct auf die feſten Stützpunkte C und O übergetragen, dagegen wirkt die Horizontalkraft der Tafel BD mittels des Hebelarmes CB_0 auf den Wagebalken

ACA_1 und ſucht denſelben um C zu drehen. Iſt nun H die Größe dieſer Horizontalkraft, P die Größe des Gewichtes in A_0, welches dieſer Kraft das

Fig. 254.



Gleichgewicht hält, und ſind b und a die Hebelarme CB_0 und CA_0 dieſer Kräfte, ſo hat man $Pa = Hb$, und daher einfach die Horizontalkraft der Tafel B_0D_0:

$$H = \frac{a}{b}P.$$

Die Zulage Z zu P bewirkt einen Ausſchlag $A_0CA = \varphi$ des Wagebalkens, welcher unter der Vorausſetzung, daß er nur wenige Grade beträgt, wie folgt, zu beſtimmen iſt. Die ſämmtlichen Kräfte und Gewichte der armirten Brücke oder Tafel BD kann man auf bekannte Weiſe auf zwei Verticalkräfte Q_1 und Q_2 und zwei Horizontalkräfte H_1 und H_2 zurückführen, welche in B und D ihre Angriffspunkte haben. Ferner läßt ſich der horizontale Ausſchub LD des Stützpunktes D gleich dem horizontalen Ausſchub KB des Stützpunktes B ſetzen; bezeichnet man die Armlänge $OD = OD_1$ durch r und den Drehungswinkel D_0OD, welcher dem Ausſchlag $B_0CB = A_0CA = \varphi$ entſpricht, durch ψ, ſo hat man folglich

$$r\,sin.\,\psi = b\,sin.\,\varphi, \text{ daher}$$

$$sin.\,\psi = \frac{b}{r}\,sin.\,\varphi, \text{ auch annähernd } \psi = \frac{b}{r}\varphi.$$

Da beim Ausſchlagen der Wage, B_0 um $B_0K = b\,(1 - cos.\,\varphi) = 2\,b\left(sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{b\varphi^2}{2}$ ſteigt und D_0 um $D_0L = r\,(1 - cos.\,\psi) = \frac{r\psi^2}{2} = \frac{b^2\varphi^2}{2r}$ fällt, ſo iſt bei der Länge $BD = l$ der Tafel, für den Neigungswinkel μ derſelben:

$$sin.\mu = \frac{B_0K + D_0L}{BD} = \frac{br\varphi^2 + b^2\varphi^2}{2rl} = \frac{(b+r)\,b}{2rl}\varphi^2.$$

Wegen des Factors φ^2 läßt ſich daher annähernd $\mu = o$ ſetzen, iſt alſo anzunehmen, daß die Tafel während eines kleinen Ausſchlages φ nahe horizontal bleibt. Von der Verticalkraft O_2 des Punktes D nimmt der Stützpunkt O den Componenten $R = \frac{Q_2}{cos.\,\psi}$ auf, während ſich der horizontale Component $H_1 = Q_2\ tang.\,\psi$ mit der Horizontalkraft H_2 vereinigt, ſo daß die ganze Horizontalkraft in D:

$$H_2 - H_3 = H_2 - Q_2\ tang.\,\psi \text{ annähernd}$$
$$= H_2 - \frac{Q_2\,b\,\varphi}{r} \text{ übrig bleibt.}$$

Da nun BD annähernd horizontal iſt, ſo kann man auch annehmen, daß dieſe Kraft von BD aufgenommen und bis B fortgepflanzt werde. Dieſem zu Folge wirkt in B am Hebelarm $\overline{CK} = \overline{CB}\,cos.\,B_0CB = b\,cos.\,\varphi$ die geſammte Horizontalkraft $H_1 + H_2 - H_3 = H_1 + H_2 - \frac{Q_2\,b\,sin.\,\varphi}{r}$, ſowie am Hebelarm $\overline{CF} = b\,sin.\,\varphi$ die Verticalkraft Q_1 der am Hebelarm $\overline{CE} = a\,cos.\,\varphi$ wirkenden Kraft des Wagbalkens ACA_1 entgegen, und es iſt nun zu ſetzen:

$$(P + Z)\,a\,cos.\,\varphi = \left(H_1 + H_2 - Q_2\frac{b\,sin.\,\varphi}{r}\right)b\,cos.\,\varphi + Q_1\,b\,sin.\,\varphi,$$

oder

$$(P + Z)\,a = (H_1 + H_2)\,b + Q_1\,b\,tang.\,\varphi - \frac{Q_2\,b^2}{r}\,sin.\,\varphi \text{ annähernd}$$
$$= (H_1 + H_2)\,b + \left(Q_1 - \frac{b}{r}\,Q_2\right)b\,\varphi.$$

Nun iſt aber für $\varphi = 0$,

$$Pa = (H_1 + H_2)\,b = Hb, \text{ daher hat man}$$

$$Za = \left(Q_1 - \frac{b}{r}\,Q_2\right)b\,\varphi, \text{ und den geſuchten Ausſchlag}$$

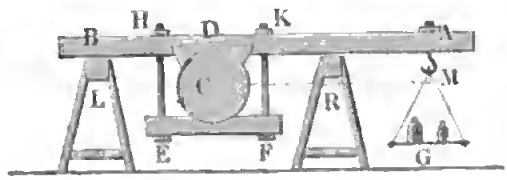
$$\varphi = \frac{Za}{\left(Q_1 - \frac{b}{r}\,Q_2\right)b}.$$

Es wächſt alſo hier wie bei der gemeinen Wage der Ausſchlag direct wie die Zulage, wie die Armlänge a u. ſ. w.

Anmerkung. Die Monographie: Das Horizontal-Dynamometer und ſeine Anwendung auf die Mechanik von Th. Schönemann, Berlin 1864 giebt eine ausführliche Theorie und Beſchreibung dieſes Inſtrumentes, und behandelt auch mehrfache Anwendungen deſſelben. Vorſtehendes iſt nur ein kurzer möglichſt populär gehaltener Abriß der Theorie deſſelben.

§. 132 **Bremsdynamometer.** Das Bremsdynamometer, der Prony'ſche Zaum (franz. frein dynamométrique; engl dynamometrical break, Friction Dynamometer), wird angewendet, um die Kraft der Arbeit einer umlaufenden Welle oder einer rotirenden Maſchine überhaupt zu ermitteln. In ſeiner einfachen Geſtalt beſteht dieſes Inſtrument aus einem Balken AB, Fig. 255, mit einer Wagſchale AG, und aus zwei hölzernen Zirkelſtücken D und EF, welche durch Schraubenbolzen EH und FK auf die umlaufende Welle C ſtark aufgedrückt werden. Soll mit Hülfe dieſer Vorrichtung die Kraft der Welle C bei einer beſtimmten Winkelgeſchwindigkeit oder Umdrehungszahl gefunden werden, ſo legt man ſo viel Gewicht G auf die Wagſchale und zieht die Schraubenmuttern H und K ſo ſtark an, daß nicht allein die Welle die verlangte Umdrehungszahl annimmt, ſondern auch der Hebel oder Balken AB horizontal und frei, d. i. ohne auf einem der beiden Böcke L und R zu ruhen, ſchweben bleibt. Dann wird die ganze Arbeit der Maſchine von der Reibung zwiſchen den Bremsbacken und dem Wellenumfange conſumirt, und es iſt daher die Arbeit derſelben der geſuchten Leiſtung gleich zu ſetzen. Da nun noch der Hebel frei hängt, ſo hält nur die in der Umdrehungsrichtung wirkende Reibung F dem aufgelegten Gewichte das Gleichgewicht, und es läßt ſich jene Reibung aus dieſem Gewichte leicht finden. Setzen wir den Hebelarm $\overline{CM}$ des Gewichtes G in Hinſicht auf die Wellenaxe, $= a$, ſo iſt das ſtatiſche Moment des Gewichtes und alſo auch das Reibungsmoment oder auch die Reibung, wenn man ſie am Halbmeſſer Eins wirkſam annimmt, $= Ga$; bezeichnet daher noch ε die Winkelgeſchwindigkeit der Welle, ſo hat man ihre mechaniſche Arbeit (pr. Secunde):

Fig. 255.



$$L = Pv = Ga \cdot \varepsilon = \varepsilon a G.$$

Iſt u die Umdrehungszahl der Welle pr. Minute, ſo läßt ſich

$$\varepsilon = \frac{2\pi u}{60} = \frac{\pi u}{30},$$

daher die geſuchte Arbeit

$$L = \frac{\pi u a}{30} G$$

ſetzen.

Uebrigens hat man unter G nicht allein das aufgelegte Gewicht, ſondern auch noch das auf den Aufhängepunkt der Wagſchale reducirte Gewicht des aufgeſetzten Apparates zu verſtehen. Um das letztere zu ermitteln, legt man den Apparat mit D auf eine ſcharfe Schneide und hängt denſelben bei A mittels einer Schnur an einer Wage auf.

Damit ein Bremsdynamometer wie eine gewöhnliche Gewichtswage Stabilität beſitze, ſoll man den Aufhängepunkt A des Gewichtes G oder der Wagſchale in einer Schneide beſtehen laſſen, und denſelben nicht, wie in Fig. 256, über, ſondern, wie in Fig. 257, unter die Axe C der Welle legen. Wenn bei der letzteren Anordnung das Gewicht G ſinkt oder ſteigt,

Fig. 256.

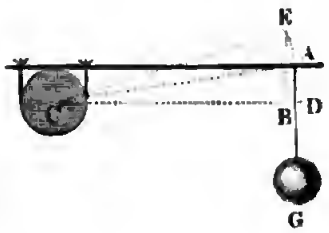
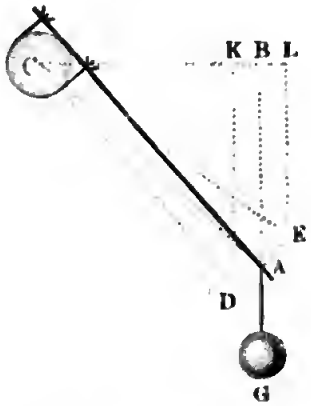


Fig. 257.



und dabei der Aufhängepunkt A nach D oder E kommt, ſo nimmt der Hebelarm CB ab oder zu, ſo daß zuletzt das Plus oder Minus von G durch das Minus BK oder Plus BL von CB ausgeglichen wird, und ſich der Hebel CA von ſelbſt ins Gleichgewicht bringt. Bei der erſteren Auflegung (Fig. 256) findet dagegen mit der Zu- oder Abnahme von G auch eine Zu- oder Abnahme vom Hebelarme $\overline{CB} = a$ Statt, und es kann ſich daher der Hebel CA nicht von ſelbſt ins Gleichgewicht ſtellen.

Um den Zapfendruck nicht zu vergrößern, iſt es zweckmäßig, zwei Bremsdynamometer AB, A_1B_1, Fig. 258, anzuwenden, oder den einfachen Brems durch eine Kraft $G_1 = G$ in B_1 zu unterſtützen.

Zweckmäßiger iſt das in Fig. 259 abgebildete Bremsdynamometer mit einem gußeiſernen Bremsringe DEF, der durch drei Paar Schrauben S, T, U auf jede Welle, wenn ſie nicht ſehr ſtark iſt, aufgeſchraubt werden

Fig. 258.

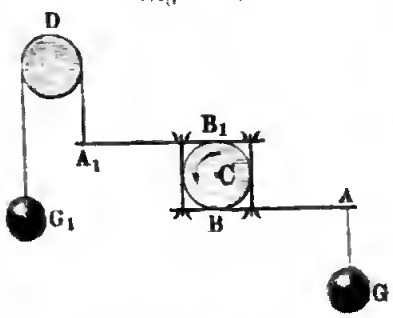
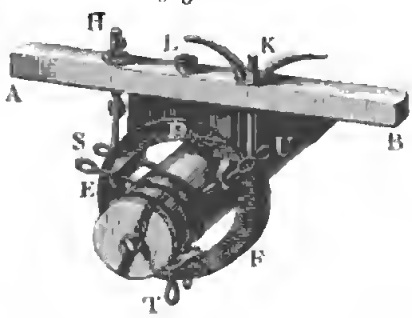


Fig. 259.



kann. Bei dieſem Apparate iſt auch das untere Holzſtück durch ein eiſernes Band erſetzt, das die Hälfte des zu dieſem Zwecke rinnenförmig ausgenom-

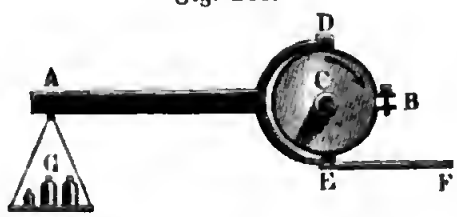
menen Bremsringes umgiebt. Uebrigens endigt ſich dieſes Band in zwei durch den Balken AB gehenden Bolzen und läßt ſich durch eine oder zwei Schraubenmuttern, wie z. B. K, beliebig ſtark an den Bremsring andrücken. Um das Verkohlen des Holzes oder die allzugroße Erwärmung des Eiſens zu verhindern, wird den Reibungsflächen durch das Loch L und mittels eines Trichters Oel oder Waſſer zugeführt. Dieſe Apparate ſind in Deutſchland unter dem Namen „Egen's Bremsdynamometer“ bekannt.

Beiſpiel. Um die Leiſtung eines Waſſerrades zu finden, hat man auf die Welle deſſelben ein Bremsdynamometer aufgeſetzt, und während der vollkommenen Regulirung des Aufſchlagwaſſers bei der vorgeſchriebenen Umdrehungszahl $u = 6$ pr. Minute gefunden: Aufgelegtes Gewicht nebſt dem reducirten Gewichte vom Inſtrumente, $G = 530$ Pfund, Armlänge von dieſem Gewichte, $a = 10{,}5$ Fuß. Hieraus berechnet ſich nun die effective Leiſtung dieſes Waſſerrades bei der verlangten Geſchwindigkeit:

$$L = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 10{,}5}{30} \cdot 530 = 3497 \text{ Fußpfund} = 7{,}29 \text{ Pferdekräfte.}$$

§. 133. Man hat in den neueren Zeiten ſehr mannigfaltige mehr oder weniger vollkommene und zum Theil ſehr complicirte Bremsdynamometer in Anwendung gebracht. Hier ſei jedoch nur von den einfachſten Vorrichtungen dieſer Art die Rede. Fig. 260 repräſentirt ein von Armſtrong angewendetes Dynamometer. Dieſes beſteht aus einem eiſernen Ringe, welcher durch eine Schraube B ſcharf auf die umſchloſſene Welle C aufgedrückt wird, und aus einem Hebel ADE, welcher auf der einen Seite eine Wagſchale zur Aufnahme von Gewichten G trägt, und auf der anderen Seite in einer Gabel ausläuft, welche zwei aus dem Ringe hervorragenden Naſen ergreift. Um dieſes Inſtrument bequem handhaben zu können, iſt der eine Schenkel der Gabel noch um ein Stück EF verlängert Die Ausführung und Berechnung der Verſuche mit dieſem Inſtrumente weichen von denen mit dem einfachen Bremsdynamometer nicht ab.

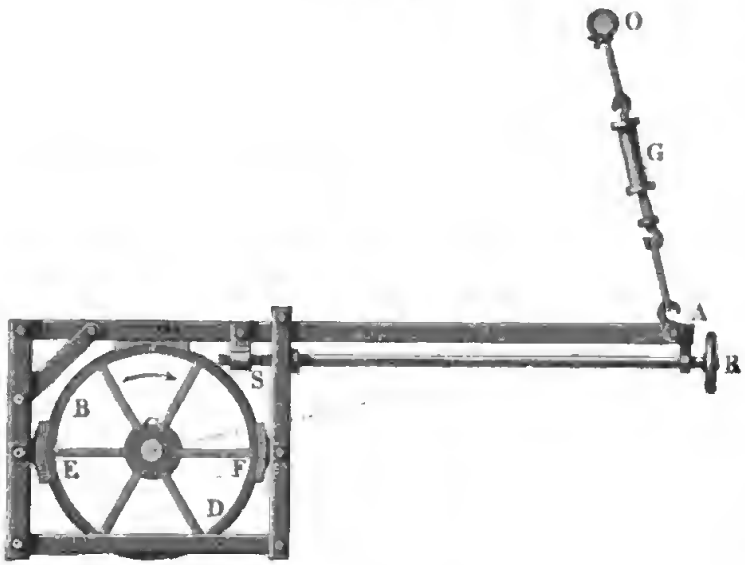
Fig. 260.



Ein kleines aus Walzeiſenſtäben von $2^3/_4$ Zoll Breite und 1 Zoll Dicke zuſammengeſetztes Dynamometer, Fig. 261, hat der Herr Oberinſpector Tauberth zur Beſtimmung der Leiſtung einer Dampfmaſchine von fünf Pferdekräften angewendet. Dieſes Dynamometer wurde auf die Riemenſcheibe BD aufgelegt, welche auf der $4^1/_8$ Zoll dicken Welle C ſaß, und das Aufdrücken der Bremsbacken E, F auf die Scheibe BD erfolgte durch Umdrehen der Schraube S mittels der Handhabe R. Die Kraft wurde durch eine Federwage, wie Fig. 232, gemeſſen, wobei dann CA, $118^3/_4$ Zoll maß (ſiehe „Civilingenieur“, Band III, 1856).

Wenn man die Kraft durch ein Federdynamometer mißt, ſo kann man auch ſehr leicht durch Anwendung eines Zeichnen- oder Zählapparates die Arbeit der Maſchine mittelst des Bremsdynamometers totaliſiren oder unmittelbar angeben. Nach Navier's Vorſchlag beſtimmt man die Kraft einer umlaufenden Welle auch dadurch, daß man ein eiſernes Band um dieſelbe legt, das eine Ende deſſelben an ein Federdynamometer anſchließt, das andere Ende aber durch Gewichte ſo ſtark ſpannt und dadurch am Umfange der Welle ſo viel Reibung erzeugt, bis die Welle eine verlangte Umdrehungsgeſchwindigkeit annimmt. Die Differenz zwiſchen dieſem Gewichte Q und der von dem Federdynamometer angegebenen Kraft P iſt jedenfalls der Reibung F zwiſchen der Welle und dem Bande gleich; mißt nun noch der Umfang der Welle, $= p$ und macht die Welle während des Verſuches u Umdrehungen pr. Minute, ſo erhält man die Leiſtung der Welle:

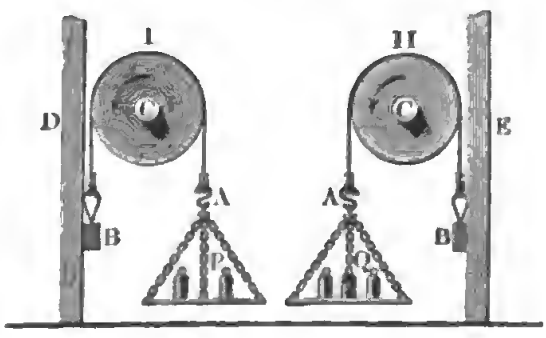
Fig. 261.



$$L = F \cdot \frac{up}{60} = \frac{up}{60}(Q - P).$$

In Ermangelung eines Federdynamometers reicht der einfache Gurt, Fig. 262, zu dieſem Zwecke noch aus, wenn man den Verſuch doppelt macht, und dabei das eine Ende B des Gurtes bald auf der einen Seite der Welle, bald auf der anderen Seite an einem feſten Gegenſtande, z. B. an den Säulen D und E befeſtigt. Hier bekommt man durch den einen Verſuch

Fig. 262.



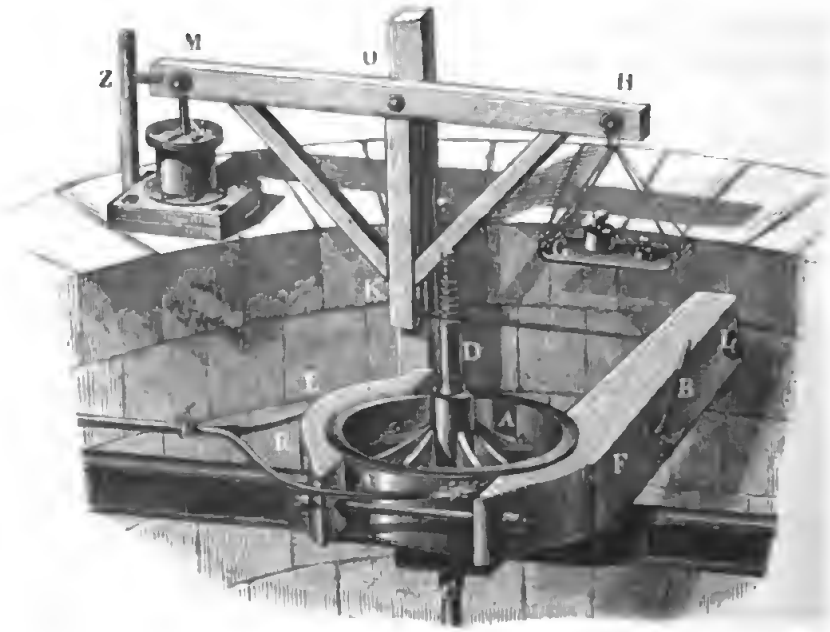
$$Q = P + F,$$

durch den anderen aber P, weil

in dem einen Falle die in der Umdrehungsrichtung der Welle wirkende Reibung F dem Gewichte auf der am Ende A hängenden Wagſchale entgegenwirkt, und in dem anderen ihm zu Hülfe kommt. Uebrigens iſt bei dieſer zuerſt vom Verfaſſer in Anwendung gebrachten Vorrichtung die Beſtimmung der Leiſtung die obige. Dieſe Vorrichtung läßt ſich, weil die Kraft immer nur an einem kleinen Hebelarme wirkt, nur zur Beſtimmung kleiner Leiſtungen anwenden. Um Leiſtungen ſtärkerer Maſchinen zu finden, hat der Verfaſſer ſtatt der Wagſchale in A den Laſtpunkt einer einfachen Decimalwage angeſchloſſen, und dadurch die Spannung des Gurtes verzehnfacht. Damit durch Auflegen dieſes Gurtdynamometers der Zapfendruck nicht zu ſehr vergrößert werde, und ſich daſſelbe auch bei größeren Kräften anwenden laſſe, kann man auch den Gurt ganz um die Welle ſchlingen, und das eine Ende nach oben, das andere aber nach unten richten.

§. 134 Kommt es darauf an, die Umdrehungskraft einer ſtehenden Welle, z. B. die einer Turbine, durch ein Bremsdynamometer auszumitteln, ſo kann man natürlich die Schale für die aufzulegenden Gewichte nicht unmittelbar an den Bremshebel hängen, ſondern man muß eine Leitrolle oder einen Winkelhebel zwiſchen einſetzen, wodurch die Verticalkraft, mit welcher dieſe Gewichte niederziehen, in eine den Bremsarm ergreifende Horizontalkraft verwandelt wird. Eine monodimetriſche Projection eines ſolchen Bremsdynamometers für eine ſtehende Welle führt Fig. 263 vor Augen. Dieſes Dynamometer hat Herr Francis bei ſeinen hydrauliſchen Verſuchen (Lowell hydraulic

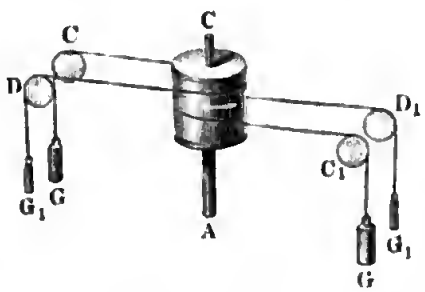
Fig. 263.



experiments) zur Beſtimmung der Leiſtung einer Turbine von 75 Pferdekräften angewendet. (S. die deutſche Bearbeitung der Schrift über dieſen Gegenſtand im „Civilingenieur“ Band II). Es iſt AA das gußeiſerne Frictions- oder Bremsrad von $5\frac{1}{2}$ Fuß Durchmeſſer und $2\frac{1}{4}$ Fuß Höhe, welches ſtatt des Vorlegerades auf die Turbinenwelle CD aufgeſteckt und mit derſelben feſt verbunden iſt. Die mit Eiſen beſchlagenen Bremsbacken E, F werden durch zwei Schraubenbolzen von 2 Quadratzoll Querſchnitt mittels des Hebels B auf das Bremsrad AA aufgepreßt, und es iſt das Ende des längeren Bremsbackens F durch eine eiſerne Zugſtange KL mit dem Winkelhebel KOH verbunden, an deſſen horizontalem Arme OH die Wagſchale G zur Aufnahme der Gewichte hängt. Um die großen Schwankungen des Dynamometers u. ſ. w. zu verhindern, iſt an einem dritten Arme OM des Winkelhebels KOH ein hydrauliſcher Moderator, und, um die Abweichung des Armes HM von der horizontalen Lage anzugeben, ein an einer Scala auf- und niedergehender Zeiger Z angebracht. Der Moderator beſteht in der Hauptſache aus einem Teller, welcher in dem mit Waſſer angefüllten Gefäße N auf- und niederbewegt wird, wobei das Waſſer bald über, bald unter denſelben zu treten genöthigt iſt. Um der zu großen Erhitzung des Kranzes vorzubeugen, werden mittels der gegabelten Röhre R Waſſerſtrahlen gegen die freie Außenfläche des Bremsrades AA geführt.

Um die Leiſtungen kleiner Maſchinenkräfte zu ermitteln, kann man auch eine Methode anwenden, welcher ſich der Verfaſſer bei dynamometriſchen Meſſungen an Modellrädern bedient hat (ſ. meine Verſuche über den Stoß des Waſſers, berichtet vom Herrn Prof. Zeuner im „Civilingenieur“, Bd. I, 1854). Um eine Trommel B, Fig. 264, welche auf der umlaufenden Welle AC, deren Kraft man meſſen will, ſitzt, werden zwei Riemen, Seile oder Schnüre ſo gelegt, daß die beiden Enden der letzteren entgegengeſetzte Richtungen haben. Dieſe Seilenden laufen außerdem noch über die Leitrollen C, C_1 und D, D_1 und ſind durch Gewichte G, G und G_1, G_1 geſpannt. Wenn nun die Gewichte G und G_1 einer Schnur in Vereinigung mit der Reibung derſelben am Umfange der Trommel einander das Gleichgewicht halten, ſo iſt folglich die ganze Umdrehungskraft der Trommel:

Fig. 264.



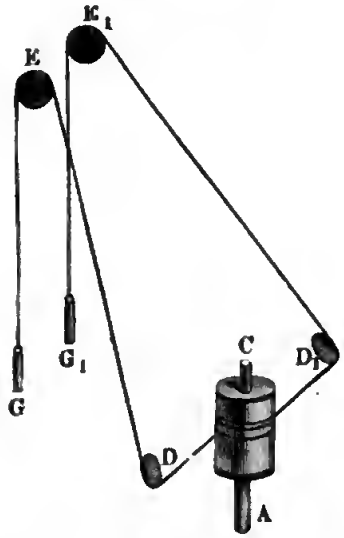
$$P = 2(G - G_1),$$

wobei natürlich G das größere, der Umdrehungsbewegung entgegengeſetzt ziehende, und G_1 das kleinere, in der Richtung der Umdrehung wirkende Gewicht bezeichnet.

Anmerkung 1. Man kann auch die Drehungskraft einer Welle unmittelbar durch Gewichte beſtimmen, welche man an das Ende eines Seiles oder einer Schnur hängt, welche ſich auf die umlaufende Welle aufwickelt. Bei meinen dynamometriſchen Verſuchen an Modellrädern, (ſ. Weisbach's Verſuche über die Leiſtung eines einfachen Reactionsrades, Freiberg, 1851) habe ich, um den Seitendruck durch die meſſende Kraft ſo viel wie möglich herabzuziehen, von der umlaufenden Welle AC, Fig. 265, zwei gleiche Gewichte G, G_1 auf einmal beben und zu dieſem Zwecke die Schnüre, an welchen dieſe Gewichte hängen, mittels der Rollen D, E und D_1, E_1 auf entgegengeſetzten Seiten und in entgegengeſetzten Richtungen auf die Trommel B aufwickeln laſſen.

Eigentlich iſt auch das Dynamometer, womit man die Arenkraft der Schraubendampfſchiffe beſtimmt, hierher zu rechnen; es ſtemmt ſich hier die Welle der Waſſerſchraube gegen einen Hebel, deſſen längerer Arm mit einem ſpiralförmigen Federdynamometer und einem Zeichenapparat verbunden iſt, welcher die Arbeit der Kraft auf den Mantel eines umlaufenden Cylinders verzeichnet (ſiehe The indicator and dynamometer etc., London 1847).

Fig. 265.

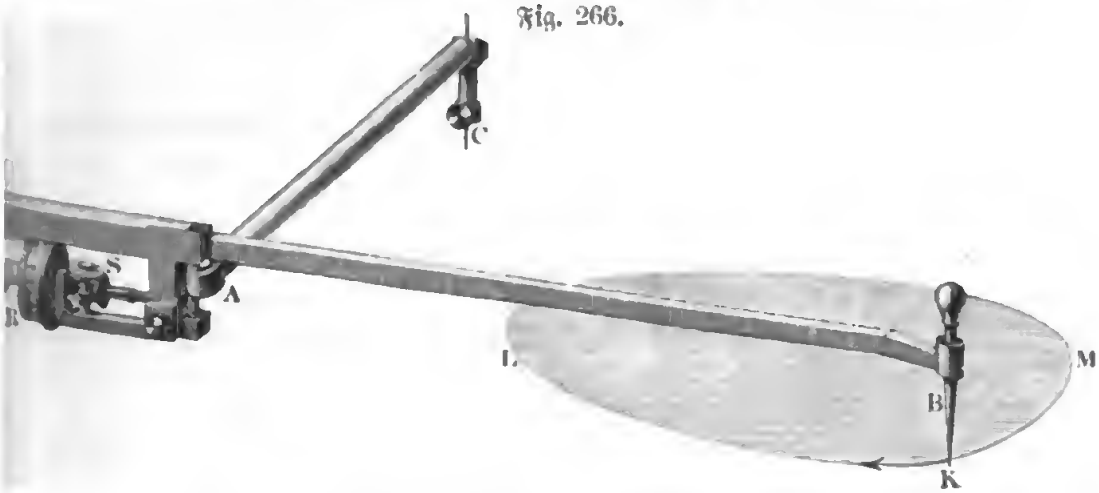


Anmerkung 2. Ueber die verſchiedenen Dynamometer zum Meſſen der Maſchinenkräfte handelt Egen in ſeinen Unterſuchungen über den Effect einiger Waſſerwerke u. ſ. w., nächſtdem Hülſſe im Artikel „Bremsdynamometer" in der allgemeinen Maſchinenencyclopädie. Die Literatur über dieſen Gegenſtand findet man in dieſen beiden Abhandlungen vollſtändig angegeben. Wir haben hier nur noch die neueſten Aufſätze im 88., 92. und 110. Bande von Dingler's Journal anzuführen. Beſonders zeichnen ſich die ſich ſelbſt regulirenden Dynamometer nach Poncelet, Saint-Leger u. ſ. w. aus, welche durch angebrachtes Räderwerk die Schrauben von ſelbſt anziehen oder löſen, je nachdem der Hebel zu ſinken oder zu ſteigen anfängt. Ueber Federdynamometer iſt auch nachzuſehen: Notions fondamentales de Mécanique, par Morin, Paris 1855; ſowie über Dynamometer überhaupt: Prechtl's Technologiſche Encyclopädie, ferner Hachette: Traité élémentaire des machines Beſondere Abhandlungen über dieſen Gegenſtand ſind oben an den betreffenden Stellen citirt worden. Ueber die Dynamometer mit Regiſtrirapparat von Meiſen, Neury und Matter ſ. Civilingenieur, Bd. VIII, 1862.

§. 135 **Planimeter.** Bei Anwendung des Zeichenapparates zu dynamometriſchen Verſuchen kann man die Beſtimmung der Flächenräume, wodurch die mechaniſche Arbeit einer Maſchine ausgedrückt wird, einfach durch ein ſogenanntes Planimeter (franz. planimètre; engl. planimeter) bewirken. Unter den verſchiedenen Planimetern von Ernſt, Wetli, Hauſen, Oppikofer und Amsler iſt das letztere oder ſogenannte Polarplanimeter von Amsler eines der einfachſten, wenn auch vielleicht weniger ſchärfſten. Eine monodimetriſche Abbildung dieſes Planimeters führt Fig. 266 vor Augen.

Es iſt C eine Nadel, welche feſt in den Tiſch eingeſtoßen wird und um welche ſich das Inſtrument dreht, während man mit dem Stifte B am Umfange der Figur KLM, deren Inhalt durch das Inſtrument beſtimmt werden ſoll, hinfährt. Die beiden Arme AC und AB, welche die Spitze C und den Stift B tragen, ſind durch eine Axe A mit einander vereinigt, und die Verlängerung AD des Armes AB trägt ein Laufrädchen R, welches ſich auf dem Papiere fortwälzt, während der Stift am Umfange der Figur hingeführt wird. Um die Umdrehungszahl dieſes Rädchens während dieſer Umſchreibung der Figur ableſen zu können, iſt nicht allein auf dem Rädchen R ſelbſt eine Eintheilung, ſondern auch noch ein zweites eingetheiltes Rädchen S angebracht, welches mittels einer Schraube ohne Ende von der Welle

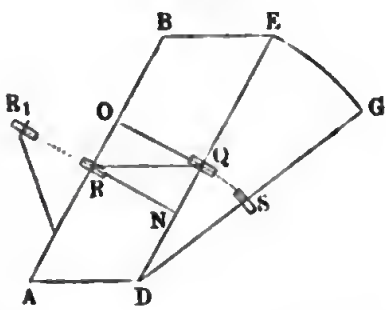
Fig. 266.



des erſteren ſo umgedreht wird, daß es erſt bei zehn Umdrehungen des erſteren eine vollſtändige Umdrehung macht.

Wie der Inhalt der vom Stifte B umſchriebenen ebenen Figur von der Umdrehungszahl des auf der Ebene dieſer Figur fortrollenden Rädchens abhängt, läßt ſich elementar auf folgende Weiſe darthun. Wenn eine Gerade $AB = b$, Fig. 267, parallel mit ſich ſelbſt fortgeführt wird, und dadurch in die Lage DE kommt, ſo beſchreibt ein auf ihr ſitzendes Rädchen R einen Weg $RQ = AD = BE$, welcher aus den Wegen RN und RO zuſammengeſetzt iſt, wovon der erſtere auf AB rechtwinkelig ſteht und der andere die Richtung von AB und DE hat. Vermöge des Fortrollens des Rädchens auf der Ebene von $ABDE$ dreht ſich der Umfang dieſes Rädchens um $RN = \varphi_1 r$, wo φ_1 den Umdrehungsbogen, und r den

Fig. 267.



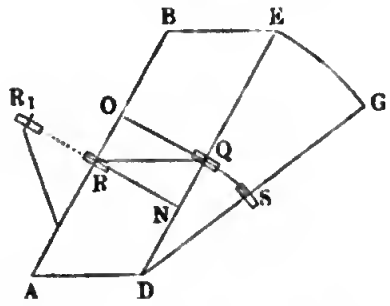
Radius des Rädchens bezeichnet. Nun iſt aber $AB.RN = b\varphi_1 r = \varphi_1 br$ der Inhalt P des Parallelogrammes AE, folglich auch

$$\varphi_1 = \frac{P}{br}$$

ein Maß dieſes Inhaltes.

Dreht ſich ferner DE noch um D, ſo durchläuft das Rädchen einen Bogen QS, und es beſchreibt hierbei dieſe Linie den Sector DEG, deſſen Inhalt

Fig. 268.



$$S = \frac{DE \,.\, EG}{2}$$
$$= {}^1/_2 \overline{DE}^2 \,.\, \psi$$
$$= {}^1/_2 \psi b^2$$

iſt, wenn ψ das Bogenmaß des Centriwinkels EDG bezeichnet. Es iſt folglich der Inhalt der ganzen Figur $ABEGD$:

$$F_1 = P + S = \varphi_1 br + {}^1/_2 \psi b^2.$$

Iſt der Umdrehungswinkel des Rädchens beim Durchlaufen des Bogens QS, $= \varphi_2$, ſo hat man den Umdrehungswinkel beim Durchlaufen des Weges $RQ + QS$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ und daher umgekehrt:}$$
$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_2,$$

oder da, wenn der Abſtand $AR = DQ = DS$ mit c bezeichnet wird,

$$\overline{QS} = \psi c = \varphi_2 r, \text{ alſo}$$
$$\varphi_2 = \frac{c}{r}\psi \text{ iſt,}$$
$$\varphi_1 = \varphi - \frac{c}{r}\psi \text{ und}$$
$$F_1 = \left(\varphi - \frac{c}{r}\psi\right) br + {}^1/_2 \psi b^2 = \varphi rb + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc),$$

oder:

$$F_1 = bs_1 + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc),$$

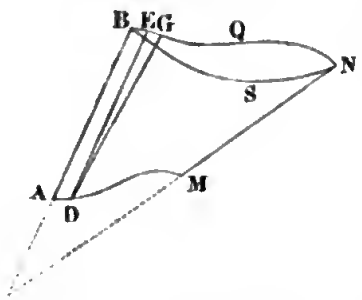
wenn $s_1 = \varphi r$ den ganzen Umdrehungsbogen des Rädchens bezeichnet.

Sind die Wege $AD = BE$ und EG unendlich klein, ſo iſt $ABEGD$ nur das Element einer endlichen Figur $ABNM$, Fig. 269, welche von AB bei beliebiger Verrückung auf der Ebene des Papiers beſchrieben wird, und es iſt in der Formel

$$F_1 = bs_1 + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc)$$

ſtatt ψ der Bogen des ganzen Winkels BON einzuſetzen, welchen die Richtungen der beiden Grenzlagen AB und MN der erzeugenden Linie mit einander einſchließen, wenn F_1 den Inhalt der ganzen Figur $ABQNM$ angeben ſoll. Bewegt man die Linie MN rückwärts nach AB, ſo beſchreibt ſie irgend eine Fläche

Fig. 269.



$$F_2 = bs_2 + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc),$$

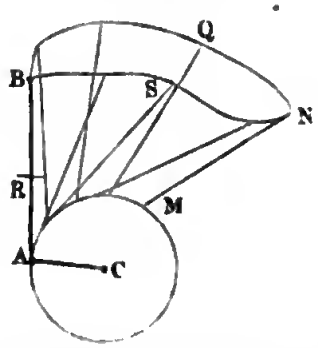
wo s_2 den in umgekehrter Richtung zu meſſenden Umdrehungsbogen des Rädchens bezeichnet; und bleibt hierbei der untere Endpunkt der Erzeugungslinie auf dem erſten Bogen AM, ſo liegt zwiſchen den Wegen BQN und NSB eine Fläche, deren Inhalt F die Differenz von F_1 und F_2 iſt, und folglich einfach durch

$$F = F_1 - F_2 = b(s_1 - s_2) = bs$$

ausgedrückt wird, wobei s die von der Eintheilung des Rädchens angegebene Differenz der Umdrehungsbögen s_1 und s_2 oder den algebraiſchen Umdrehungsbogen bei der Umſchreibung der Figur $BQNSB$ bezeichnet.

Bei dem Amsler'ſchen Planimeter beſchreibt der Endpunkt A der Linie oder des Lineales AB einen Kreisbogen AM, Fig. 270; übrigens iſt auch hier der Flächenraum der Figur $BQNS$, deren Umfang der Stift B durchläuft, dem Umdrehungsbogen s des Rädchens R proportional und

Fig. 270.



$$\text{I.}\quad F = bs.$$

Dieſe Formeln gelten auch dann noch, wenn das Rädchen nicht auf der Stange AB ſelbſt, ſondern wie R_1, Fig. 268, neben derſelben angebracht iſt, nur hat man dann unter c nicht die Entfernung AR_1, ſondern die Projection AR derſelben in AB zu verſtehen.

Die letzte Formel ſetzt voraus, daß der Punkt A bei Umſchreibung der Figur einen und denſelben Kreisbogen AM hin und zurück durchläuft; geht aber dieſer Punkt hierbei ſtetig im Kreiſe herum, wie die Fig. 271 (a. f. S.) und Fig. 272 vor Augen führen, ſo iſt noch die Fläche πa^2 des Kreiſes CAM, deſſen Halbmeſſer CA durch a bezeichnet wird, in Betracht zu ziehen. Es iſt deshalb in dem Falle von Fig. 271, wo C außerhalb der Figur $BQNS$ liegt,

$$F = \pi a^2 + bs,$$

und im zweiten Falle, Fig. 271, wo C von der Figur BQS umſchloſſen wird, und AB nach und nach eine vollſtändige Umdrehung macht, alſo $\psi = 2\pi$ iſt,

Fig. 271.

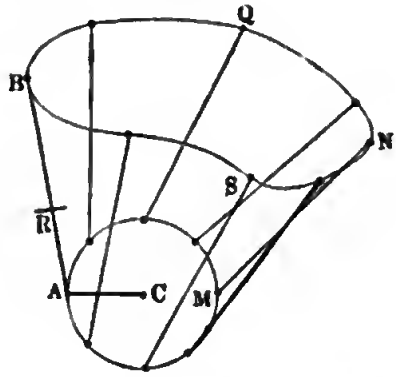
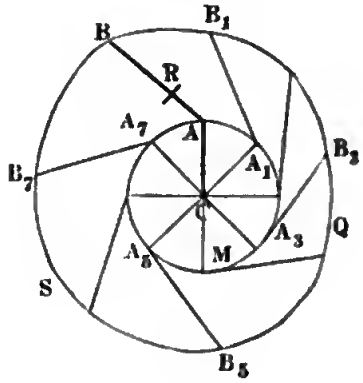


Fig. 272.



$$F = \pi a^2 + \pi (b^2 - 2bc) + bs$$
$$= \pi (a^2 + b^2 - 2bc) + bs.$$

Der Fall in Fig. 271 ſetzt voraus, daß $b > 2a$, alſo $a < {}^1/_2 b$ ſei. Iſt daher, wie gewöhnlich, $a > {}^1/_2 b$, ſo kommt derſelbe gar nicht vor. Wenn im zweiten Falle die Fläche BQS vom Kreiſe AM umſchloſſen wird, ſo iſt bs negativ, und daher:

$$F = \pi (a^2 + b^2 - 2bc) - bs.$$

Anmerkung. Es iſt nachzuleſen: Die Planimeter von Ernſt, Wetli und Hanſen, von Bauernfeind, München 1853, ſowie die unter folgendem Titel erſchienene Schrift: Mechaniſche Beſtimmung des Flächeninhaltes u. ſ. w. ebener Figuren, von Amsler, Schaffhauſen 1856.

Zweites Capitel.

Von den Menſchen- und Thierkräften, ſowie von den Maſchinen zur Aufnahme derſelben.

§. 136 **Thieriſche Kräfte.** Die thieriſchen Kräfte oder das Arbeitsvermögen der Thiere iſt allerdings nicht allein bei Individuen verſchiedener Gattungen, ſondern auch bei Geſchöpfen einer und derſelben Species verſchieden. Bei Thieren gleicher Art hängt das Arbeitsvermögen von der beſonderen Conſtitution des Individuums, von deſſen Alter und Geſundheits-

zuſtand, von deſſen Willen oder Beaufſichtigung, dann aber auch noch davon ab, ob das Thier hinreichend in nahrhaftem Futter erhalten wird, ob es an die Arbeit, welche es verrichtet, gewöhnt iſt u. ſ. w. Auf alle dieſe Verſchiedenheiten können wir, da ſie auf unendlich viele Abſtufungen führen, nicht Rückſicht nehmen, wir müſſen vielmehr bei unſeren Berechnungen von jeder Gattung ein Thier von mittlerer Stärke und Behendigkeit vorausſetzen, welches an die Arbeit, die es verrichtet, gewöhnt iſt, dabei im mittleren Lebensalter ſteht, ſich in geſundem Zuſtande befindet und in gutem nahrhaften Futter gehalten wird.

Noch hängt aber auch das Arbeitsvermögen eines Thieres von der Kraft, Geſchwindigkeit und Arbeitszeit ab; und es fällt dieſes bei einer mittleren Kraft, Geſchwindigkeit und täglichen Arbeitszeit am größten aus. Je größer die Kraft iſt, welche ein Geſchöpf ausübt, deſto kleiner fällt die Geſchwindigkeit aus, und umgekehrt, je größer die Geſchwindigkeit iſt, deſto kleiner ſtellt ſich die damit ausgeübte Kraft heraus; ja es giebt eine Maximalkraft, wo die Geſchwindigkeit und alſo auch die Arbeit Null iſt, und ebenſo eine Maximalgeſchwindigkeit, bei welcher die Kraft und alſo die Arbeit wiederum Null ausfällt. Man ſieht hieraus, daß man die animaliſchen Motoren nur mit einer mittleren Kraft und einer mittleren Geſchwindigkeit arbeiten laſſen ſoll, und kann übrigens noch leicht ermeſſen, daß man dieſelben auch nur auf eine mittlere Zeit in Anſpruch nehmen darf, um von denſelben ein möglichſt großes Arbeitsquantum zu gewinnen. Uebrigens folgt aus unzähligen Erfahrungen, daß kleine Abweichungen von der mittleren Kraft, mittleren Geſchwindigkeit und mittleren Arbeitszeit, namentlich wenn die Verrichtung zur Gewohnheit geworden iſt, eine beachtungswerthe Verminderung der Leiſtung nicht verurſachen. Auch iſt es eine Thatſache, daß es keineswegs vortheilhaft iſt, die animaliſchen Motoren mit conſtanter Kraft und Geſchwindigkeit ohne Unterbrechung wirken zu laſſen, ſondern daß das animaliſche Arbeitsvermögen beſſer benutzt oder weniger Ermüdung herbeigeführt wird, wenn das arbeitende Geſchöpf in Pauſen arbeitet, die um ſo öfter zu wiederholen ſind, je mehr die wirklich verrichtete Arbeit in der Zeiteinheit von der mittleren Arbeit abweicht.

Das Hauptmoment bei Beurtheilung der Wirkungen animaliſcher Motoren iſt die tägliche Leiſtung. Vergleicht man dieſelbe mit den täglichen Unterhaltungs- und, nach Befinden, mit den täglichen Zinſen der Ankaufskoſten, ſo erhält man ein Maß zur Vergleichung der Werthe verſchiedener Motoren unter einander.

§. 137. Die Art und Weiſe, wie Menſchen und Thiere mechaniſche Arbeiten verrichten, iſt ſehr verſchieden. Die animaliſchen Motoren arbeiten entweder mit oder ohne Maſchinen; und zwar die Menſchen mit den Händen oder mit den

Füßen oder mit beiden zugleich; die Thiere natürlich nur mit den Füßen. Bei den ſo ſehr verſchiedenen Verrichtungen iſt jedoch der Grad der Ermüdung der geleiſteten mechaniſchen Arbeit nicht proportional, manche Arbeiten ſcheinen mehr Ermüdung herbeizuführen als andere, oder was daſſelbe iſt, bei manchen Verrichtungen fällt das mechaniſche Arbeitsquantum größer oder kleiner aus, als bei anderen Verrichtungen. Auch laſſen ſich manche Arbeiten gar nicht auf eine und dieſelbe Weiſe meſſen, wie z. B. das Tragen auf horizontalen Wegen und das Aufheben einer Laſt. Nach den ſeither gefaßten Begriffen iſt die Arbeit beim Tragen auf horizontalen Wegen Null, weil hierbei in der Richtung der Kraft, d. i. vertical, kein Weg zurückgelegt wird (Bd. I, §. 83), wogegen beim Aufheben oder Aufziehen einer Laſt die Arbeit beſtimmt das Product aus Gewicht und Steighöhe deſſelben iſt. Gleichwohl führt das Gehen oder Tragen ebenfalls zur Ermüdung wie das Aufheben; d. h. es wird durch jenes auch das tägliche Arbeitsvermögen conſumirt wie durch dieſes; es muß daher auch der einen Thätigkeit ein tägliches Arbeitsquantum zukommen wie der anderen, wenn auch dieſe Arbeiten ſelbſt weſentlich verſchieden ſind.

Erfahrungsmäßig geht ein Menſch leer auf horizontalem Wege täglich 10 Stunden lang mit $4^3/_4$ Fuß Geſchwindigkeit; nimmt man nun ſein Gewicht zu 140 Pfd. an, ſo erhält man als tägliches Arbeitsquantum den Werth:

$$140 \,.\, 4{,}75 \,.\, 10 \,.\, 60 \,.\, 60 = 23'940000 \text{ Fußpfund.}$$

Trägt der Menſch 80 Pfund auf dem Rücken, ſo geht er täglich 7 Stunden lang auf horizontalem Wege mit 2,4 Fuß Geſchwindigkeit, und leiſtet daher täglich, wenn man ſein Gewicht unbeachtet läßt, die Arbeit:

$$80 \,.\, 2{,}4 \,.\, 7 \,.\, 60 \,.\, 60 = 4'838400 \text{ Fußpfund.}$$

Ein Pferd trägt auf dem Rücken 240 Pfund täglich 10 Stunden lang im Schritt mit $3^1/_2$ Fuß Geſchwindigkeit, und leiſtet folglich in einem Tage:

$$240 \,.\, 3{,}5 \,.\, 10 \,.\, 60 \,.\, 60 = 30'240000 \text{ Fußpfund,}$$

alſo mehr als ſechsmal ſo viel als ein Menſch beim Tragen. Hat das Pferd nur 160 Pfund auf dem Rücken, ſo läuft es täglich 7 Stunden im Trabe mit 7 Fuß Geſchwindigkeit, und leiſtet daher nur

$$160 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 60 \,.\, 60 = 28'224000 \text{ Fußpfund}$$

täglich.

Viel kleiner fallen die Arbeiten beim Heben von Laſten aus, weil hier mechaniſche Arbeit im eigentlichen Sinne zu nehmen, alſo der Weg in Hinſicht auf die Kraftrichtung einzuführen iſt.

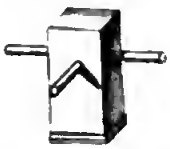
Steigt ein Menſch auf einer Treppe oder Auffahrt leer hinauf, ſo iſt bei einer täglichen Arbeitszeit von 8 Stunden die Geſchwindigkeit, in verticaler Richtung gemeſſen, = 0,48 Fuß, daher ſein tägliches Arbeitsquantum:

$$= 140 \,.\, 0{,}48 \,.\, 8 \,.\, 60 \,.\, 60 = 1'935360 \text{ Fußpfund.}$$

Hiernach kann ein Mensch täglich horizontal $12^1/_2$ mal so viel Weg zurücklegen als vertical.

Bei dem hiesigen Teichbaue hat der Verfasser beobachtet, daß vier kräftige und eingeübte Arbeiter einen Rammklotz, wie Fig. 273, welcher 112 Pfund wiegt, in jeder Minute genau 34mal 4 Fuß hoch heben, dabei nach 260 Secunden Arbeit jedesmal wieder 260 Secunden Ruhezeit nöthig haben und im Ganzen täglich nur 5 Stunden arbeiten; es stellt sich daher hier die tägliche Arbeit eines Menschen

Fig. 273.



$$= \frac{112}{4} \cdot 4 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 60 = 1'142400 \text{ Fußpfund}$$

heraus.

Anmerkung 1. Ausführlichere Zusammenstellungen über die Leistungen animalischer Motoren theilt der „Ingenieur" mit. Uebrigens findet man auch die Leistungen der Thiere bei Maschinen in der Folge bei den betreffenden Maschinen angegeben.

Anmerkung 2. Die Leistungen der Menschen und Thiere sind noch lange nicht vollständig genug bekannt. Die Leistungen ungeübter oder unter ungünstigen Umständen arbeitender Menschen (bei großer Hitze, Regen u. s. w.) können um die Hälfte kleiner ausfallen als die Leistungen tüchtiger und eingeübter Arbeiter. Die erste vollständige Untersuchung über die Leistung der animalischen Motoren lieferte Coulomb (siehe Théorie des machines simples). Vor ihm hatten sich vorzüglich Desaguliers (Cours de Physique expér.) und Schulze (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1783) mit der Bestimmung der thierischen Kräfte beschäftigt. In den neueren Zeiten sind die Erfahrungen Coulomb's von Vielen vervollständigt worden. Siehe Hachette, Traité élémentaire des machines. Bouguer, Euler und Gerstner haben versucht, die Wirkungen der animalischen Motoren auf Gesetze zurückzuführen. Man kann jedoch behaupten, daß diese Aufgabe selbst durch Gerstner (Mechanik, Bd. I) noch keineswegs als gelöst anzusehen ist.

Kraftformeln. Kraft und Geschwindigkeit bei der Arbeitsverrichtung animalischer Wesen stehen zwar im genauesten Zusammenhange mit einander, jedoch ist das Gesetz dieses Zusammenhanges keineswegs bekannt, und noch viel weniger aus Vernunftgründen abzuleiten. Die empirischen Formeln, welche Bouguer und Euler angegeben haben, entsprechen der Wahrheit gewiß nur annähernd. Ist K_0 die größte Kraft, welche ein lebendes Wesen ohne Geschwindigkeit ausüben kann, und c_0 die größte Geschwindigkeit ohne Kraftäußerung, so hat man für eine andere Geschwindigkeit v die entsprechende Kraft, §. 138

nach Bouguer:

$$P = \left(1 - \frac{v}{c_0}\right) K_0$$

nach Euler 1):

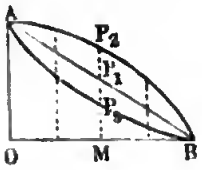
$$P = \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) K_0,$$

nach demſelben 2):

$$P = \left(1 - \frac{v}{c_0}\right)^2 K_0.$$

Von dieſen drei Formeln iſt die erſte die einfachſte, und nach Gerſtner auch diejenige, welche mit den Erfahrungen am meiſten übereinſtimmt. Nach den Beobachtungen Anderer, z. B. Schulze's, ſcheint ſich hingegen die dritte Formel mehr an die Erfahrungen anzuſchließen. Sieht man v als Abſciſſe und P als Ordinate einer Curve an, ſo entſpricht der erſten Formel eine Gerade AB, Fig. 274, der zweiten aber ein concaver Parabelbogen AP_2B und der dritten ein convexer Parabelbogen AP_3B, und es liegt allemal die Ordinate MP_1 der Geraden zwiſchen den Ordinaten MP_2 und MP_3 beider Parabeln mitten inne, z. B. der Abſciſſe $OM = v = \frac{1}{2} c_0$ entſprechen die Ordinaten $\overline{MP_1} = \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \overline{OA}$, ferner $\overline{MP_2} = \frac{3}{4} K = \frac{3}{4} \overline{OA}$, und $\overline{MP_3} = \frac{1}{4} K = \frac{1}{4} OA$. Es giebt alſo die Bouguer'ſche Formel Kraftwerthe, welche zwiſchen den von den Euler'ſchen Formeln zu erhaltenden Werthen mitten inne liegen, und man kann ſich derſelben wenigſtens ſo lange bedienen, als keine beſonderen Gründe für die Richtigkeit einer der Euler'ſchen Formeln angegeben werden können. Führen wir in der Bouguer'ſchen Formel ſtatt der Maximalwerthe K_0 oder c_0 ihre Hälften oder die mittleren Werthe $K = \frac{1}{2} K_0$ und $c = \frac{1}{2} c_0$ ein, ſo erhalten wir die zuerſt von Gerſtner angewendete Formel:

Fig. 274.



$$P = \left(1 - \frac{v}{2c}\right) 2K,$$

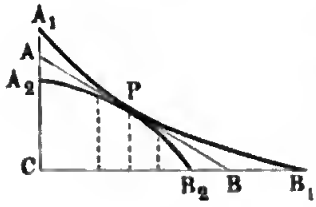
oder

$$1.)\quad P = \left(2 - \frac{v}{c}\right) K,$$

ſowie umgekehrt:

$$2.)\quad v = \left(2 - \frac{P}{K}\right) c.$$

Fig. 275.



Wenn nun auch dieſe Formel für Grenzwerthe von v und P weniger Schärfe oder Sicherheit gewährt, ſo läßt ſich wenigſtens erwarten, daß ſie für Werthe, welche von den mittleren nicht bedeutend abweichen, mit genügender Genauigkeit zu gebrauchen ſei, zumal, da bei gleichen Werthen von c und K beide Euler'ſche Curven A_1PB_1 und A_2PB_2, Fig. 275, von der Bouguer'ſchen Geraden APB in P tangirt werden.

Die mechaniſche Arbeit pr. Secunde iſt hiernach:

$$Pv = \left(2 - \frac{v}{c}\right) v\,K.$$

Da ſich $\left(2 - \frac{v}{c}\right) v\,K$ auch $= (2c - v)\,v\,\frac{K}{c}$ ſetzen läßt, ſo fällt wie in Band I, §. 500 die mechaniſche Arbeit am größten aus, wenn $v = c$, alſo auch

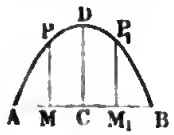
$$P = K,$$

d. i. Geſchwindigkeit und Kraft die mittleren ſind, nämlich

$$L = Pv = Kc.$$

Sowie man aber mit einer größeren oder kleineren Geſchwindigkeit, oder mit einer kleineren oder größeren Kraft arbeiten läßt, erhält man eine Leiſtung $L = Pv$ kleiner als Kc. Sieht man wieder die Geſchwindigkeiten als Abſciſſen, und die Arbeiten als Ordinaten an, ſo bekommt man in der ſich herausſtellenden Curve eine Parabel ADB, Fig. 276, und man ſieht nun leicht ein, daß ſowohl der Abſciſſe $AM < AC$ als auch der Abſciſſe $AM_1 > AC$ eine kleinere Ordinate MP, M_1P_1 zukommt, als der Abſciſſe $\overline{AC} = c$. Für $v = \frac{c}{2}$, ſowie für $v = {}^3/_2\,c$ folgt z. B.:

Fig. 276.



$$L = {}^3/_4\,Kc, \text{ alſo } \overline{MP} = \overline{M_1P_1} = {}^3/_4\,\overline{CD}.$$

Nach den Angaben von Gerſtner gelten, namentlich für Zugkräfte, die in folgender Tabelle enthaltenen Werthe:

Geſchöpfe.	Gewicht.	Mittlere Kraft K in Pfund.	Mittlere Geſchwindigkeit c Fuß.	Mittlere Arbeitszeit t Stunden.	Leiſtung pr. Sec. Fußpfund.	Tägliche Leiſtung Fußpfund.
Menſch. .	140	28	2,5	8	70	2'016000
Pferd . .	750	112	4	8	448	12'902400
Ochs. . .	600	112	2,5	8	280	8'064000
Eſel . . .	360	70	2,5	8	175	5'040000
Mauleſel .	500	94	3,5	8	329	9'475200

Beiſpiele. 1. Nach der vorſtehenden Tabelle leiſtet ein Menſch bei einer mittleren Kraft von 28 Pfund und mittleren Geſchwindigkeit von $2^1/_2$ Fuß täglich 2'016000 Fußpfund; ſoll er aber mit 3 Fuß Geſchwindigkeit arbeiten, ſo kann er nur die Kraft

$$P = \left(2 - \frac{3}{2{,}5}\right) . 28 = 22{,}4 \text{ Pfund}$$

ausüben, und es wird ſeine tägliche Leiſtung nur

$$22{,}4 . 3 . 8 . 60 . 60 = 1'935360 \text{ Fußpfund}$$

betragen.

2. Wenn ein Zugpferd 150 Pfund Kraft ausüben ſoll, ſo kann es nur mit der Geſchwindigkeit

$$v = \left(2 - \frac{150}{112}\right) . 4 = 2{,}643 \text{ Fuß}$$

arbeiten, weswegen ſeine Leiſtung pr. Secunde nur

$$2{,}643 . 150 = 396{,}5 \text{ Fußpfund}$$

beträgt, alſo um $448 - 396{,}5 = 51{,}5$ Fußpfund kleiner iſt als bei 4 Fuß Geſchwindigkeit.

Anmerkung. Für die Leiſtungen der Pferde giebt Fourier eine complicirte Formel in Annales des ponts et chaussées, 1836; ſiehe auch Crelle's Journal der Baukunſt. Bd. XII, 1838.

§. 139 **Arbeit beim Steigen.** Noch kann man, nach Gerſtner, die Leiſtungen von animaliſchen Motoren bei der Bewegung auf ſchiefen Ebenen berechnen. Bezeichnet G das Gewicht des Motors, Q die von ihm getragene Laſt und α den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene, auf welcher der Motor mit der Laſt hinaufſteigt, ſo iſt die Kraft $= (Q + G) \sin. \alpha$ (ſ. Theorie der ſchiefen Ebene, Bd. I, §. 146), und daher zu ſetzen:

$$\left(2 - \frac{v}{c}\right) K = (Q + G) \sin. \alpha.$$

Hiernach folgt die Laſt, mit welcher ein animaliſcher Motor auf einer ſchiefen Ebene von gegebener Neigung emporſteigen kann, ſowie umgekehrt, der Neigungswinkel, welcher einer gegebenen Laſt entſpricht; es iſt nämlich:

$$\sin. \alpha = \frac{\left(2 - \frac{v}{c}\right) K}{Q + G},$$

darnach für $Q = 0$, und $v = c$, alſo leer, und bei der mittleren Geſchwindigkeit:

$$\sin. \alpha = \frac{K}{G}.$$

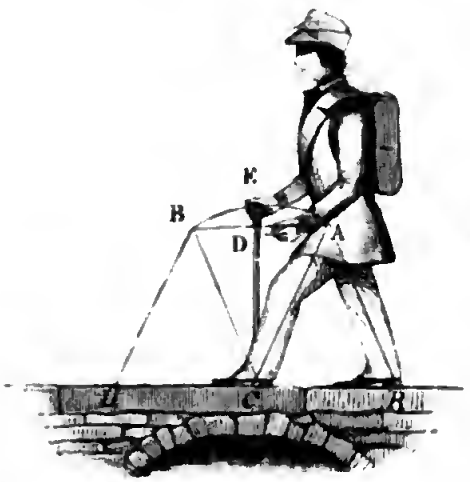
Nun iſt aber das Gewicht eines Thieres faſt immer fünfmal ſo groß als ſeine mittlere Kraft; es iſt daher

$$\sin. \alpha = {}^1/_5 \quad \text{und} \quad \alpha = 11\,{}^1/_2{}^0$$

der Neigungswinkel derjenigen ſchiefen Ebene, auf welcher ein Thier bei mittlerer Kraftanſtrengung hinaufſteigt.

Anmerkung. Bei dem Ausſchreiten auf horizontalem Wege HR, Fig. 277, dreht ſich der ganze Körper um den Fußpunkt C, wobei der Schwerpunkt des Körpers um eine Höhe $DE = h$ ſteigt, die ſich aus der Schenkellänge $CA = CB = l$ und der Schrittlänge $CH = CR = s$ durch die bekannte Formel

Fig. 277.



$$DE = \frac{\overline{AD}^2}{2\,AC},$$

d. i.

$$h = \frac{s^2}{8\,l}$$

leicht beſtimmen läßt. Iſt nun G das Gewicht des Menſchen und Q die von demſelben getragene Laſt, ſo hat man die von demſelben bei jedem Schritte zu verrichtende Arbeit:

$$L = (G + Q)\,h = \frac{(G+Q)\,s^2}{8\,l},$$

alſo die entſprechende Kraft:

$$P = \frac{L}{s} = \frac{(G+Q)\,s}{8\,l}.$$

Setzen wir die Schenkellänge $l = 3$ Fuß und die Schrittlänge $s = 2$ Fuß, ſo haben wir hiernach die Kraft:

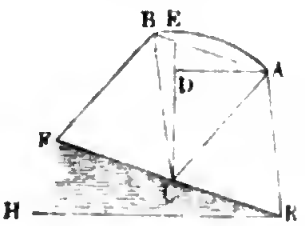
$$P = \frac{2\,(G+Q)}{8\,.\,3} = {}^1/_{12}\,(G+Q) = 0{,}08333\,(G+Q),$$

alſo für $Q = 0$ und $G = 140$ Pfund,

$$P = {}^1/_{12}\,G = 11{,}67 \text{ Pfund},$$

Es iſt folglich der Arbeitsaufwand beim Ausſchreiten einer horizontalen Strecke s gleich dem Arbeitsaufwand beim ſenkrechten Steigen auf die Höhe ${}^1/_{12}\,s$.

Fig. 278.



Hiernach wäre alſo die Anſtrengung, um ſich ſelbſt auf horizontalem Wege fortzubewegen, bei gleichem Wege eben ſo groß, als diejenige, welche man nöthig hat, ein Gewicht von $11{}^2/_3$ Pfund zu heben.

Beim Hinaufſteigen auf einer ſchwach anſteigenden Ebene FR, Fig. 278, iſt, wenn α den Steigwinkel FRH dieſer Ebene und β den Drehungswinkel ACB bezeichnen, die Steighöhe eines Schrittes

$$DE = h = CE - CD = CE\,(1 - cos.\,ACD) = l\left[1 - cos.\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= l\left(1 - cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\frac{\beta}{2} + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\frac{\beta}{2}\right),$$

annähernd, bei kleinem Steigwinkel α:

$$h = l\left(1 - cos.\,\frac{\beta}{2} + sin.\,\alpha\;sin.\,\frac{\beta}{2}\right) = l\left(\frac{s^2}{8\,l^2} + \frac{s}{2\,l}\,sin.\,\alpha\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\frac{s}{4\,l} + sin.\,\alpha\right).$$

Es iſt folglich die mechaniſche Arbeit bei jedem Schritte:

$$L = (G+Q)\,h = (G+Q)\left(\frac{s}{4\,l} + sin.\,\alpha\right)\frac{s}{2},$$

und die mittlere Kraft:

$$P = \tfrac{1}{2}\,(G + Q)\left(\frac{s}{4\,l} + \mathit{sin.}\,\alpha\right).$$

Für das Herabſteigen auf der ſchiefen Ebene iſt α negativ, daher die Kraft:

$$P = \tfrac{1}{2}\,(G + Q)\left(\frac{s}{4\,l} - \mathit{sin.}\,\alpha\right).$$

Hiernach wäre allerdings für $\mathit{sin.}\,\alpha = \frac{s}{4\,l}$ die Kraft = Null. Nimmt man wieder $l = 3$ und $s = 2$ Fuß, ſo erhält man:

$$\mathit{sin.}\,\alpha = \tfrac{1}{6} = 0{,}1666, \text{ d. i.}$$
$$\alpha = 9\tfrac{1}{2} \text{ Grad},$$

den Neigungswinkel, bei welchem wenigſtens das Herabſteigen am leichteſten wird.

Iſt der Steigwinkel $\alpha = \frac{\beta}{2}$, ſo hat man die Kraft zum Aufſteigen:

$$P = \frac{(G + Q)\,s}{4\,l},$$

und iſt $\alpha > \frac{\beta}{2}$, d. i. $> \frac{s}{2\,l}$, in Zahlen $\alpha > \frac{1}{3}$, alſo $\alpha^0 > 19$ Grad, ſo fällt einfach:

$$P = (G + Q)\,\mathit{sin.}\,\alpha \quad \text{aus.}$$

§. 140 **Arbeit an Maſchinen.** Wenn man, nach Gerſtner, der Arbeitszeit z denſelben Einfluß auf das tägliche Arbeitsquantum beimißt, wie der Geſchwindigkeit, ſo hat man für die Kraft zu ſetzen:

$$P = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) K,$$

und erhält hiernach die tägliche Leiſtung:

$$L = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) K\,v\,z.$$

Jedenfalls iſt die Leiſtung am größten, und zwar $= K\,c\,t$, wenn das Thier nicht allein mit der mittleren Geſchwindigkeit und Kraft arbeitet, ſondern auch die mittlere Arbeitszeit innehält. Uebrigens iſt nicht außer Acht zu laſſen, daß dieſe Formel bloß für ſolche Werthe von v, z und P hinreichende Genauigkeit gewährt, welche nicht ſehr von den mittleren Werthen c, t und K abweichen.

Herr Maſchek empfiehlt ſtatt der obigen Kraftformel von Gerſtner den einfacheren Ausdruck:

$$P = \left(3 - \frac{v}{c} - \frac{z}{t}\right) K,$$

der allerdings zum Rechnen ſehr bequem iſt. S. Neue Theorie der menſchlichen und thieriſchen Kräfte u. ſ. w. von F. J. Maſchek, Prag u. ſ. w.

In der Regel wird man die Thiere während der mittleren Arbeitszeit von 8 bis 10 Stunden arbeiten laſſen, und daher auf den Factor $\left(2 - \frac{z}{t}\right)$

nicht weiter Rückſicht zu nehmen haben, alſo die tägliche Leiſtung

$$L = \left(2 - \frac{v}{c}\right) K v z$$

ſetzen können. Arbeitet nun aber ein Thier an einer Maſchine, ſo wird ſich ſeine Kraft P in eine Nutzlaſt P_1 und eine Nebenlaſt P_2 zerlegen, alſo

$$P = P_1 + P_2$$

zu ſetzen ſein, wofern wir beide auf den Kraftpunkt reducirt uns denken. Auch wird in der Regel, wie wir in der Folge wiederholt ſehen können, die Nebenlaſt P_2 aus einem conſtanten und ſchon bei der unbelaſteten Maſchine vorkommenden Theile R und aus einem von der Nutzlaſt abhängigen und dieſer genau oder wenigſtens annähernd proportionalen Theile δP_1, wo δ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, beſtehen, es wird alſo

$$P_2 = R + \delta \,.\, P_1,$$

und ſonach

$$P = (1 + \delta)\, P_1 + R,$$

alſo auch

$$\left(2 - \frac{v}{c}\right) K = (1 + \delta)\, P_1 + R$$

zu ſetzen ſein.

Die Totalleiſtung pr. Secunde iſt nun:

$$Pv = \left(2 - \frac{v}{c}\right) Kv = (1 + \delta)\, P_1 v + Rv,$$

und daher die Nutzleiſtung:

$$P_1 v = \frac{(2K - R)\, v - \frac{Kv^2}{c}}{1 + \delta} = \left[\left(2 - \frac{R}{K}\right) c - v\right] v \cdot \frac{K}{(1 + \delta)\, c}.$$

Damit dieſe Leiſtung ſo groß wie möglich ausfalle, muß (ſ. §. 138)

$$v = {}^1/_2 \left(2 - \frac{R}{K}\right) c = \left(1 - \frac{R}{2K}\right) c,$$

alſo die Geſchwindigkeit kleiner als die mittlere, und zwar um ſo kleiner ſein, je größer der conſtante Theil R der Nebenlaſt iſt. Die entſprechende Kraft iſt hiernach:

$$P = \left(1 + \frac{R}{2K}\right) K = K + \frac{R}{2},$$

alſo größer als die mittlere Kraft, die Nutzlaſt hingegen folgt:

$$P_1 = \frac{K - \frac{R}{2}}{1 + \delta},$$

die Totalleiſtung ſtellt ſich

$$Pv = \left[1 - \left(\frac{R}{2K}\right)^2\right] Kc,$$

die Nutzleiſtung aber

$$P_1 v = \left(1 - \frac{R}{2K}\right)^2 \frac{Kc}{1 + \delta},$$

und endlich der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{R}{2K}\right)^2}{1 + \delta}$$

heraus.

Beiſpiel. Wenn bei einer durch zwei Pferde in Umdrehung zu ſetzenden Maſchine die auf den Kraftpunkt reducirte conſtante oder der unbelaſteten Maſchine entſprechende Nebenlaſt 60 Pfund beträgt, ſo hat man die zu fordernde Geſchwindigkeit der Pferde, da $K = 2.112 = 224$ Pfund, und $c = 4$ Fuß zu ſetzen iſt:

$$v = (1 - {}^{60}/_{448})\, c = {}^{97}/_{112} \cdot 4 = 3{,}464 \text{ Fuß},$$

ferner die Kraft der Pferde:

$$P = 224 + {}^{60}/_{2} = 254 \text{ Pfund},$$

alſo die eines Pferdes:

$${}^{1}/_{2} P = 127 \text{ Pfund}.$$

Iſt nun noch der veränderliche Theil der Nebenlaſt 15 Procent der Nutzlaſt, ſo hat man $\delta = 0{,}15$ und daher die aufzulegende Nutzlaſt:

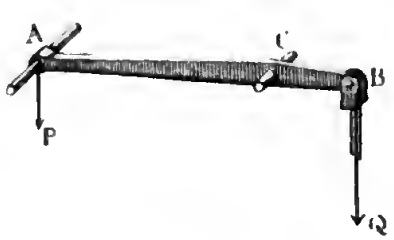
$$P_1 = \frac{224 - 30}{1{,}15} = 169 \text{ Pfund},$$

und endlich den Wirkungsgrad der Maſchine:

$$\eta = ({}^{97}/_{112})^2 : 1{,}15 = 0{,}652.$$

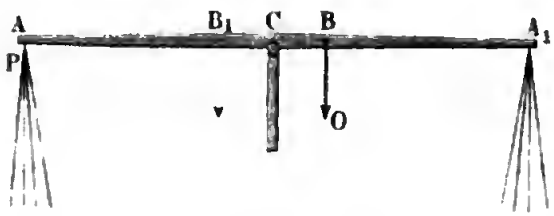
§. 141 **Hebel.** Die animaliſchen Motoren arbeiten entweder an Hebeln oder an Radwellen. Die letzteren ſind entweder liegend, oder ſtehend, oder gegen den Horizont geneigt. Zunächſt iſt von dem Hebel als Maſchine zur Aufnahme der Menſchenkraft die Rede. Die allgemeine Theorie dieſer Maſchine iſt aus Band I, § 135 und §. 187 bekannt. Der Hebel iſt entweder ein einfacher, wie ACB, Fig. 279, oder ein doppelter, wie $ACBA_1$, Fig. 280; jener hat nur einen Kraftarm CA, dieſer aber hat deren zwei, nämlich CA und CA_1. Man erzeugt durch den Hebel eine ſchwingende Bewegung im Kreiſe, und wendet ihn deshalb vorzüglich in den Fällen an, wo eine auf- und nieder- oder hin- und hergehende Bewegung erzeugt werden ſoll, wie z. B. bei Pumpen, zumal bei Feuerſpritzen. Zur Aufnahme der Menſchenkräfte dienen die Handhaben oder Spillen, deren Anzahl und Länge ſich nach der Anzahl der Arbeiter richtet, welche den Hebel in

Fig. 279.



Bewegung ſetzen. Da die Kraftausübung bei der Bewegung von oben nach unten eine leichtere iſt als bei der Bewegung von unten nach oben, ſo läßt man den Arbeiter meiſt nur beim Niedergange wirken, und bringt zu dieſem Zwecke Gegengewichte an, welche dem Aufgange zu Hülfe kommen, oder bedient ſich eines doppelten Hebels, an welchem dann die Arbeiter abwechſelnd niederzudrücken haben. In dem Falle, wenn die Arbeiter nur beim Niedergange wirken, werden oft die Handhaben durch Seile erſetzt, die vom Hebel niederhängen und von den Menſchen ergriffen werden. Zuweilen werden Hebel auch mit den Füßen durch Treten in Bewegung geſetzt.

Fig. 280.



Um eine nicht zu große Richtungsänderung während eines Spieles zu erhalten, läßt man den Hebel in einem nicht ſehr großen, wenigſtens nicht 60 Grad überſchreitenden Bogen ſchwingen; und um die Ausübung der Kraft nicht zu erſchweren, läßt man den Handhaben oder Angriffspunkten der Kräfte nur die der menſchlichen Armlänge entſprechenden Wege von $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß zurücklegen. Aus dem letzteren Grunde iſt es auch angemeſſen, die Handhaben bei ihrem mittleren Stande um die der menſchlichen Länge entſprechenden Höhe von 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß vom Fußboden abſtehen zu laſſen. Nach gemachten Erfahrungen arbeitet ein Menſch an einem Hebel täglich 8 Stunden lang mit der Kraft $K = 12$ Pfund, und Geſchwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuß, es iſt daher ſeine Leiſtung an dieſer Maſchine pr. Secunde:

$$L = 12 \,.\, 2{,}5 = 30 \text{ Fußpfund};$$

und demnach täglich:

$$Kct = 30 \,.\, 8 \,.\, 3600 = 864000 \text{ Fußpfund}.$$

Es iſt nöthig, bei der Anordnung eines Hebels dafür zu ſorgen, daß die Arbeiter mit der angegebenen mittleren Kraft und Geſchwindigkeit arbeiten, oder vielmehr, daß die effective Kraft nur um die halbe conſtante Nebenlaſt größer ausfällt als die mittlere Kraft.

An dem Hebel ſelbſt ſtellt ſich nur ein Hinderniß, nämlich deſſen Axenreibung, heraus. Iſt D der aus dem Gewichte des Hebels und aus der Kraft und Laſt deſſelben entſpringende Zapfendruck, r der Zapfenhalbmeſſer und φ der Reibungscoefficient, endlich a der Hebelarm CA der Kraft, ſo hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Zapfenreibung:

$$F = \frac{\varphi r}{a} D;$$

da nun aber φ und in der Regel auch $\frac{r}{a}$ ein kleiner Bruch iſt, ſo fällt

meiſtens die Reibung F klein genug aus, um ſie in Anſehung der übrigen Laſt vernachläſſigen zu können.

Denken wir uns am Laſtpunkte B eine Nutzlaſt Q und eine Nebenlaſt $\delta Q + W'$ wirkſam, und bezeichnen wir den Hebelarm $\overline{CB}$ dieſer Laſten durch b, ſo haben wir das Kraftmoment zu ſetzen:

$$Pa = [(1 + \delta)\ Q + W]\ b,$$

und daher die Kraft ſelbſt:

$$P = \frac{b}{a}\ [(1 + \delta)\ Q + W].$$

Damit nun die Menſchenkraft mit möglichſtem Vortheile wirke, iſt auch

$$P = K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2}, \text{ und daher}$$

$$\frac{a}{b}\ K = (1 + \delta)\ Q + \frac{W}{2},$$

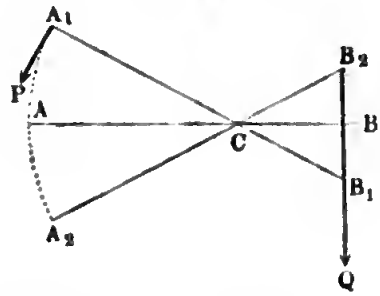
alſo das Hebelarmverhältniß

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 + \delta)\ Q + {}^1/_2\, W}{K}$$

in Anwendung zu bringen.

Anmerkung. Die Hebelarme ſind in der Regel während eines Spieles etwas veränderlich, weswegen es wohl nöthig iſt, mittlere Werthe für dieſelben zu finden und in die Rechnungen einzuführen. Steht der Hebelarm CB, Fig. 281, bei halbem Hube horizontal, und iſt der Schwingungswinkel

Fig. 281.



$$B_1 C B_2 = \beta^0,$$

ſo hat man die Hubhöhe der Laſt:

$$s = \overline{B_1 B_2} = 2b\ sin.\frac{\beta}{2},$$

daher die Arbeit für einen Anhub:

$$= 2b\ sin.\ \frac{\beta}{2} \cdot Q;$$

wäre aber die Laſt während des Anhubes unveränderlich am Hebelarme $CB = b$ wirkſam, ſo würde der Weg für jeden Hub = Bogen $B_1 B B_2 = \beta b$ ſein; und daher die Laſt

$$Q_1 = \frac{2b\ sin.\frac{\beta}{2}}{\beta b}\ Q = \frac{2\ sin.\ {}^1/_2\,\beta}{\beta} \cdot Q,$$

alſo ihr ſtatiſches Moment

$$Q_1 b = \frac{2\ sin.\ {}^1/_2\,\beta}{\beta}\ Q\,b \quad \text{zu ſetzen ſein.}$$

Umgekehrt können wir nun auch annehmen, daß die Laſt Q während eines

Spieles am mittleren Hebelarme $\frac{2\,b\,sin.\,{}^1/_2\beta}{\beta}$ wirksam sei. Für $\beta^0 = 60^0$ stellt sich dieser Hebelarm

$$= \frac{b}{arc.\,60^0} = \frac{b}{1{,}0472} = 0{,}955\,.\,b$$

heraus, also um $5^1/_2$ Procent kleiner als b, und bei kleineren Schwingungswinkeln ist die Abweichung noch bedeutend kleiner.

Beispiel. Welches Armverhältniß ist bei einem Hebel auszuwählen, damit derselbe bei einer Nutzlast $Q = 160$ Pfund und einer Nebenlast

$$Q_2 = 0{,}15\,Q + 55 = 0{,}15\,.\,160 + 55 = 79 \text{ Pfund}$$

durch vier Arbeiter möglichst vortheilhaft in Wirksamkeit gesetzt werde? Es ist:

$$K = 4\,.\,12 = 48 \text{ Pfund},$$

daher:

$$\frac{a}{b} = \frac{1{,}15\,.\,160 + {}^1/_2\,.\,55}{48} = \frac{211{,}5}{48} = 4{,}4.$$

Soll nun die Last bei jedem Anhube 1 Fuß Weg durchlaufen, so muß hiernach die Kraft gleichzeitig 4,4 Fuß Weg zurücklegen, und nimmt man nun den Schwingungswinkel $\beta = 50^0$ an, so erhält man die nöthige Armlänge:

$$b = \frac{s}{2\,sin.\frac{\beta}{2}} = \frac{0{,}5}{sin.\,25^0} = 1{,}183 \text{ Fuß},$$

und die Länge des Kraftarmes:

$$a = 4{,}4\,.\,b = 4{,}4\,.\,1{,}183 = 5{,}20 \text{ Fuß}.$$

Der nöthige Kraftaufwand ist nun:

$$P = \frac{160 + 79}{4{,}4} = 54{,}32 \text{ Pfund},$$

folglich die Kraft eines Arbeiters:

$$= 13{,}58 \text{ Pfund},$$

und der Wirkungsgrad des Hebels:

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{55}{2\,.\,4{,}4\,.\,48}\right)^2}{1{,}15} = \frac{(1 - 0{,}13)^2}{1{,}15} = 0{,}658.$$

Wenn also auch die vier Menschen eine tägliche Arbeit von $4\,.\,864000 = 3'456000$ Fußpfund verrichten können, so wird von ihnen an dieser Maschine doch nur $0{,}658\,.\,3'456000$, also circa $= 2'274000$ Fußpfund nützliche Arbeit zu verlangen sein.

Haspel. Das vorzüglichste Mittel zur Aufnahme der Menschenkraft ist §. 142
die liegende Radwelle, welche in diesem Falle den Namen Haspel (franz. treuil, tour; engl. windlass) erhält. Diese Maschine besteht im Allgemeinen aus einer horizontalen Welle, an deren Umfang die Last wirkt, und in einem Systeme von Handhaben oder Spillen zur Aufnahme der Kraft. Man unterscheidet vorzüglich drei Arten von Haspeln, nämlich den Kurbel- oder Hornhaspel, den Kreuz- und den Spillenhaspel, von einander. Bei dem Hornhaspel wirkt die Kraft an der Kurbel (franz.

manivelle; engl. winch), einem knieförmig gebogenen Anſatze CAD, Fig. 282, des Zapfens der Welle. Der Kreuzhaspel, Fig. 283, hat ſtatt der Kurbel, durch die Welle CO geſteckte, als Hebel dienende Arme, CA, CA_1 ... und der Spillenhaspel, Fig. 284, iſt eine vollſtändige Radwelle mit ra-

Fig. 282.

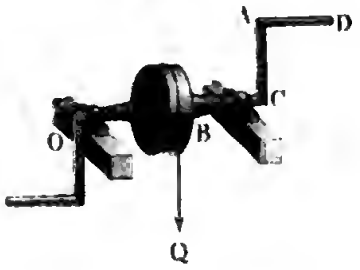


Fig. 283.

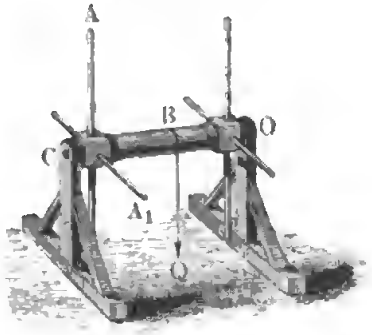
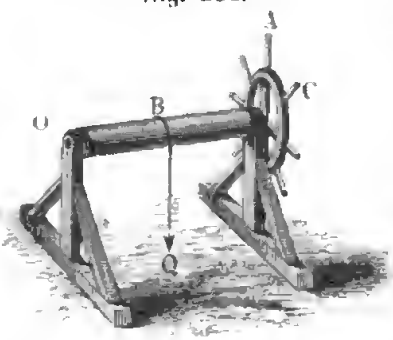


Fig. 284.



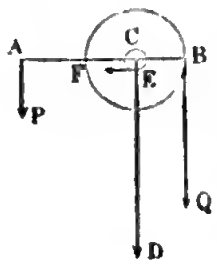
dialen oder axialen Handhaben oder Spillen (franz. chevilles; engl. pins). Bei dem Hornhaspel verändert der Arbeiter ſeinen Angriffspunkt während einer Umdrehung nicht, bei den Kreuz- und Spillenhaspeln hingegen geht hierbei die Hand des Arbeiters von einem Arme oder von einer Spille zur anderen über. Die letzteren beiden Haspelarten werden angewendet, wenn es darauf ankommt, auf kürzere Zeit und bei längeren Unterbrechungen große Laſten zu überwinden, z. B. Baumaterialien und Maſchinentheile beim Aufſtellen derſelben zu heben u. ſ. w. Zur gewöhnlichen ſtetigen Arbeitsverrichtung dienen die Hornhaspel.

Damit der Arbeiter am Hornhaspel ſeine Arbeit mit möglichſtem Nutzen verrichten könne, iſt es nöthig, daß die Armlänge oder Kurbel, der menſchlichen Armlänge entſprechend, 16 bis 18 Zoll betrage, und daß die Axe der Kurbel, der mittleren Menſchenlänge entſprechend, 38 bis 39 Zoll über dem Fußboden ſtehe. Uebrigens hat man nach der Zahl der Arbeiter, welche ſich an einem Haspel anſtellen laſſen, ein-, zwei- und mehrmänniſche Kurbeln (Haspeln). Da der Menſch mit weniger Anſtrengung drückend und ſchiebend arbeiten kann, als ziehend und hebend, ſo wird ihm die Umdrehung der Kurbel an allen Stellen ihrer Spille im Kreiſe nicht gleich ſchwer, und es iſt deshalb zweckmäßig, bei einem zwei- oder mehrmänniſchen Haspel die Spillen auf dem Kreiſe gleichmäßig zu vertheilen, alſo z. B. beim zweimänniſchen Haspel die beiden Kurbelhörner einander gegenüber zu ſtellen.

Man hat die tägliche Leiſtung eines Menſchen an der Kurbel nicht

größer als 1'105920 Fußpfund gefunden, und zwar bei der mittleren Kraft $K = 16$ Pfund, mittleren Geſchwindigkeit $c = 2{,}4$ Fuß und Arbeitszeit $t = 8$ Stunden. Die Berechnung des Haspels iſt übrigens von der Berechnung einer Radwelle überhaupt nicht verſchieden. Wirkt die Laſt Q, Fig. 285, am Hebelarme $CB = b$, die Kraft P aber am Hebelarme $CA = a$,

Fig. 285.



ſo hat man:

$$Pa = Qb,$$

daher die einer gegebenen Laſt entſprechende Kraft:

$$P = \frac{b}{a} Q;$$

iſt noch D der Zapfendruck und r der Zapfenhalbmeſſer CE, ſo hat man vollſtändiger:

$$Pa = Qb + \varphi Dr,$$

und daher:

$$P = \frac{b}{a} Q + \frac{r}{a} \cdot \varphi D.$$

Beſteht die Laſt Q ſammt Reibung $\frac{r}{a} \varphi D$ aus der Nutzlaſt Q_1, der conſtanten Nebenlaſt W und der veränderlichen Nebenlaſt δQ, iſt alſo $Q = (1 + \delta) Q_1 + W$, ſo gilt die Regel

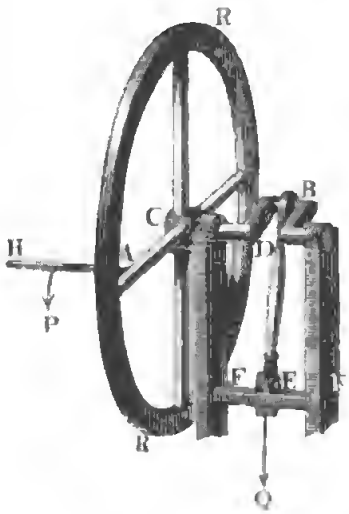
$$P = \frac{b}{a} [(1 + \delta) Q_1 + W] = K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2},$$

alſo iſt das Verhältniß

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 + \delta) Q_1 + \frac{1}{2} W}{K}$$ zu machen.

Da aber die Kurbel eine vorgeſchriebene Höhe von 16 bis 18 Zoll hat,

Fig. 286.



ſo iſt hiernach der Hebelarm b der Laſt zu beſtimmen, nämlich

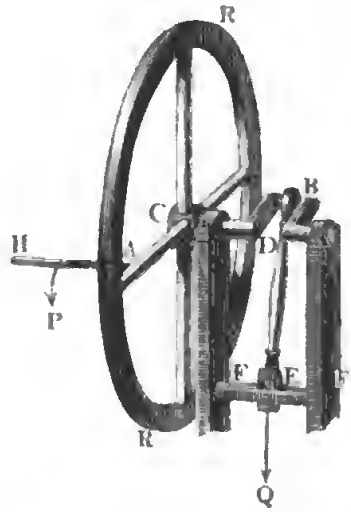
$$b = \frac{Ka}{(1 + \delta) Q_1 + \frac{1}{2} W}$$

zu machen, damit die Arbeiter mit möglichſtem Vortheile wirken.

Wenn die Laſt Q an einem Haspel variabel iſt, wenn ſie z. B. an einem Krummzapfen oder einer anderen Kurbel DB, Fig. 286, wirkt, ſo iſt es zweckmäßig, die Kurbelwelle CD mit einem Schwungrade RR auszurüſten, welches durch ſeine Trägheit die Veränderlichkeit der nöthigen Kraft P in einem gewiſſen Grade ausgleicht. Man

kann in dieſem Falle die Handhabe oder Spille AH an einem Arme des Schwungrades befeſtigen, welcher dann mit derſelben die eigentliche Kraftkurbel bildet. Die Laſt oder der Widerſtand Q greift hier zunächſt an einen Querarm FF an, welcher in einer Geradführung beweglich und durch die ſogenannte Kurbelſtange BE mit der Laſtkurbel verbunden iſt.

Fig 287.



Bezeichnet hier wieder a die Länge des Kraftarmes CA, und b die Länge des Laſtarmes DB, ſo iſt während einer halben Umdrehung der Weg der Kraft, $= \pi a$, und der der Laſt, $= 2b$, und daher, wenn man von den Nebenhinderniſſen abſieht, zu ſetzen:

$$P \,.\, \pi a = Q \,.\, 2b,$$

folglich die mittlere Umdrehungskraft:

$$P = \frac{2}{\pi}\,\frac{b}{a}\,Q.$$

Beiſpiel. An einem zweimänniſchen Haspel wirkt eine Laſt Q von 200 Pfund, wovon aber nur 150 Pfund Nutzlaſt, dagegen 30 Pfund conſtante und 20 Pfund veränderliche Nebenlaſt ſind; der Hebelarm der Laſt beträgt 4 Zoll, der der Kraft 18 Zoll, der Zapfenhalbmeſſer $\frac{1}{2}$ Zoll, ferner der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$, und das Gewicht der Maſchine, $= 80$ Pfund; man ſucht die Leiſtung dieſer Maſchine. Die ganze Kraft iſt, wenn man den Zapfendruck zu $D = 200 + 80 = 280$ Pfund annimmt:

$$P = \frac{4}{18}\cdot 200 + 0{,}1\cdot\frac{1}{2\,.\,18}\cdot 280 = 44{,}44 + 0{,}78 = 45{,}22 \text{ Pfund},$$

daher die eines Arbeiters $= 22{,}61$ Pfund,

und nach der Gerſtner'ſchen Formel die Geſchwindigkeit der Kraft oder Haspelſpille:

$$v = \left(2 - \frac{P}{K}\right) c = \left(2 - \frac{22{,}61}{16}\right)\cdot 2{,}4 = 1{,}408 \text{ Fuß},$$

alſo die der Laſt:

$$w = \frac{a}{b}\,v = \tfrac{2}{9}\,.\,1{,}408 = 0{,}313 \text{ Fuß}.$$

und die Nutzleiſtung pr. Secunde:

$$Q_1 w = 0{,}313\,.\,150 = 46{,}95 \text{ Fußpfund},$$

und täglich:

$$= 1359160 \text{ Fußpfund};$$

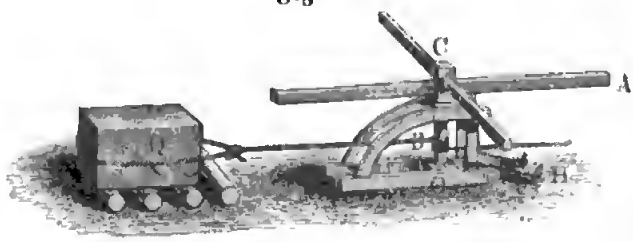
endlich iſt der Wirkungsgrad, da beide Arbeiter die Arbeit $2\,.\,1105920 = 2211840$ Fußpfund verrichten können:

$$\eta = \frac{1359160}{2211840} = 0{,}615.$$

Anmerkung. Trethaspel, Zug- und Stoßhaspel u. ſ. w. ſind außer Gebrauch gekommene Vorrichtungen, über die man ſich in den älteren Werken von Langsdorf, Gerſtner u. ſ. w. unterrichten kann.

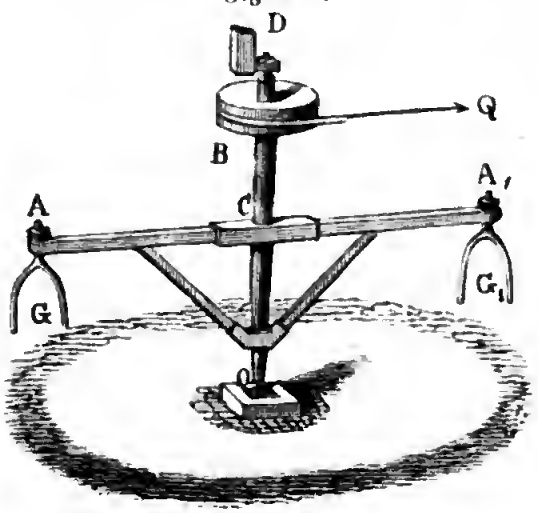
Stehende Welle. Die ſtehende Welle oder Winde (franz. cabestan; engl. capstan) wird entweder von Menſchen oder von Thieren in Umdrehung geſetzt. Man unterſcheidet Erdwinden, Schiffswinden und Göpel. Die Erdwinde, Fig. 288, iſt transportabel und dient gewöhnlich zum Fortſchaffen großer Laſten auf dem Erdboden. Sie beſteht aus einer runden Welle CO und aus vier, durch ihren vierſeitigen Kopf C geſteckten Armen wie CA u. ſ. w. Ihr Geſtell wird mittels Stricken an eingeſchlagene Pfähle H befeſtigt. Die Schiffswinde iſt von der Erdwinde nicht weſentlich verſchieden. §. 143

Fig. 288.



Der Göpel (franz. baritel; engl. whim) iſt eine größer ſtehende Welle, welche vorzüglich zum Heben von Laſten, namentlich zum Fördern aus Gruben, dient. Er wird entweder durch Menſchen oder durch Pferde in Bewegung geſetzt, und heißt im erſten Falle ein Handgöpel, im zweiten aber ein Pferdegöpel (franz. manége, baritel à chevaux; engl. horse-capstan, whim-gin). Die arbeitenden Geſchöpfe ſetzen denſelben in Umdrehung, indem ſie ſelbſt auf der ſogenannten Rennbahn im Kreiſe herumgehen und die Arme der Welle (Schwengel) entweder vor ſich hinſchieben oder mit ſich fortziehen. Fig. 289 ſtellt einen Pferdegöpel neuerer Conſtruction vor. DO iſt die Welle, welche bei O auf einem Stifte ſteht, und ACA_1 iſt der Doppelſchwengel, durch deſſen Enden die bolzenförmigen Köpfe von Gabeln G, G_1 geſteckt werden. Letztere greifen über die Rücken der Pferde weg und werden an die Kummete derſelben angeſchloſſen. Die Laſt Q wirkt an einer Trommel oder an einem gezahnten Rade B mittel- oder unmittelbar, was wir jetzt unbeſtimmt laſſen müſſen. Es iſt eine praktiſche Regel, die Schwengellänge

Fig. 289.



CA oder den Halbmeſſer der Rennbahn möglichſt groß zu machen, damit die Zahl der Umdrehungen der Welle bei Zurücklegung eines gewiſſen Weges möglichſt klein ausfalle, und ſich die Bewegung des Geſchöpfes ſo viel wie möglich einer geradlinigen nähere. Bei Handgöpeln macht man dieſen Halbmeſſer nur 8 bis 12 Fuß, bei Pferdegöpeln aber 20 bis 30 Fuß. Auch iſt dafür Sorge zu tragen, daß die Kraft möglichſt horizontal auf den Schwengel übertragen werde, und daher der Schwengel in einer gewiſſen Höhe über der Rennbahn anzubringen. Bei der in Fig. 289 abgebildeten Einrichtung mit Gabeln wirkt die Kraft der Pferde ziemlich winkelrecht gegen den Schwengel; werden aber die Pferde an eine Deichſel geſpannt (ſiehe Theil III, Artikel „Förderungsmaſchinen“), ſo ziehen die Pferde etwas ſchief, indem die Deichſel ſelbſt eine Sehne der Rennbahn bildet. Aus der radial gemeſſenen Schwengellänge $\overline{CA} = a$, Fig. 290, und aus der Deichſellänge $\overline{AD} = d$, ergiebt ſich der Hebelarm der zu beiden Seiten der Deichſel angeſpannten Pferde:

$$\overline{CN} = a_1 = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}},$$

oder annähernd

$$a_1 = a - \frac{d^2}{8a}.$$

Fig. 290.

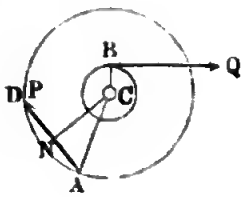
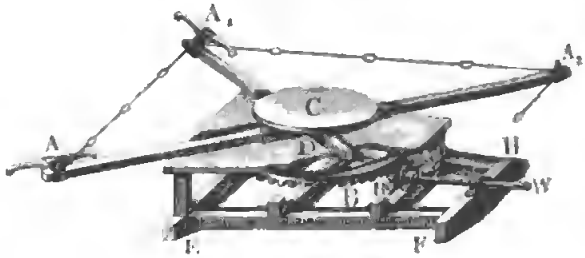


Fig. 291.



In Fig. 291 iſt ein transportabler Göpel zum Gebrauch in der Landwirthſchaft monodimetriſch abgebildet. Derſelbe beſteht aus vier Schwengeln CA, CA_1, CA_2 ..., wovon jedoch der eine in der Figur abgebrochen iſt, und ruht mittels eines einfachen Geſtelles auf einem unmittelbar auf der Erde liegenden Balkengeviere EFH. Die Wagen A, A_1, woran die Pferde angeſpannt werden, ſind mittels aufrecht ſtehender Bolzen mit den Schwengelenden und letztere durch einfache Ketten mit einander in Verbindung geſetzt. Auf der ſtehenden Welle, mit welcher die Schwengel durch ein eiſernes Kreuz verbunden ſind, ſitzt ein größeres Zahnrad BD, und dieſes greift in ein kleineres Zahnrad R, welches auf der horizontalen Welle RW ſitzt, wodurch die Kraft auf die Arbeitsmaſchine übergetragen wird. Uebrigens ruht die ſtehende Welle unmittelbar unter dem Armgeviere in einem Halslager und unten in einem auf einer Mittelſchwelle befeſtigten Fußlager.

Erfahrungsmäßig kann man annehmen, daß ein Arbeiter bei täglich 8 Stunden Arbeitszeit am Göpel mit 24 Pfund Kraft und 2,0 Fuß Geschwindigkeit arbeite, also ein tägliches Arbeitsquantum von

$$24 \,.\, 2{,}0 \,.\, 28800 = 48 \,.\, 28800 = 1'382400 \text{ Fußpfund}$$

verrichte; daß dagegen ein Pferd an eben dieser Maschine bei 8 Stunden täglicher Arbeitszeit und bei einer Geschwindigkeit von 2,9 Fuß (im Schritt) eine Kraft von 90 Pfund ausübe, also täglich:

$$90 \,.\, 2{,}9 \,.\, 28800 = 261 \,.\, 28800 = 7'516800 \text{ Fußpfund}$$

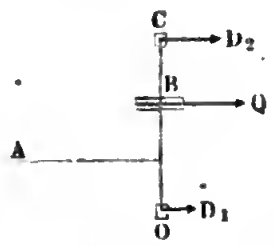
Arbeit verrichten könne.

Die Kraft am Göpel ist, wie bei jeder Radwelle, wenn die Last Q am Hebelarme $\overline{CB} = b$ (Fig. 290) wirkt:

$$P = \frac{b}{a}\, Q.$$

Nun entsteht aber noch eine Reibung unten am Stifte und eine Reibung am Umfange des Stiftes und Zapfens, daher fällt mit Berücksichtigung beider Reibungen die Kraft noch etwas größer aus. Ist G das Gewicht der armirten Göpelwelle und r_1 der Halbmesser ihres Stiftes, so hat man das statische Moment der Reibung am Stifte (Band I, §. 188), $= {}^2/_3\, \varphi\, G\, r_1$. In der Regel liegt der Angriffspunkt B der Last (Fig. 292) nicht mitten zwischen dem Zapfen C und dem Stifte O, sondern er ist dem einen oder dem anderen näher; daher haben denn auch beide ungleiche Theile von der Last Q aufzunehmen und es sind deshalb auch dieselben nicht von gleicher Stärke zu machen. Steht der Lastpunkt vom unteren Zapfen um $BO = l_1$ und vom oberen um $BC = l_2$ ab und bezeichnet man die ganze Länge $CO = l_1 + l_2$ der stehenden Welle durch l, so hat man den Druck am unteren Zapfen:

Fig. 292.



$$D_1 = \frac{l_2}{l}\, Q,$$

und den Druck am oberen:

$$D_2 = \frac{l_1}{l}\, Q,$$

wie leicht zu finden ist, wenn man einmal C und ein anderes Mal O als Stützpunkt eines Hebels CBO ansieht. Deshalb ist denn auch die Summe der statischen Momente der Seitenreibungen am Zapfen und am Stifte:

$$= \varphi\, D_1\, r_1 + \varphi\, D_2\, r_2 = \frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l} \cdot \varphi\, Q,$$

und die Kraftgleichung des Göpels:

$$P a = Q b + {}^2/_3\, \varphi\, G\, r_1 + \varphi\, Q \cdot \frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l}.$$

Anmerkung 1. Von der Anwendung der Göpel zum Fördern iſt im dritten Theile die Rede.

Anmerkung 2. Franzöſiſche Schriftſteller führen an, daß ein Pferd im Trabe am Göpel täglich $4\frac{1}{2}$ Stunden mit 30 Kilogrammen = 60 Pfund Kraft und 2 Meter = 6,37 Fuß Geſchwindigkeit arbeiten kann, und ſo täglich 6'191640 Fußpfund Arbeit verrichtet. Wenden wir die Gerſtner'ſche Formel an, ſetzen wir $K = 112$ Pfund, $c = 4$ Fuß, $v = 6{,}37$ Fuß, $t = 8$ Stunden und $z = 4\frac{1}{2}$ Stunden, ſo erhalten wir die Kraft:

$$P = \left(2 - \frac{6{,}37}{4}\right)\left(2 - \frac{4{,}5}{8}\right) \cdot 112 = 9{,}37 \,.\, 7 = 65{,}6 \text{ Pfund},$$

und daher die tägliche Leiſtung:

$$= 65{,}6 \,.\, 6{,}37 \,.\, 4{,}5 \,.\, 3600 = 6'769526 \text{ Fußpfund},$$

alſo in ziemlicher Uebereinſtimmung mit dieſer Angabe. Nehmen wir aber die oben angegebene Geſchwindigkeit $c = 2{,}9$ Fuß im Schritte an, ſo erhalten wir, nach Gerſtner, die Kraft viel größer, nämlich:

$$\left(2 - \frac{2{,}9}{4}\right) \,.\, 112 = 1{,}275 \,.\, 112 = 142{,}8 \text{ Pfund},$$

und daher die tägliche Leiſtung:

$$414{,}1 \,.\, 28800 = 11'926080 \text{ Fußpfund}.$$

Anmerkung 3. Die Kräfte der Pferde, wenn dieſe an gegenüberſtehenden Schwengeln wirken, vergrößern den Zapfendruck um nichts, ſind aber die Pferde nur an einem Schwengel angeſpannt, ſo trägt ihre Kraft etwas zur Vergrößerung des Zapfendruckes bei, es iſt nämlich, einer Abhandlung des Verfaſſers in den polytechniſchen Mittheilungen Band I zufolge, ſtatt der Laſt Q:

$$Q\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{P}{Q}\right)^2\right] = Q\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

einzuſetzen, und daher

$$D_1 = \frac{l_2}{l}\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] Q, \text{ ſowie}$$

$$D_2 = \frac{l_1}{l}\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] Q$$

anzunehmen, ſo daß das Moment der Seitenreibung ſich

$$F = \varphi\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left(\frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l}\right) Q$$

herausſtellt.

Aehnlich verhält es ſich auch beim einmänniſchen Haspel.

§. 144 **Tret- und Laufrad.** Zuweilen werden Maſchinen durch die Gewichte von Menſchen oder Thieren in Bewegung geſetzt, indem dieſe an dem Umfange eines Rades emporzuſteigen ſuchen. Solche Maſchinen heißen im Allgemeinen Treträder (franz. treuils à tambour; engl. tread-mills); doch hat man dieſelben von ſehr verſchiedenen Conſtructionen. Das Laufrad (franz. treuil de tambour) beſteht ſowie das Tretrad (franz. treuil à échelons) aus zwei Radkränzen, welche durch Arme mit der Welle und untereinander durch einen Boden verbunden ſind; nur ſteht bei dem erſten der Arbeiter im Inneren des Rades, und bei dem zweiten auf dem äußeren

Umfange desſelben. Um dem Arbeiter einen ſicheren Stand zu verſchaffen und die Kraft desſelben auf das Rad überzutragen, iſt der Boden des Laufrades (Fig. 293) in je $1\frac{1}{2}$ Fuß Entfernung mit Latten beſchlagen, der Raum zwiſchen den Kränzen des Tretrades (Fig. 294) aber mit Stufen oder Staffeln bildenden Schaufeln ausgerüſtet.

Das Sproſſenrad (franz. treuil à chevilles), Fig. 295, beſteht nur aus einem Kranze und hat, ſtatt der Schaufeln, durch den Kranz geſteckte Bolzen, an denen ſich der Arbeiter anhält wie an den Sproſſen einer Leiter. Bei dem letzten Rade ſteht der Arbeiter ziemlich in der halben Radhöhe, und es wirkt daher derſelbe mit ſeinem ganzen Gewichte G an einem den Radhalbmeſſer noch übertreffenden Hebelarme $\overline{CA} = a$; bei dem Tret- und Laufrade hingegen ſteht derſelbe um einen ſpitzen Winkel $ACK = \alpha$ vom Radoberſten oder Radunterſten ab, und es iſt deshalb der Hebelarm ſeines Gewichtes G kleiner als der Radhalbmeſſer $\overline{CA} = a$, nämlich:

Fig. 293.

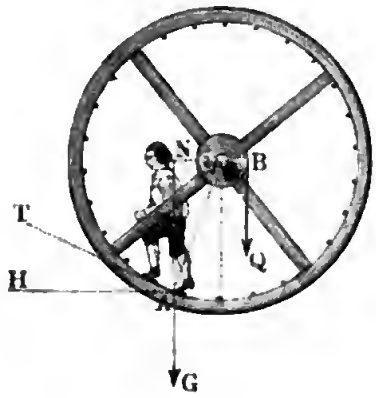


Fig. 294.

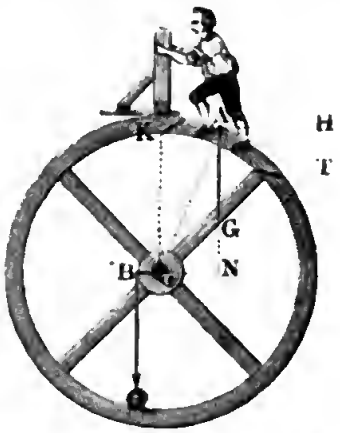
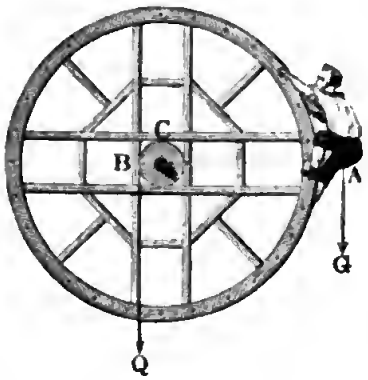


Fig. 295.



$$\overline{CN} = a_1 = \overline{CA}\,sin.\,CAN = a\,sin.\,\alpha.$$

Dafür iſt aber auch die Anſtrengung des Arbeiters am Sproſſenrade größer als die am Tret- oder Laufrade; ſie entſpricht dort der Kraft zum Hinaufſteigen auf einer verticalen Leiter, hier aber der Kraft zum Aufſteigen auf einer durch die Tangente AT gegebenen ſchiefen Ebene mit dem Steigwinkel $TAH = CAN = \alpha$. Es iſt alſo die Anſtrengung P dort

$$= G,\text{ hier aber}$$
$$= G\,sin.\,\alpha.$$

Wirkt die Laſt Q am Hebelarme $\overline{CB} = b$, ſo hat man für das Sproſſenrad

$$G a = Q b,$$

und für das Tret- und Laufrad:

$$G a \sin. \alpha = Q b,$$

oder, indem man die Kraft oder Anſtrengung P einführt, für beide Maſchinen, ſowie für den Haspel und Göpel,

$$P a = Q b.$$

Es gewähren alſo Tretmaſchinen in mathematiſcher Beziehung keinen Vorzug vor den Haspeln und Winden; es verrichtet aber der Menſch an derſelben mehr tägliche Leiſtung als an anderen Maſchinen und inſofern iſt die Anwendung dieſer Maſchinen immer von Vortheil. Die Anwendung von Thieren bei dieſen Maſchinen iſt nicht von Vortheil, nicht allein weil die vierfüßigen Thiere, und zumal die Pferde, beim Steigen weniger zu leiſten vermögen, ſondern auch deshalb, weil ſich die Thiere hier weniger leicht anſtellen laſſen und leicht Gefahr laufen, ſich zu beſchädigen oder zu verunglücken.

Man rechnet, Erfahrungen zufolge, daß ein Menſch bei 8 Stunden Arbeitszeit mit 120 Pfund Kraft und mit 0,48 Fuß Geſchwindigkeit am Tretrade arbeite, wenn er in der Nähe des Radmittels wirkt, daß er aber mit 24 Pfund Kraft und $2^1/_4$ Fuß Geſchwindigkeit arbeite, wenn ſein Standpunkt 24^0 vom Radtiefſten oder Radhöchſten abſteht. Es leiſtet demnach ein Arbeiter täglich auf die erſte Weiſe:

$$120 \,.\, 0{,}48 \,.\, 28800 = 1'658880 \text{ Fußpfund},$$

und auf die zweite:

$$24 \,.\, 2^1/_4 \,.\, 28800 = 1'555200 \text{ Fußpfund}.$$

Pferde und andere vierfüßige Thiere leiſten hier mindeſtens nicht mehr als an der ſtehenden Welle.

Ein Theil des Vortheiles, welchen die Tret- und Laufräder vor dem Haspel oder der Winde haben, geht wieder durch die Zapfenreibung verloren, welche bei dieſen Rädern größer iſt, da ſie viel ſchwerer ausfallen als Haspel und Winden. Iſt $n\,G$ das Gewicht der Arbeiter, G_1 das Gewicht der Maſchine, und wirkt die angehängte Laſt Q vertical abwärts, ſo hat man den Zapfendruck:

$$D = n G + G_1 + Q,$$

und bezeichnet nun noch r den Zapfenhalbmeſſer, ſo hat man das ſtatiſche Reibungsmoment:

$$= \varphi\,(n G + G_1 + Q)\, r,$$

ſowie die Kraftformel:

$$n G a \sin. \alpha = Q b + \varphi\,(n G + G_1 + Q)\, r.$$

Iſt die Laſt gegeben, ſo kann man hiernach den Steigwinkel α finden, nämlich:

$$sin.\,\alpha = \frac{Q\,b + \varphi\,(n\,G + G_1 + Q)\,r}{n\,G\,a},$$

oder die nöthige Zahl der Arbeiter:

$$n = \frac{Q\,b + \varphi\,(G_1 + Q)\,r}{G\,(a\,sin.\,\alpha - \varphi\,r)}.$$

Am vortheilhafteſten wirken die Menſchen, wenn bei der conſtanten Nebenlaſt W ihre Kraft

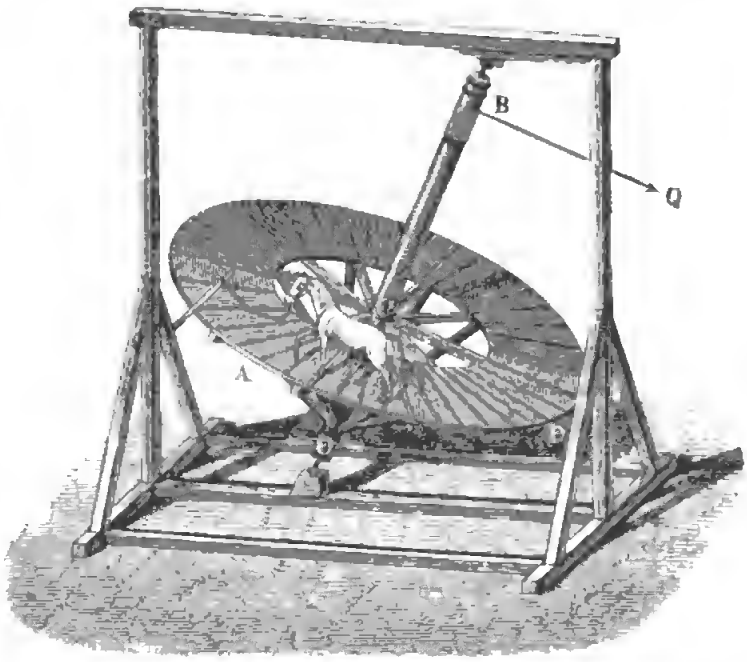
$$n\,P = n\,G\,sin.\,\alpha = n\,K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2},$$

alſo

$$sin.\,\alpha = \left(K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2\,n}\right) : G \quad \text{iſt.}$$

Tretscheibe. In der Landwirthſchaft findet man zuweilen die in Fig. 296 abgebildete Tretſcheibe angewendet. Man läßt auf derſelben die Pferde §. 145

Fig. 296.



oder Ochſen nur auf kurze Zeit wirken. Sie hat den Vorzug vor anderen Maſchinen, daß man das arbeitende Thier ohne Aufſicht laſſen kann. Die Wirkung der Thiere iſt übrigens genau dieſelbe wie bei dem Tret- und Laufrade, wenn man das Thier in der Nähe des horizontalen Halbmeſſers arbeiten läßt. Dieſe Maſchine beſteht aus einer Welle $B\,O$, deren Axe 20 bis 25° von der Richtung der Schwere abweicht, und aus einer mit radial laufenden Latten beſchlagenen Scheibe $A\,C\,D$ von 20 bis 25 Fuß Halbmeſſer, welche winkelrecht auf der Welle aufſitzt, und deshalb eine Neigung von 20 bis 25° gegen den Horizont hat. Steht das arbeitende Thier um den horizontalen Halbmeſſer

$CA = a$ von der Wellenaxe ab, und iſt der Neigungswinkel der Scheibe, ſowie der Steigwinkel des Pferdes, $= \alpha$, ſo hat man die Umdrehungskraft:

$$P = G \sin. \alpha,$$

und daher, wie beim Tret- und Laufrade, das Umdrehungsmoment:

$$= Pa = Ga \sin. \alpha.$$

Wirkt nun noch die Laſt Q am Hebelarme b, ſo hat man ihr Moment

$$= Qb,$$

iſt ferner G_1 das Gewicht der armirten Maſchine und bezeichnet r die Halbmeſſer ihrer Zapfen, ſo hat man das ſtatiſche Moment der Reibung an der Baſis derſelben:

$$= {}^2/_3 \varphi (G + G_1) \cos. \alpha \, . \, r,$$

und das Moment der Seitenreibung:

$$= \varphi [(G + G_1) \sin. \alpha + Q] \, r,$$

weil ſich das Gewicht $G + G_1$ in die Seitenkraft $(G + G_1) \cos. \alpha$ nach der Richtung der Axe, und in die Seitenkraft $(G + G_1) \sin. \alpha$ nach der Fallrichtung der Scheibe zerlegt, und Q in der Richtung der letzten Kraft wirkt. Es folgt hiernach:

$$Ga \sin. \alpha = Q (b + \varphi r) + \varphi (G + G_1) ({}^2/_3 \cos. \alpha + \sin. \alpha) \, . \, r.$$

Da der Componente $G \cos. \alpha$ vom Gewichte G, welcher die Richtung der Axe BO hat, excentriſch wirkt, ſo giebt derſelbe nicht allein einen Axendruck, ſondern auch ein Kräftepaar (ſ. Bd. I, §. 133), welches die Tretſcheibe in der Ebene ABC umzudrehen ſucht, und die Seitenwirkungen in B und O noch etwas vergrößert. Dieſe Vergrößerung iſt jedoch bei den gewöhnlichen Dimenſionen und Gewichten klein genug, um ſie außer Acht laſſen zu können.

Es gehört hierher auch die ſogenannte Tretbrücke (engl. horse-power-Engine), wo das arbeitende Pferd auf einer ſchiefen Ebene ſteht, welche durch eine Kette ohne Ende gebildet wird. (Siehe den Artikel „Tretrad in Prechtʼs Encyclopädie. Auch Whitworth: Report on the New-York Industrial-Exhibition of 1853.)

Beiſpiel. Man will durch ein 20 Fuß hohes Tretrad eine an einem Hebelarme von 0,75 Fuß wirkende Laſt von 900 Pfund heben und ſucht die nöthige Zahl der Arbeiter. Schätzen wir das Gewicht des belaſteten Rades zu 5000 Pfd., nehmen wir den Zapfenhalbmeſſer 2 Zoll und den Reibungscoefficienten 0,075 an, ſo erhalten wir das ſtatiſche Laſtmoment:

$$Qb + \varphi (G + G_1) \, r = 0{,}75 \, . \, 900 + 0{,}075 \, . \, {}^1/_6 \, . \, 5000 = 675 + 62{}^1/_2$$
$$= 737{}^1/_2 \text{ Fußpfund},$$

und daher die nöthige Kraft am Umfange des Rades:

$$P = \frac{737{,}5}{10} = 73{,}75 \text{ Pfund}.$$

Nun übt aber ein Arbeiter bei circa 24° Abſtand vom Radſcheitel eine Kraft von 24 Pfund aus; es wird daher die nöthige Arbeiterzahl

$$n = \frac{73{,}75}{24} = 3$$

ausreichend, und nun zu erwarten ſein, daß dieſelben eine tägliche Leiſtung von

$$3 \cdot 1555200 = 4665600 \text{ Fußpfund}$$

liefern und demnach in dieſer Zeit die Laſt Q von 900 Pfund

$$\frac{4665600}{900} = 5184 \text{ Fuß}$$

hoch heben, oder z. B. täglich

$$\frac{5184}{200} = 26 \text{ mal } 900 \text{ Pfund}$$

auf die Höhe von 200 Fuß fördern.

Drittes Capitel.

Von dem Anſammeln, ſowie von dem Zu- und Abführen des Aufſchlagewaſſers.

Waſſerleitungen. Das Aufſchlagewaſſer (franz. l'eau motrice; engl. the moving water), d. i. das Waſſer, wodurch Maſchinen in Bewegung geſetzt werden, nimmt man meiſtens aus Bächen und Flüſſen, oft aber auch aus Seen und Teichen, und nur ſelten unmittelbar aus Quellen. In den meiſten Fällen kann die Maſchine nicht unmittelbar am Faſſungspunkte des Waſſers aufgeſtellt werden, ſondern es iſt dieſelbe hiervon mehr oder weniger entfernt, und daher faſt immer eine Waſſerleitung (franz. conduite d'eau; engl. conduit of water) nöthig, um das Aufſchlagewaſſer vom Faſſungspunkte nach der Maſchine zu führen. Die Waſſerleitungen ſind entweder oben offen oder ringsum verſchloſſen. Zu den offenen Waſſerleitungen gehören die Canäle, Gräben und Gerinne, zu dieſen aber die Röhrenleitungen. Canäle (franz. und engl. canals) ſind die größeren, meiſt ſchiffbaren, Gräben (franz. fosses; engl. ditches) aber die kleineren, ſtets unſchiffbaren, aus Mauern, Steinen, Erde oder Sand gebildeten, Gerinne (Spundſtücke) franz. auges, rigoles; engl. channels) endlich die aus Holz, Eiſen oder Steinen künſtlich zuſammengeſetzten oben offenen Waſſerleitungen. Die Röhrenleitungen (franz. tuyaux de conduite; engl. pipes, conduits) beſtehen aus cylindriſch oder prismatiſch geformten Röhren von Eiſen, Holz, Thon, Steinen, Glas u. ſ. w. In ihnen führt man meiſt nur kleinere Waſſerquanta ab. Uebrigens haben ſie vor den offenen Waſſerleitungen den Vorzug, daß ſie mit beliebigem Steigen und Fallen angelegt werden können, während die offenen Waſſerleitungen vom Faſſungspunkte aus ſtets fallen müſſen. Es laſſen ſich daher durch Röhrenleitungen Thäler, Schluchten und Anhöhen überſchreiten, ohne Ueberbrückungen oder Unterfahrungen nöthig zu haben. Um dagegen mit oben offenen Waſſerleitungen große Umwege zu vermeiden, iſt es nöthig, bei Ueberſchreitung von Vertiefungen oder Erhöhungen der Erdoberfläche, in welcher dieſe Leitungen gewöhnlich eingeſchnitten ſind, ſogenannte Aquäducte oder Röſchen (unterirdiſche Canäle) anzulegen. §. 146

§. 147 **Wehre.** Die fließenden Wasser, aus denen man den Aufschlag für eine Maschine nimmt, sind Bäche (franz. ruisseaux; engl. brooks) oder Flüsse (franz. rivières; engl. rivers). Die lebendige Kraft der fließenden Wasser ist — bei der mäßigen Geschwindigkeit von 1 bis 7 Fuß — meist nicht hinreichend, um sie zum Umtriebe von Maschinen benutzen zu können; um dieselbe zu erhöhen, oder um das Wasser durch sein Gewicht wirken lassen zu können, ist es daher nöthig, das Wasser aufzustauen und ein Gefälle (franz. chut; engl. head) zu erzeugen. Dieses Aufstauen des Wassers erfolgt durch Wehre (franz. barrages; engl. bars, weirs), d. i. durch quer über einen Bach oder Fluß weggehende Dämme (franz. digues; engl. dams). Man unterscheidet Ueberfallwehre oder Ueberfälle und Durchlaß- oder Schleusenwehre von einander. Während bei jenen das Wasser frei über der höchsten Schwelle oder Kappe wegfließen kann, wird es bei diesen durch aufgestellte Schutzbretter (Fallschützen) noch über der Wehrkappe aufgestaut. In der Regel will man durch die Ueberfallwehre das aufgestaute Wasser oder einen Theil desselben zum Eintritt in einen nahe oberhalb des Wehres einmündenden Canal nöthigen, um es durch diesen nach der Umtriebsmaschine zu führen, wogegen man mit den Durchlaßwehren beabsichtigt, dem Wasser eine erhöhte lebendige Kraft zu ertheilen und dadurch die unmittelbar unter dem Wehre befindliche Maschine in Bewegung zu setzen.

Bei größeren Flüssen und Strömen wendet man oft Dämme an, welche nicht über die ganze Breite des fließenden Wassers weggehen, um eine Aufstauung zu bewirken. Solche Dämme nennt man lichte Wehre, während man die den ganzen Strom absperrenden Wehre dichte Wehre zu nennen pflegt. Brückenpfeiler, Buhnen und andere das Querprofil eines fließenden Wassers verengende Einbaue sind ebenfalls als lichte Wehre (franz. barrages discontinus) anzusehen.

Was die am häufigsten vorkommenden Ueberfallwehre betrifft, so unterscheidet man vollkommene Ueberfälle (franz. déversoirs complets; engl. complete overfalls) von den unvollkommenen Ueberfällen oder Grundwehren (franz. déversoirs incomplets; engl. incomplete overfalls). Bei jenen Wehren liegt die Ueberfallschwelle noch über der Oberfläche des Unterwassers, und es findet daher hier ein freier Ausfluß Statt, bei diesen hingegen liegt diese Schwelle unter dem Spiegel des abfließenden Wassers, es erleidet also hier ein Theil des überfließenden Wassers eine Rückwirkung vom Unterwasser.

§. 148 **Stauung.** Durch alle eben angeführte Einbaue erleidet das fließende Wasser eine Stauung (franz. remou; engl. swell), d. i. eine Erhöhung seines Wasserspiegels und eine damit nothwendigerweise verbundene Ge-

ſchwindigkeitsverminderung. Von beſonderer Wichtigkeit ſind die Stauhöhe und Stauweite (franz. hauteur et amplitude du remou; engl. hight and amplitude of swell). Jene iſt die Höhe der Oberfläche des aufgeſtauten Waſſers über dem erſten Waſſerſpiegel oder der Oberfläche des frei abfließenden Waſſers unmittelbar vor dem Wehre, dieſe hingegen iſt die Längenerſtreckung des Aufſtauens, vom Wehre aus aufwärts gemeſſen. Es iſt nun eine wichtige Aufgabe für uns, zu ermitteln, in welchem Verhältniſſe die Stauhöhe zu den Dimenſionen des Wehres ſteht, und nach welchem Geſetze die Stauung von der Entfernung vom Wehre abhängt, und wo dieſelbe als verſchwindend klein angeſehen werden kann.

Die Kenntniß dieſer Verhältniſſe iſt aber nicht allein deshalb nothwendig, weil durch zu große oder zu weit ſich erſtreckende Stauungen leicht Ueberſchwemmungen herbeigeführt, ſondern auch weil durch dieſelben die am fließenden Waſſer aufwärts liegenden Etabliſſements durch Entziehung von Gefälle in ihrem Gange geſtört werden können. Aus dieſem Grunde werden denn auch neben den Wehren die ſogenannten Aichpfähle oder Pegel (franz. marqueurs; engl. water-markers) eingeſetzt, an welchen die Lage der Ueberfallſchwelle angegeben wird, und deren Verrückung bei Strafe verboten iſt. Oft verſieht man die Pegel mit einer Scala zum Ableſen der Waſſerſtände.

Das mit erhöhter Geſchwindigkeit von einem dichten Wehre herab- oder zwiſchen den Pfeilern eines lichten Wehres hindurchfließende Waſſer nimmt, ehe es in die dem Gefälle des Flußbettes entſprechende gleichförmige Bewegung übergeht, eine welleuförmige und zum Theil eine wirbelnde Bewegung an, wodurch ihm ſein Ueberſchuß an bewegender Kraft entzogen wird. Durch die erhöhte Geſchwindigkeit und durch die wirbelnde Bewegung des Waſſers wird eine Reaction auf das Grundbett herbeigeführt, die oft ſehr nachtheilige Folgen haben würde, wenn man das Grundbett zunächſt unterhalb des Wehrs nicht durch ein Steinpflaſter u. ſ. w. ſchützte.

Das Waſſerquantum eines Baches oder Fluſſes iſt zu verſchiedenen Zeiten verſchieden, und man kann unterſcheiden: Großwaſſer, welches nur auf kurze Zeit, nach ſtarken Regengüſſen u. ſ. w. eintritt, Mittelwaſſer, welches zumal im Herbſt und Frühjahr und im Ganzen mindeſtens die Hälfte des Jahres vorzufinden iſt, Kleinwaſſer, welches nur auf kurze Zeit im Sommer vorkommt, und endlich Immerwaſſer, die kleinſte, nur in ſehr trockenen Jahren (z. B. in Deutſchland im Sommer 1842) zu beobachtende Waſſermenge. Es iſt nun ſehr zweckmäßig, wenigſtens das Mittel- und Kleinwaſſer des Baches zum Umtriebe einer Maſchinenanlage zu kennen, um hiernach nicht nur die Maſchine, ſondern auch das Wehr und die Gräben anordnen und conſtruiren zu können. Aus dieſem Grunde ſind denn vor Allem nach einer der in Band I, §§. 480, 481 u. ſ. w. angegebenen Me-

thoden zu verſchiedenen Zeiten Waſſermeſſungen anzuſtellen. Es iſt nun eine Regel, das Waſſer durch Wehre nur ſo hoch aufzuſtauen, daß es zur Zeit des Großwaſſers nicht übertrete und die Umgegend überſchwemme.

§. 149 **Wehrbau.** Für das Maſchinenweſen ſind die **Ueberfallwehre** die wichtigſten. Sie bilden entweder einen geraden, meiſtens winkelrecht gegen den Stromſtrich gerichteten Damm, oder ſie beſtehen aus zwei gegen den Strom gerichteten und in der Mitte zuſammenſtoßenden Dämmen, deren Spitze nach Befinden durch einen kurzen Zwiſchendamm abgeſchnitten oder abgerundet iſt, oder ſie ſind kreisbogenförmige, mit der Convexität der Bewegung des Waſſers entgegengerichtete Dämme. Die Wehre werden von Holz, oder von Steinen, oder von beiden zugleich erbaut. Sie können ſelten auf feſtes Geſtein gegründet werden, ſondern man muß dieſelben meiſt auf einen Pfahlroſt betten. Die Querprofile ganz oder theilweiſe hölzerner Wehre haben mehr oder weniger die Form eines Fünfeckes $ABCDE$, Fig. 297, bei welchem AB die **Bruſt**, BC die **Vordecke**, CD die **Abſchußdecke**, DE der **Rücken**, EA ſowie die **Sohle** und C die **Ueberfallsſchwelle** oder der **Sattel**, auch **Wehrbaum** genannt wird. Die Querprofile ſteinerner Wehre werden in der Regel von oben durch krumme Linien gebildet, die ſich an das Fünfeck mehr oder weniger anſchließen, um den Abfluß des Waſſers zu erleichtern.

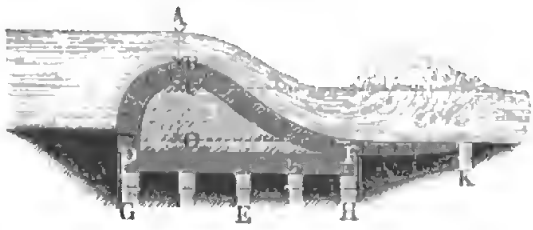
Fig. 297.

Fig. 298.

Ein **unvollkommener Ueberfall**, wie Fig. 298, beſteht aus einer Reihe von quer über das Bett weggehenden Pfählen D mit dem darüber liegenden Fachbaume C, ferner aus einer Spundwand E vor der Pfahlreihe, aus einer zweiten, tiefer unten eingerammten Pfahlreihe F und aus einem Steinpflaſter G zwiſchen beiden Pfahlreihen.

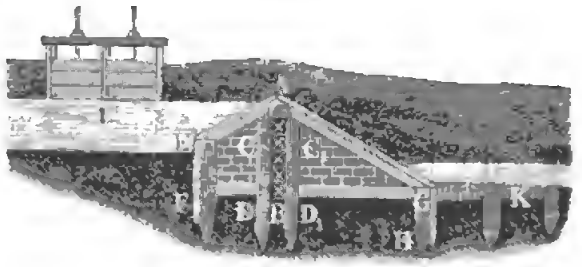
Das **vollkommene Ueberfallwehr** in Fig. 299 ruht auf einem Pfahlroſte DEF mit zwei Spundwänden G und H, und iſt aus großen Steinen gewölbförmig mit hydrauliſchem Mörtel aufgemauert. Um das Schußbett HK vor dem Ausſpülen ſicher zu ſtellen, iſt es mit großen Steinen gepflaſtert und unten noch durch eine Pfahlreihe K begrenzt.

Fig. 299.



Die Construction eines hölzernen Wehres ist in Fig. 300 ersichtlich. Hier ist AB eine aus über einander liegenden Balken bestehende Wand, A der Wehrbaum, CD und $C_1 D_1$ sind Pfahlreihen zu beiden Seiten dieser

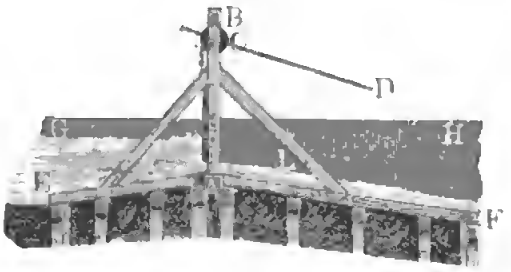
Fig. 300.



Wand, EF und GH zeigen zwei andere, außen mit Spundwänden bekleidete und oben durch Schwellen E und G bedeckte Pfahlreihen, CE und $C_1 G$ stellen Streben vor, welche den Wehrbaum A mit den Schwellen E und G verbinden und noch mit Bohlen überdeckt sind. Die inneren Räume werden ausgemauert oder mit Thon ausgeschlagen. Das Sturzbett K unterhalb des Wehres ist noch ausgepfählt und mit großen Steinen gepflastert. Bei L sind die Schutzbretter an dem Kopfe des Aufschlagewassergrabens ersichtlich.

Ein Schleusenwehr ist endlich noch in Fig. 301 abgebildet. A ist

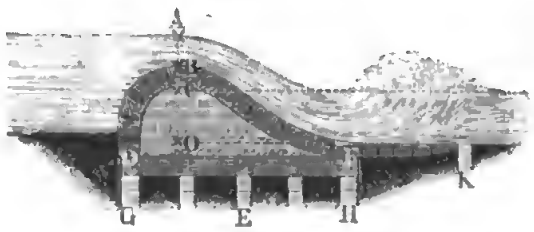
Fig. 301.



der Fachbaum, AB sind die in ihm eingezapften Griessäulen, zwischen welchen sich die Schützen in Falzen bewegen. Die Vorrichtungen zum Aufziehen der Schützen sind sehr mannigfaltig. In der Figur besteht dieselbe in einer Art Kreuzhaspel CD, und es hängt hier das Schutzbrett mittels Ketten an demselben. Von dem Fachbaume A aus neigen sich das Vor- und Hinterfluther AE und AF abwärts, beide ruhen aber auf einem Pfahlroste, sowie der Fachbaum auf einer Reihe von Grundpfählen; um das Eindringen des Wassers zu verhüten, ist dieser Pfahlrost durch ein Paar Spundwände geschlossen. Zu beiden Seiten stehen noch die aus starken Bohlen gebildeten und sich gegen lange Pfähle stützenden Seitenwände GH. Noch sind die mittleren Griessäulen mit Streben K, L gestützt, wovon die oberen (K) zugleich mit als Eisbrecher dienen.

§. 150 **Stauhöhe bei Ueberfällen.** Mit Hülfe der in der Hydraulik vorgetragenen Lehren laſſen ſich nun die Stauverhältniſſe bei Wehren ohne Schwierigkeiten ermitteln. Iſt bei dem vollkommenen Ueberfalle (Fig. 302) h die Druckhöhe AB, b die Breite und k die der Geſchwindigkeit c des ankommenden Waſſers entſprechende Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$, ſo

Fig. 302.



hat man die Waſſermenge des Ueberfalles (Bd. I, §. 416):

$$Q = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}];$$

iſt umgekehrt dieſe Waſſermenge Q bekannt, ſo folgt die entſprechende Druckhöhe über der Ueberfallſchwelle:

$$h = \left(\frac{{}^3/_2\, Q}{\mu b \sqrt{2g}} + k^{3/2}\right)^{2/3} - k.$$

Um nun die einer gegebenen Stauhöhe $AC = h_1$ entſprechende Wehrhöhe $BO = x$ zu finden, ſetzen wir:

$$AC + CO = AB + BO,$$

oder wenn wir die alte Waſſertiefe oder die Tiefe CO des Unterwaſſers durch a bezeichnen,

$$h_1 + a = h + x,$$

und es ergiebt ſich nun:

$$x = a + h_1 - h.$$

Bei etwas hoher Aufſtauung, wo x mindeſtens zwei Fuß beträgt, kann man die Geſchwindigkeitshöhe k des ankommenden Waſſers unbeachtet laſſen und daher

$$x = a + h_1 - \left(\frac{{}^3/_2\, Q}{\mu b \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

Fig. 303.

ſetzen, und es iſt, vorläufigen Berechnungen der hierüber vom Verfaſſer angeſtellten Verſuche zufolge,

$$\mu = 0{,}80$$

anzunehmen. Bei dem unvollkommenen Ueberfall, Fig. 301, iſt die Rechnung complicirter, weil ſich hier zwei verſchiedene Ausflußverhältniſſe mit einander combiniren. Es iſt nämlich hier die Waſſerhöhe $\overline{AC} = h$ über der Schwelle größer als die Stauhöhe $\overline{AB} = h_1$, und es fließt daher nur das Waſſer oberhalb

B frei aus, dagegen das Waſſer unterhalb B mit der Druckhöhe $\overline{AB} = h_1$. Deshalb iſt die durch AB fließende Waſſermenge:

$$Q_1 = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g} \left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right],$$

dagegen das durch $\overline{BC} = h - h_1$ ſtrömende Waſſerquantum:

$$Q_2 = \mu b (h - h_1) \sqrt{2g} (h_1 + k)^{1/2},$$

und hiernach das ganze Abflußquantum $Q_1 + Q_2$ zu ſetzen:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left({}^2/_3 \left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + (h - h_1)(h_1 + k)^{1/2}\right).$$

Aus dem Waſſerquantum Q und der Stauhöhe h_1 folgt nun die Höhe des oberen Waſſerſpiegels über dem Fachbaume:

$$h = h_1 + \frac{Q}{\mu b \sqrt{2g} (h_1 + k)} - {}^2/_3 \cdot \frac{(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}}{(h_1 + k)^{1/2}},$$

woraus ſich dann die Wehrhöhe

$$\overline{CO} = x = a + h_1 - h$$

ergiebt.

Für kleinere Werthe von k läßt ſich daher einfacher

$$x = a + {}^2/_3 h_1 - \frac{Q}{\mu b \sqrt{2g h_1}}$$

ſetzen. Es iſt übrigens $h > h_1$, alſo der Ueberfall ein unvollkommener, wenn

$$Q > {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g} \left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] \text{ ausfällt.}$$

Iſt die Längenaxe des Wehrdammes **kreisbogenförmig**, ſo muß man ſtatt b, die Bogenlänge der Dammkappe einführen, und in

$$k = \frac{c^2}{2g},\ c = \frac{Q}{6(a + h_1)} \text{ ſetzen.}$$

Beiſpiel. Ein Bach von 30 Fuß Breite und 3 Fuß Tiefe führt 310 Cubikfuß Waſſer pr. Secunde und ſoll durch ein Ueberfallwehr $4^1/_2$ Fuß höher aufgeſtaut werden; man ſucht die erforderliche Wehrhöhe. Da die Aufſtauung ziemlich groß iſt, ſo können wir erwarten, daß zur Berechnung der geſuchten Höhe die einfache Formel

$$x = a + h_1 - \left(\frac{3Q}{2\mu b \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

genügen werde. Es iſt in dieſer Formel $a = 3$, $h_1 = 4{,}5$, $Q = 310$, $b = 30$, $\mu = 0{,}80$ und $\sqrt{2g} = 7{,}906$ einzuſetzen, weshalb daher die Wehrhöhe folgt:

$$x = 3 + 4{,}5 - \left(\frac{3 \cdot 310}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 30 \cdot 7{,}906}\right)^{2/3} = 7{,}5 - \left(\frac{31}{12{,}65}\right)^{2/3} = 7{,}5 - 1{,}82$$
$$= 5{,}68 \text{ Fuß},$$

und daher der Ueberfall wirklich ein vollkommener, wie vorausgeſetzt wurde. Sollte das Waſſer nur 2 Fuß aufgeſtaut werden, ſo hätte man der letzten Formel zufolge

$$x = 3 + 2 - 1{,}82 = 3{,}18 \text{ Fuß},$$

alſo den Ueberfall noch vollkommen. Um endlich nur $1^1/_2$ Fuß aufzuſtauen, iſt auf jeden Fall nun nur ein unvollkommener, d. h. nicht aus dem Niveau des Unterwaſſers hervorragender Wehrdamm nöthig. Wenden wir die vollſtändige Formel an, und ſetzen wir in ihr

$$k = \frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \left(\frac{Q}{(a + h_1)b}\right)^2 = 0{,}016 \left(\frac{310}{4{,}5 \,.\, 30}\right)^2 = 0{,}016 \,.\, 5{,}27$$
$$= 0{,}084 \text{ Fuß, und } \mu \text{ wieder } = 0{,}80,$$

ſo erhalten wir:

$$h - h_1 = \frac{310}{0{,}8 \,.\, 30 \,.\, 7{,}906 \sqrt{1{,}584}} - \tfrac{2}{3} \,.\, \frac{(1{,}584)^{3/2} - (0{,}084)^{3/2}}{1{,}584^{1/2}}$$
$$= 1{,}30 - 1{,}06 + 0{,}01 = 0{,}25 \text{ Fuß}.$$

Es muß alſo die Ueberfallſchwelle $\frac{1}{4}$ Fuß oder 3 Zoll unter der Oberfläche des Unterwaſſers ſtehen und demnach das Wehr ſelbſt die Höhe

$$x = a + h_1 - h = 3 - 0{,}25 = 2{,}75 \text{ Fuß}$$

erhalten.

§. 151 **Stauhöhe bei Durchläſſen.** Die Stauverhältniſſe bei einem Durchlaßwehre ſind nach der Theorie des Ausfluſſes durch Schutzöffnungen zu beurtheilen. Es können hier drei Fälle vorkommen; entweder fließt das Waſſer frei aus, oder es fließt unter Waſſer aus, oder es fließt theils frei, theils unter Waſſer aus. Beim freien Ausfluß, wie er z. B. bei dem in Fig. 301 abgebildeten Schleuſenwehre vorkommt, hängt die Ausflußgeſchwindigkeit nur von der Druckhöhe h ab, welche von der Mitte der Schutzöffnung bis zum Waſſerſpiegel zu meſſen iſt. Iſt dann noch a_0 die Oeffnungshöhe und b die Oeffnungsbreite, ſo hat man:

$$Q = \mu a_0 b \sqrt{2gh},$$

und daher umgekehrt:

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu a_0 b}\right)^2,$$

oder mit Berückſichtigung der Geſchwindigkeitshöhe k des ankommenden Waſſers:

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu a_0 b}\right)^2 - k.$$

Für die Oeffnungshöhe folgt hieraus die Formel:

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2gh}},$$

oder wenn die Stauhöhe h_1 über der Schwelle gegeben iſt,

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2g\left(h_1 - \frac{a_0}{2}\right)}}.$$

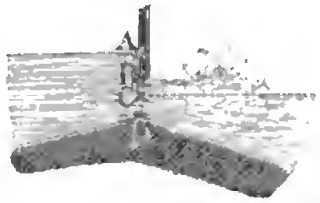
Verſuchen des Verfaſſers zufolge, läßt ſich hier $\mu = 0{,}60$ ſetzen. Staut das Unterwaſſer bis zur Schütze zurück, wie z. B. in Fig. 304 vorgeſtellt wird, ſo hat man den Niveauabſtand $AB = h$ als Druckhöhe einzuführen und die obige Formel zu gebrauchen. Es iſt alſo auch hier die einer gegebenen Stauhöhe h entſprechende Oeffnungshöhe:

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2gh}}.$$

Wenn endlich das Niveau des Unterwassers innerhalb der Mündung liegt, so fließt ein Theil des Wassers frei, und ein anderer Theil unter

Fig. 304.

Fig. 305.



Wasser aus. Ist die Stauhöhe oder der Niveauabstand $\overline{AC}$ zwischen beiden Wasserspiegeln, Fig. 303, $= h$, die Höhe $\overline{BC}$ des über dem Unterwasserspiegel befindlichen Theiles der Mündung, $= a_1$, und die Höhe $\overline{CD}$ des unter diesem Spiegel liegenden Mündungsstückes, $= a_2$, so hat man die Wassermenge für den ersten Theil:

$$Q_1 = \mu a_1 b \sqrt{2g\left(h - \frac{a_1}{2}\right)},$$

und für den zweiten:

$$Q_2 = \mu a_2 b \sqrt{2gh};$$

daher die ganze Abflußmenge:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mu b \sqrt{2g}\left(a_1 \sqrt{h - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h}\right).$$

Aus der Ausflußmenge Q, Stauhöhe h und der Tiefe a_2 der Wehrkappe unter dem Unterwasserspiegel ergiebt sich der Abstand des Schutzbrettes von eben diesem Spiegel:

$$a_1 = \left(\frac{Q}{\mu b \sqrt{2g}} - a_2 \sqrt{h}\right) : \sqrt{h - \frac{a_1}{2}}.$$

Beispiele. 1. Wie hoch sind die Schutzbretter eines Schleusenwehres, Fig. 301, zu ziehen, welches eine Wassermenge von 250 Cubikfuß abführen soll, bei einer Breite $b = 24$ Fuß und einem Wasserstande $h_1 = 5$ Fuß über der Ueberfallsschwelle? Bei freiem Abflusse ist:

$$a_0 = \frac{250}{0{,}6 \,.\, 24 \,.\, 7{,}906 \sqrt{5 - \frac{a_0}{2}}} = \frac{2{,}196}{\sqrt{5 - \frac{a_0}{2}}},$$

annähernd ist $a_0 = 1$, daher:

$$\sqrt{5 - \frac{a_0}{2}} = \sqrt{4{,}5} = 2{,}121,$$

und genauer die gesuchte Oeffnungshöhe:

$$a_0 = \frac{2{,}196}{2{,}121} = 1{,}035 \text{ Fuß} = 12{,}4 \text{ Zoll}.$$

2. Welcher Schützenzug iſt bei dem in Fig. 304 abgebildeten Wehre nöthig, um 120 Cubikfuß Waſſer pr. Secunde unter einer Druckhöhe von 1,5 Fuß bei 30 Fuß Mündungsweite abfließen zu laſſen. Hier findet Ausfluß unter Waſſer Statt (Fig. 304), und es iſt daher:

$$a_0 = \frac{120}{0{,}6 \,.\, 30 \,.\, 7{,}906 \sqrt{1{,}5}} = 0{,}689 \text{ Fuß} = 8^1/_4 \text{ Zoll.}$$

3. Man will die Waſſermaſſe beſtimmen, welche durch eine Schutzöffnung, wie Fig. 305, ſtrömt, deren Weite $b = 18$ Fuß und Höhe $\overline{BD} = a_1 + a_2 = 1{,}2$ Fuß iſt, wenn die Druckhöhe $\overline{AC} = h = 2$ Fuß, und der Waſſerſtand über der Schwelle, $a_2 = 0{,}5$ Fuß beträgt. Man hat hier:

$$\mu b \sqrt{2g} = 0{,}6 \,.\, 18 \,.\, 7{,}906 = 85{,}38,$$

ferner:

$$a_2 \sqrt{h} = 0{,}5 \sqrt{2} = 0{,}707$$

und

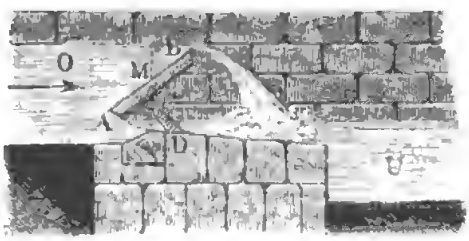
$$a_1 \sqrt{h - \frac{a_1}{2}} = 0{,}7 \sqrt{1{,}65} = 0{,}899,$$

daher die geſuchte Waſſermenge:

$$Q = 85{,}38 \,(0{,}707 + 0{,}899) = 85{,}38 \,.\, 1{,}606 = 137{,}1 \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung. Setzt man ein Schützenwerk über die Kappe eines Ueberfallwerkes, ſo erhält man einen vereinigten Schleuſenüberfall. Auch hat man noch ſogenannte bewegliche Wehre, wo die Höhe der Ueberfallſchwelle nach Bedürfniß verändert, und zwar bei Hochwaſſer verkleinert und bei Niederwaſſer vergrößert werden kann. Die einfachſten Wehre dieſer Art ſind die Balkenwehre, wo die den Aufſtau bewirkende Wand aus loſe über einander liegenden Balken oder Pfoſten beſteht, nächſtdem gehören auch hierher die ſogenannten Nadelwehre, wo dieſe Wand aus aufrecht ſtehenden Pfoſten, den ſogenannten Nadeln, gebildet wird, welche an ihren oberen Enden mit einander durch ein ſtarkes Seil verbunden ſind, und ſich übrigens gegen einen feſten Rahmen ſtemmen. Die beweglichen Wehre im eigentlichen Sinne beſtehen aus Schützen oder Fallthüren, welche ſich bei hohem Waſſerſtande von ſelbſt öffnen und bei niedrigem Waſſerſtande von ſelbſt verſchließen. Ein einfaches Wehr dieſer Art iſt in Fig. 306 abgebildet, O iſt das Ober- ſowie I das Unterwaſſer, und AB eine um C drehbare Fallthür, welche eine vertieale Stellung annimmt und ſich mit ihrem Fuße A gegen die Schwelle D ſtemmt, wenn der Oberwaſſerſpiegel bis auf eine gewiſſe Höhe herabſinkt, und dagegen ſich dreht und öffnet, wenn der Waſſerſpiegel auf eine gewiſſe Höhe ſteigt. Steht dieſer Waſſerſpiegel an der oberen Kante B der Klappe, ſo befindet ſich (nach Band I, §. 358) der Mittelpunkt M des Waſſerdruckes auf AB um $BM = {}^2/_3 \, BA$ unter B; es iſt daher auch die Drehare C ſo anzubringen, daß ſie, in der Richtung von AB, von B doppelt ſo viel abſteht als von A. Man kann nun leicht ermeſſen, daß ſich die Klappe von links nach rechts drehen und folglich öffnen muß, wenn der Waſſerſpiegel über B

Fig. 306.



ſteigt, und daß ſie ſich von rechts nach links und folglich ſchließen muß, wenn der Waſſerſpiegel unter B herabſinkt. Es gehört hierher auch die ſelbſtwirkende Schütze von Chaubart, welche ſich wälzend dreht (ſ. „Civilingenieur" Bd. III, 1857).

Die beweglichen Wehre haben mit den Schleuſenwehren vor den einfachen Ueberfällen den Vorzug, daß durch ſie beim Eintritt des Hochwaſſers der übermäßige Aufſtau, wobei leicht Ueberſchwemmungen eintreten und ein ſtarkes Ablagern von Schlamm vorkommt, verhindert wird.

Aufſtau bei lichten Wehren. Die Stauverhältniſſe bei lichten Wehren, Brückenpfeilern und Buhnen ſind faſt ebenſo zu ermitteln, wie die bei Ueberfällen. Bei dem lichten Wehre BE, Fig. 307, erfolgt dadurch eine Aufſtauung, daß die Flußbreite AC hinter dem Wehrdamme in die kleinere Breite CB übergeht. Wenn nun der Seitencanal D ganz geſchloſſen iſt (was wir der Sicherheit wegen vorausſetzen wollen), ſo muß das ganze Waſſer Q durch den verengten Raum CB hindurchfließen. Setzt man nun die Breite $\overline{CB} = b$, die Stauhöhe $\overline{AB_1}$, Fig. 308, $= h$, und

§. 152

Fig. 307.

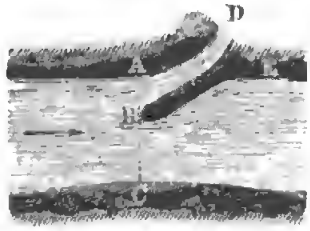


Fig. 308.

die Höhe $\overline{B_1 C_1}$ des Unterwaſſers $= a$, ſo hat man die frei über dem Unterwaſſer ausfließende Waſſermenge:

$$Q_1 = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2gh^3},$$

und das im Unterwaſſer abfließende Waſſerquantum:

$$Q_2 = \mu b a \sqrt{2gh},$$

daher das ganze Abflußquantum:

$$Q = \mu b \sqrt{2gh} ({}^2/_3 h + a).$$

Umgekehrt folgt daher die einer gegebenen Stauhöhe h entſprechende Breite des Abflußwaſſers:

$$b = \frac{Q}{\mu ({}^2/_3 h + a) \sqrt{2gh}}.$$

Iſt die Aufſtauung (h) klein, oder die Geſchwindigkeit des Waſſers groß, ſo muß man noch die Geſchwindigkeit des ankommenden Waſſers berückſichtigen. Bezeichnet wieder k die Geſchwindigkeitshöhe des ankommenden Waſſers, ſo hat man:

$$Q_1 = {}^2/_3 \mu b \sqrt{2g} \left[(h + k)^{3/2} - k^{3/2}\right]$$

ſowie

$$Q_2 = \mu b a \sqrt{2g (h + k)},$$

und daher:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left(\tfrac{2}{3}\left[(h + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + a\,(h + k)^{1/2}\right),$$

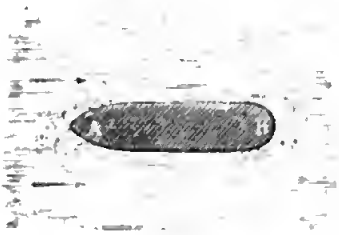
alſo umgekehrt:

$$b = \frac{Q}{\mu \sqrt{2g} \left(\tfrac{2}{3}\left[(h + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + a\,(h + k)^{1/2}\right)}.$$

Während bei der freien Bewegung des Waſſers in Flußbetten die Geſchwindigkeit im Waſſerſpiegel am größten iſt und dieſelbe nach dem Boden zu immer mehr und mehr abnimmt (Bd. I, §. 470), findet bei dem durch irgend eine Urſache aufgeſtauten Waſſer ein anderes Verhältniß Statt, es nimmt nämlich hier die Geſchwindigkeit von der Oberfläche des Oberwaſſers allmälig zu bis zur Oberfläche des Unterwaſſers, und von da an bis zur Sohle wieder, jedoch nur wenig, ab; es findet alſo eine Geſchwindigkeitsveränderung Statt, wie ſie durch die Länge der Pfeile in Fig. 308 angedeutet wird. Die Richtigkeit dieſes Verhältniſſes folgt daraus, daß das Waſſer über dem Unterwaſſerſpiegel unter einer von o bis h wachſenden, unter demſelben aber unter der conſtanten Druckhöhe h abfließt, während bei der ungehinderten Bewegung die Druckhöhe in allen Tiefen = Null iſt.

Dieſe Formel findet ihre Anwendung auch bei Brückenpfeilern, wenn man hier unter b die Summe der Strombreiten zwiſchen den Pfeilern verſteht. Um die den Pfeilern und dem Grundbette nachtheilige Wellen- und Wirbelbewegung des Waſſers zwiſchen den Pfeilern und hinter denſelben ſo viel wie möglich zu vermeiden, ſind Vorder- und Hintertheil der Brückenpfeiler $A\,B$, Fig 309, zuzuſchärfen oder abzurunden. Iſt der Vordertheil ſtumpf zugeſchärft, ſo hat man $\mu = 0{,}90$ anzunehmen, iſt er aber ſpitz zugeſchärft oder halbcylindriſch geformt, ſo kann man $\mu = 0{,}95$ ſetzen, und iſt derſelbe gar elliptiſch geformt, oder, wie in Fig. 309, aus zwei Kreisbögen zuſammengeſetzt, ſo fällt μ ſogar 0,97 oder nahe 1 aus (ſ. Gauthey's Traité de la construction de ponts, T. I.).

Fig. 309.



Anmerkung. Wenn der das Querprofil eines fließenden Waſſers verengende Einbau, z. B. eine Buhne, nicht aus dem Waſſer hervorragt, ſo kann man das ganze Waſſerquantum Q aus drei Theilen zuſammenſetzen. Liegt die Dammkappe $E\,F$, Fig. 310, unter dem Unterwaſſerſpiegel $C\,D$, und bezeichnet h die Stauhöhe, ſowie b die Breite $\overline{A\,B}$ des ganzen Querprofiles, ſo haben wir das durch das Querprofil $A\,B\,D\,C$ abfließende Waſſerquantum:

Fig. 310.

$$Q_1 = \tfrac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}],$$

ferner das durch das übrige über dem Einbaue und unter conſtantem Drucke h abfließende Waſſerquantum, wenn a die Tiefe GH des Unterwaſſers, b_1 die Breite EF des Einbaues, und a_1 die Höhe EH des Einbaues bezeichnet:

$$Q_2 = \mu b_1 (a - a_1)\sqrt{2g(h+k)},$$

und endlich das übrige neben dem Einbau unter dem conſtanten Drucke h abfließende Waſſer:

$$Q_3 = \mu b_2 a\sqrt{2g(h+k)},$$

es iſt alſo:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$= \tfrac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}] + \mu(ba - b_1 a_1)\sqrt{2g\,(h+k)},$$

und es läßt ſich hiernach auch die einer gegebenen Stauhöhe entſprechende Höhe oder Breite des Einbaues berechnen. Iſt hingegen $C_1 D_1$ der Unterwaſſerſpiegel, ſteht alſo die Dammkappe über dem Unterwaſſer, ſo hat man:

$$Q = \tfrac{2}{3}\mu b_1\sqrt{2g}\,[(a + h - a_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}]$$
$$+ \tfrac{2}{3}\mu b_2\sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}] + \mu a b_2\sqrt{2g\,(h+k)}.$$

Beiſpiel. Welche Länge iſt dem Damme BE (Fig. 307) zu geben, damit durch ihn der 550 Fuß breite, 8 Fuß tiefe und 14000 Cubikfuß liefernde Fluß AC um $^3/_4$ Fuß höher geſtaut werde? Es iſt:

$$k = 0{,}016\left(\frac{14000}{550\,.\,8}\right)^2 = 0{,}016\,.\,3{,}18^2 = 0{,}162,$$

nehmen wir nun noch $\mu = 0{,}9$ an, ſo erhalten wir die Breite des verengten Waſſerſtromes:

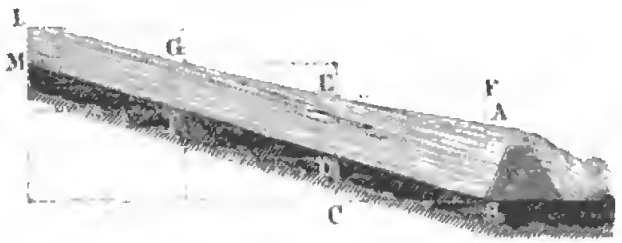
$$BC = b = \frac{14000}{0{,}9\,.\,7{,}906\,[\tfrac{2}{3}\,(0{,}912^{3/2} - 0{,}162)^{3/2} + 8\,.\,0{,}912^{1/2}]}$$
$$= \frac{14000}{7{,}1\,(0{,}537 + 7{,}639)} = \frac{14000}{7{,}1\,.\,8{,}176} = 240{,}7 \text{ Fuß},$$

daher die geſuchte Dammerſtreckung

$$AB = b_1 = 550 - 240{,}7 = 309{,}3 \text{ Fuß}.$$

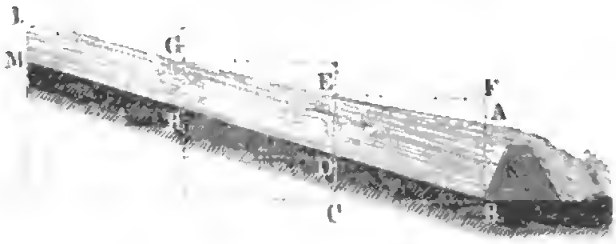
Stauweite. Wir haben nun die andere wichtige Frage zu beantworten: Nach welchem Geſetze nimmt die Stauhöhe oberhalb des Wehres mit der Entfernung ab? Ohne uns auf beſondere Formeln oder Theorien einzulaſſen, können wir bei Löſung dieſer Aufgabe die in Bd. I., §. 477 und §. 478 abgehandelte Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Waſſers in Flußbetten ſogleich zur Anwendung bringen. Zu dieſem Zwecke denken wir uns von dem Wehre ABK, Fig. 311, aus die aufgeſtaute Strecke in §. 153

Fig. 311.



Stücke zerſchnitten, und führen dann die Rechnung für jedes Stück einzeln durch. Iſt nun a_0 die Waſſertiefe AB am Wehre, a_1 die Tiefe DE am

Fig. 312.



Anfange eines ſolchen Stückes $ABDE$, F_0 der Querſchnitt des fließenden Waſſers am Wehre, F_1 der Querſchnitt deſſelben bei DE, Q das Waſſerquantum, p der mittlere Umfang des Querprofiles auf dieſes Streckenſtück, und α der Neigungswinkel DBC des Grundbettes, ſo hat man nach Bd. I, §. 478 die entſprechende Länge BD des Stückes, wenn man dort a_0 und a_1, ſowie F_0 und F_1 unter einander vertauſcht:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}.$$

Bezeichnet a_2 die Waſſertiefe GH am Anfange eines zweiten Stückes $DEGH$, F_2 den Querſchnitt deſſelben und p_1 den mittleren Umfang des Waſſerprofiles dieſes Stückes, ſo hat man für die Länge DH dieſes Stückes:

$$l_1 = \frac{a_1 - a_2 - \left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\sin.\alpha - \zeta \frac{p_1}{F_1 + F_2}\left(\frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}.$$

Wenn man nun ſo fortfährt, nämlich willkürliche Abnahmen $a_0 - a_1$, $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$ u. ſ. w. der Waſſertiefen annimmt, und hieraus die Querſchnitte F_1, F_2, F_3 u. ſ. w., ſowie die mittleren Umfänge berechnet, ſo bekommt man durch dieſe Formel die entſprechenden Abſtände l, l_1, l_2, und alſo auch die Entfernungen l, $l + l_1$, $l + l_1 + l_2$ u. ſ. w. vom Damme.

Um die einer gegebenen Entfernung x entſprechende Waſſertiefe y zu finden, kann man entweder auf die nach der eben gezeigten Methode gefundenen Werthe l, $l + l_1$, $l + l_1 + l_2$ u. ſ. w. das Interpolationsverfahren anwenden, oder ſich folgender, ebenfalls in Bd. I, §. 478 gegebenen Näherungsformel bedienen:

$$a_0 - a_1 = \frac{\left(\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p_0}{a_0 b_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}} l.$$

Führt man hierin für b_0 die Breite, für p_0 den Umfang und für v_0 die Geschwindigkeit am Wehre ein, so giebt diese Formel die Abnahme $(a_0 - a_1)$ der Stauhöhe auf die erste kurze Strecke l über dem Wehre; ebenso erhält man für eine folgende kurze Strecke l_1 diese Abnahme:

$$a_1 - a_2 = \frac{\left(\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p_1}{a_1 b_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}\right)}{1 - \frac{2}{a_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}} l_1 \text{ u. s. w.,}$$

und es läßt sich endlich für eine gegebene Entfernung $l + l_1 + l_2 + \cdots$ die entsprechende Wassertiefe

$$a_0 - (a_0 - a_1) - (a_1 - a_2) - \cdots$$

berechnen.

Beispiele. 1. In einem 80 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher 1400 Cubikfuß Wasser führt, soll ein Wehr eingebaut werden, um das Wasser 3 Fuß hoch aufzustauen; man sucht nun die Stauverhältnisse oberhalb des Wehres. Ohne Aufstauung ist die Geschwindigkeit des Wassers:

$$c = \frac{1400}{80 \cdot 4} = \frac{35}{8} = 4{,}375 \text{ Fuß},$$

daher nach der Tabelle in Bd. I, §. 476, der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = 0{,}00775,$$

und die Neigung des Grundbettes:

$$\sin.\alpha = 0{,}00775 \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzen wir nun $p = 84$, $F = 80 \cdot 4 = 320$, $c = 4{,}375$ und $\frac{1}{2g} = 0{,}016$ ein, so folgt die Neigung:

$$\sin.\alpha = 0{,}00775 \cdot \frac{84}{320} \cdot 0{,}016 \cdot (4{,}375)^2 = 0{,}0006230.$$

Die Wassertiefe unmittelbar am Wehre ist $4 + 3 = 7$ Fuß, bestimmen wir nun aber die Entfernungen, wo diese Tiefe nur $6\frac{1}{2}$, 6, $5\frac{1}{2}$, 5 Fuß u. s. w. beträgt. Setzen wir zunächst in der Formel

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}, \quad a_0 - a_1 = 0{,}5, \quad F_0 = 80 \cdot 7 = 560,$$

$F_1 = 80 \cdot 6{,}5 = 520$, $Q = 1100$, $\sin.\alpha = 0{,}000623$, p etwa $= 89$, und, der mittleren Geschwindigkeit $\frac{2Q}{F + F_1} = \frac{2800}{1080} = 2{,}59$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}00796$, so erhalten wir die entsprechende Entfernung:

$$l = \frac{0{,}5 - (0{,}0000036982 - 0{,}0000031888) \cdot 31360}{0{,}000623 \quad 0{,}00796\,\frac{89}{1080}\,(0{,}0000036982 + 0{,}0000031888) \cdot 31360}$$

$$= \frac{0{,}5 - 0{,}0160}{0{,}000623 - 0{,}0001417} = \frac{484000}{481{,}3} = 1005{,}6 \text{ Fuß.}$$

Um nun die einer Senkung des Waſſerſpiegels von 1 Fuß zukommende Erſtreckung zu finden, ſetzen wir zwar wieder $a_0 - a_1 = 0{,}5$, aber dagegen $F_0 = 520$, $F_1 = 80 \cdot 6 = 480$, $p = 88$, und, der mittleren Geſchwindigkeit $\frac{2800}{1000} = 2{,}80$ Fuß entſprechend, $\zeta = 0{,}00792$. Hiernach folgt durch die nämliche Formel die Länge der Flußſtrecke, innerhalb welcher die Waſſertiefe von 6,5 auf 6 Fuß ſinkt,

$$l = \frac{0{,}5 - 0{,}0000006421 \cdot 31360}{0{,}000623 - 0{,}00792 \cdot \frac{88}{1000} \cdot 0{,}0000080385 \cdot 31360}$$

$$= \frac{480000}{447{,}31} = 1073{,}1 \text{ Fuß.}$$

Es iſt alſo 1005,6 + 1073,1 = 2078,7 Fuß oberhalb des Wehres das Waſſer nur noch 6 Fuß tief, oder es beträgt die Stauung daſelbſt nur noch 2 Fuß.

Setzen wir nun wieder $a_0 - a_1 = 0{,}5$, $F_0 = 480$, $F_1 = 440$, $p = 87$ und $\zeta = 0{,}00787$, ſo erhalten wir die entſprechende Längenerſtreckung

$$l = \frac{0{,}5 - 0{,}0258}{0{,}000623 - 0{,}00022185} = \frac{474200}{401{,}15} = 1182{,}1 \text{ Fuß.}$$

Ebenſo erfolgt für eine weitere Senkung von $\frac{1}{2}$ Fuß die entſprechende Strecke

$$l = \frac{465980}{335{,}65} = 1388{,}3 \text{ Fuß.}$$

Es iſt alſo 2078,7 + 1182,1 + 1388,3 = 4649,1 Fuß oberhalb des Wehres die Aufſtauung noch 1 Fuß, oder die Waſſertiefe 5 Fuß. Für $4\frac{1}{2}$ Fuß Waſſertiefe beſtimmt ſich die Entfernung

$$l = \frac{454000}{240{,}47} = 1888{,}0 \text{ Fuß;}$$

für $4\frac{1}{4}$ Fuß Waſſertiefe iſt ferner

$$l = \frac{220710}{140{,}97} = 1565{,}6 \text{ Fuß;}$$

für 4,1 Fuß Waſſertiefe

$$l = \frac{129785}{55{,}53} = 2331{,}8 \text{ Fuß.}$$

und für 4,0 Fuß Tiefe

$$l = \infty;$$

es iſt alſo 4649,1 + 1888,0 + 1565,6 + 2331,8 = 10434,5 Fuß oberhalb des Wehres die Stauhöhe noch $\frac{1}{10}$ Fuß, und nimmt weiter hinauf unendlich langſam ab.

2. Wie groß iſt die Stauhöhe 2500 Fuß oberhalb des im vorigen Beiſpiele behandelten Wehres? Nach der vorigen Rechnung iſt 2078,7 Fuß oberhalb des Wehres noch 2 Fuß Stauhöhe, es fragt ſich alſo, wie viel auf 2500 − 2078,7 = 421,3 Fuß Erſtreckung die Stauhöhe abnimmt. Nun beträgt aber nach

eben, die einer ferneren Senkung von 0,5 Fuß entſprechende Erſtreckung = 1182,1 Fuß, es läßt ſich daher für jeden Fuß Länge

$$\frac{0{,}5}{1182{,}1} \text{ Fuß Senkung,}$$

alſo für 421,3 Fuß Länge dieſelbe

$$= \frac{0{,}5 \,.\, 421{,}3}{1182{,}1} = 0{,}178 \text{ Fuß,}$$

und folglich 2500 Fuß oberhalb des Wehres, die Stauhöhe

$$= 2 - 0{,}178 = 1{,}822 \text{ Fuß,}$$

ſowie Waſſertiefe

$$= 5{,}822 \text{ Fuß annehmen.}$$

Rechnen wir nach der zweiten Formel

$$a_0 - a_1 = \frac{\left(sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p_0}{a_0\, b_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}\right)}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}}\, l,$$

und ſetzen wir hierin erſt $l = 800$, $p_0 = 89$, $a_0 = 7$, $a_0\, b_0 = 560$, $v_0 = \frac{1400}{560} = 2{,}5$ und $\zeta = 0{,}007985$, ſo erhalten wir die entſprechende Senkung:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}000623 - 0{,}007985 \cdot \frac{89}{560} \cdot 0{,}1}{1 - \frac{2}{7} \cdot 0{,}1}\right) \cdot 800 = \frac{0{,}0004961 \,.\, 800}{0{,}9714}$$
$$= 0{,}409 \text{ Fuß.}$$

Führen wir nun wieder $l = 800$, $p = 88$, $a_0 = 7 - 0{,}409 = 6{,}591$, $a_0\, b_0 = 527{,}3$, $v_0 = \frac{1400}{527{,}3} = 2{,}655$ und $\zeta = 0{,}00795$ ein, ſo finden wir die Senkung:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}000623 - 0{,}00795 \,.\, \frac{88}{527{,}3} \cdot 0{,}1128}{1 - \frac{2}{6{,}591} \cdot 0{,}1128}\right) \cdot 800$$
$$= \frac{0{,}000623 - 0{,}00014964}{0{,}9658} \cdot 800 = \frac{0{,}0004735 \,.\, 800}{0{,}9658} = 0{,}392 \text{ Fuß.}$$

Fahren wir ſo fort, und ſetzen wir jetzt

$l = 900$, $p = 87$, $a_0 = 6{,}591 - 0{,}392 = 6{,}199$, $a_0\, b_0 = 496$, $v_0 = \frac{1400}{496} = 2{,}82$ und $\zeta = 0{,}00791$, ſo erhalten wir die Senkung:

$$a_0 - a_1 = \frac{0{,}0004464 \,.\, 900}{0{,}959} = 0{,}419 \text{ Fuß;}$$

es iſt alſo $800 + 800 + 900 = 2500$ Fuß oberhalb des Wehres die Waſſertiefe noch $6{,}199 - 0{,}419 = 5{,}780$ Fuß. Nach der vorigen Rechnung iſt ſie 5,822 Fuß, d. i. 0,042 Fuß = ½ Zoll größer.

Waſſerſchwelle. Wenn wir die Gleichung für die von dem verti- §. 154 ↗
calen Längendurchſchnitt des aufgeſtauten Waſſerſpiegels gebildete **Stau-curve**, nämlich:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2\,g}}{1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2\,g}}\right) l$$

etwas näher betrachten, ſo werden wir mit mehreren merkwürdigen Verhältniſſen des Aufſtauens bekannt. In dem Bruche

$$\frac{\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g}}$$

nähern ſich Zähler und Nenner immer mehr und mehr der Null, je größer die Geſchwindigkeit v iſt, und je nachdem nun der erſtere oder letztere zuerſt Null wird, ſtellt ſich

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g}\right)}{0} = \infty,$$

oder

$$l = \frac{(a_0 - a_1).0}{\sin.\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}} = 0$$

heraus. Man ſieht hieraus, daß im erſten Falle der Theil l, und alſo auch die ganze Stauweite unendlich groß wird, daß dagegen im zweiten Falle der Theil l Null ausfällt, und alſo mit ihm die ganze Aufſtauung beendigt iſt. Das erſte Nullwerden tritt aber ein, ſowie

$$\zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} = \sin.\alpha,$$

alſo die Geſchwindigkeit des aufgeſtauten Waſſers unendlich wenig von der Geſchwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2gF\sin.\alpha}{\zeta p}}$$

des unaufgeſtauten gleichförmig zufließenden Waſſers verſchieden iſt, und das zweite ſtellt ſich heraus, ſowie

$$\frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g} = 1,$$

oder

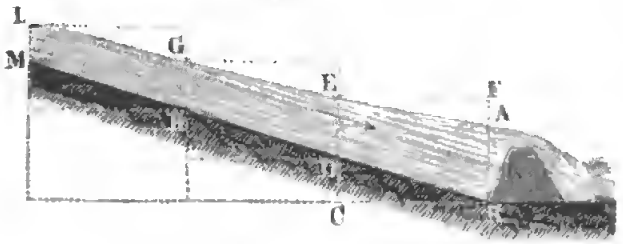
$$\frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2},$$

alſo die Geſchwindigkeitshöhe der halben Waſſertiefe gleich wird. Es findet alſo die erſte Art des Anſchluſſes Statt, wenn die Geſchwindigkeitshöhe des unaufgeſtauten Waſſers kleiner als die halbe Tiefe des unaufgeſtauten Waſſers iſt, und dagegen die zweite Art, wenn die Geſchwindigkeitshöhe die halbe Waſſertiefe übertrifft. Während dort der Waſſerſpiegel eine hohle Fläche wie $AEGL$. Fig. 313, bildet, hat er hier eine erhabene Geſtalt wie AEG, Fig. 314, und bildet bei EG einen Sprung oder eine ſogenannte Schwelle.

Setzen wir nun in

$$sin.\,\alpha = \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},\quad \frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2},\ F = ab \text{ und } p,$$

Fig. 313.



wenn auch nur annähernd, $= b$, ſo erhalten wir:

$$sin.\,\alpha = {}^1/_2\,\zeta;$$

es iſt alſo ein Sprung zu erwarten, wenn der Abhang α größer iſt als der halbe Reibungscoefficient, oder $\zeta =$ 0,008 geſetzt, wenn $\alpha > 0{,}004$ oder $\alpha > {}^1/_{250}$. In der Regel haben Flüſſe und Canäle einen kleineren Abhang, daher kommt denn auch bei ihnen die gedachte Waſſerſchwelle nicht leicht vor.

Fig. 314.

Die Höhe $EH = x$ des Sprunges (Fig. 314) ergiebt ſich aus der Geſchwindigkeit v des ankommenden und aus der Geſchwindigkeit v_1 des fortfließenden Waſſers, indem man ſetzt:

$$x = \frac{v^2 - v_1^2}{2g},$$

oder da $av = (a + x)\,v_1$, alſo

$$v_1 = \left(\frac{a}{a + x}\right) v \text{ iſt,}$$

$$x = \left[1 - \left(\frac{a}{a + x}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und die Auflöſung vollkommen beendigt:

$$x = \frac{v^2}{4g} - a + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(a + \frac{v^2}{8g}\right)}$$

Hiernach fällt ſehr richtig, für $\frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2}$

$$x = -\,{}^3/_4\,a + {}^3/_4\,a = 0$$

aus, dagegen iſt für $\frac{v^2}{2g} = a$,

$$x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = 0{,}618\,a,$$

für $\frac{v^2}{2g} = 2a$,

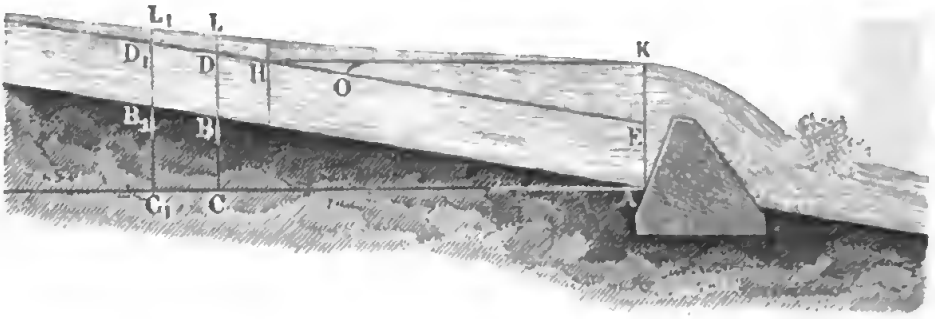
$$x = a\sqrt{3} = 1{,}732\,a \text{ u. ſ. w.}$$

Anmerkung. Die eben behandelte Waſſerſchwelle beobachtete zuerſt Bidone in einem nur 12 Zoll breiten Gerinne mit dem mittleren Neigungsverhältniſſe $\alpha = 0{,}033$. Es bildet ſich dieſelbe aber nicht allein beim aufgeſtauten Waſſer, ſondern auch in dem Falle, wenn, wie Fig. 315 vor Augen führt, die Neigung des Gerinnes oder Flußbettes ſich ändert, wie der Verfaſſer oft Gelegenheit gehabt hat, zu beobachten. Iſt das Neigungsverhältniß des oberen Theiles größer als $\frac{1}{2}\zeta$ und das Neigungsverhältniß des unteren kleiner, ſo bildet ſich an dem Wechſel oder der Uebergangsſtelle ſtets ein Sprung, in welchem die der größeren Neigung entſprechende kleinere Waſſertiefe in die der kleineren Neigung entſprechende größere Waſſertiefe übergeht.

Fig. 315.

(§. 155) **Staucurve.** Die Gleichung der Staucurve, welche von dem verticalen Längendurchſchnitt der Oberfläche des aufgeſtauten Waſſers gebildet wird, läßt ſich mit Hülfe des höheren Calculs, wie folgt, ermitteln. Es bezeichne a die Höhe $AE = BD$, Fig. 316, des freifließenden Waſſers AD, h die

Fig. 316.



Stauhöhe EK des Fluſſes in der Nähe des Wehres, y die Stauhöhe DL deſſelben im Abſtande $ED = x$ vom Wehre, ferner ſei α der Neigungswinkel BAC des Flußbettes, c die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers im Querſchnitt $AE = BD$ vor der Aufſtauung, ſowie v die mittlere Geſchwindigkeit deſſelben im Querſchnitt BL; ſetzt man noch $l = DD_1 = dx$, $a_0 - a_1 = DL - D_1L_1 = -dy$ und führt ſtatt a, $a + y$, ſtatt $\frac{p}{F}$ annähernd $= \frac{1}{a+y}$ und $v = \frac{ac}{a+y}$ ein, ſo geht die Grundformel

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{sin.\ \alpha - \zeta \frac{p}{F} \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a} \frac{v^2}{2g}} \right) l$$

in folgende über

$$- dy = \left(\frac{sin.\ \alpha - \zeta \frac{a^2}{(a+y)^2} \frac{c^2}{2g}}{1 - \frac{2a^2}{(a+y)^3} \frac{c^2}{2g}} \right) dx.$$

Benutzt man dann noch die Formel

$$sin.\ \alpha = \alpha = \zeta \frac{1}{a} \frac{c^2}{2g}, \text{ und ſetzt hiernach}$$

$$\zeta \frac{c^2}{2g} = \alpha a, \text{ ſo erhält man}$$

$$\alpha dx = - \left(\frac{(a+y)^3 - 2a^2 \frac{c^2}{2g}}{(a+y)^3 - a^3} \right) dy.$$

Führt man zur Abkürzung $a + y = y_1$, $dy = dy_1$, und $\frac{c^2}{2g} = k$ ein, ſo wird einfacher

$$\alpha dx = - \left(\frac{y_1^3 - 2a^2 k}{y_1^3 - a^3} \right) dy_1 = - dy_1 - \left(\frac{a^3 - 2a^2 k}{y_1^3 - a^3} \right) dy_1,$$

wonach dann

$$\alpha x = - y_1 - a^2 (a - 2k) \int \frac{dy_1}{y_1^3 - a^3}$$

$$= - y_1 + (a - 2k) \int \frac{d\left(\frac{y_1}{a}\right)}{1 - \left(\frac{y_1}{a}\right)^3}$$

$$= - y_1 + (a - 2k) \int \frac{dZ}{1 - Z^3} \text{ folgt, wenn man noch } \frac{y_1}{a}$$

durch Z bezeichnet, alſo $y_1 = a Z$ ſetzt.

Es iſt

$$\frac{1}{1 - Z^3} = \frac{1}{(1 - Z)(1 + Z + Z^2)} = \frac{A}{1 - Z} + \frac{B + CZ}{1 + Z + Z^2},$$

alſo $1 = A(1 + Z + Z^2) + (B + CZ)(1 - Z)$, oder

$$0 = A + B - 1 + (A - B + C) Z + (A - C) Z^2;$$

daher $A + B = 1$, $A + C = B$ und $A = C$,

und es folgt $A = C = 1/3$ und $B = 2/3$, ſowie

$$\frac{1}{1-Z^3} = {}^1/_3\left(\frac{1}{1-Z} + \frac{2+Z}{1+Z+Z^2}\right).$$

Hiernach iſt

$$\int \frac{dZ}{1-Z^3} = {}^1/_3\left(\int \frac{dZ}{1-Z} + \int \frac{(2+Z)\,dZ}{1+Z+Z^2}\right) \text{ zu ſetzen.}$$

Nach III. des Artikels 22 in Bd. I, iſt

$$\int \frac{dZ}{1-Z} = -\int \frac{d(1-Z)}{1-Z} = -\,Log.\,nat.(1-Z),$$ nun

aber $\frac{(2+Z)\,dZ}{1+Z+Z^2}$ zu integriren, ſchreibe man

$$1+Z+Z^2 = {}^3/_4 + ({}^1/_2+Z)^2 = {}^3/_4[1+{}^4/_3({}^1/_2+Z)^2] = {}^3/_4(1+u^2),$$

indem man $\sqrt{{}^4/_3}\,({}^1/_2+Z) = \frac{1+2Z}{\sqrt{3}} = u$, alſo

$$Z = \frac{u\sqrt{3}-1}{2} \text{ und } dZ = \frac{du\sqrt{3}}{2} \text{ ſetzt.}$$

Dann folgt

$$\frac{(2+Z)\,dZ}{1+Z+Z^2} = \frac{\left(2+\frac{u\sqrt{3}}{2}-{}^1/_2\right)}{{}^3/_4\,(1+u^2)}\cdot\frac{du\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{u\,du}{1+u^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{du}{1+u^2};$$

da aber

$$\int \frac{u\,du}{1+u^2} = {}^1/_2\int \frac{2\,u\,du}{1+u^2} = {}^1/_2\int \frac{d\,(1+u^2)}{1+u^2} = {}^1/_2\,Ln\,(1+u^2)$$

und

$$\int \frac{du}{1+u^2} = arc.\,(tang. = u) \text{ iſt (ſ. VI, Artikel 26, Bd. I), ſo hat man}$$

$$\int \frac{(2+Z)\,dZ}{1+Z+Z^2} = {}^1/_2\,Ln\left(1+\frac{(1+2Z)^2}{3}\right)$$

$$+\sqrt{3}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{1+2Z}{\sqrt{3}}\right) + Const., \text{ und}$$

$$ax = -\,y_1 + \left(\frac{a-2k}{3}\right)\left[-\,Log.\,nat.(1-Z)\right.$$

$$\left. + {}^1/_2\,Ln\left(1+\frac{(1+2Z)^2}{3}\right) + \sqrt{3}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{1+2Z}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\,Const.$$

$$= - y_1 + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(\frac{1 + Z + Z^2}{(1 - Z^2)}\right) + \sqrt{3}.\, arc.\left(tang. = \frac{1 + 2Z}{\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= - y_1 + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(1 + \frac{3Z}{(1 - Z^2)}\right) + \sqrt{3}\, arc.\left(tang. = \frac{1 + 2Z}{\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= - y_1 + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(1 + \frac{3a\,y_1}{(a - y_1)^2}\right) + \sqrt{3}\, arc.\left(tang. = \frac{a + 2y_1}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= - y + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(1 + \frac{3a\,(a + y)}{y^2}\right) + \sqrt{3}\, arc.\left(tang. = \frac{3a + 2y}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

Anfangs iſt $x = 0$ und $y = h$, daher auch

$$0 = - h + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(1 + \frac{3a\,(a + h)}{h^2}\right) + \sqrt{3}\, arc.\left(tang. = \frac{3a + 2h}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

und ſchließlich

$$ax = h - y + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(\frac{1 + \frac{3a\,(a + y)}{y^2}}{1 + \frac{3a\,(a + h)}{h^2}}\right) - \sqrt{3}\left(arc.\left(tang. = \frac{3a + 2h}{a\sqrt{3}}\right) - arc.\left(tang. = \frac{3a + 2y}{a\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

oder

$$ax = h - y + \frac{a - 2k}{3}\left[{}^1/_2\, Log.\, nat.\left(\frac{y^2 + 3a\,(a + y)}{h^2 + 3a\,(a + h)} \cdot \frac{h^2}{y^2}\right) - \sqrt{3}\, arc.\left(tang. = \frac{a\,(h - y)\,\sqrt{3}}{6a^2 + 3a\,(h + y) + 2hy}\right)\right].$$

Mit Hülfe dieſer Formel läßt ſich die Entfernung x der Stelle des Fluſſes vom Wehre finden, wo die Aufſtauung den Werth y hat.

Für einen kleinen Werth von h und einen ſehr kleinen Werth von y, in Hinſicht auf a, iſt einfach

$$\alpha x = h + \frac{a - 2k}{3} \, Log.nat. \left(\frac{h}{y}\right) \text{ zu ſetzen.}$$

Iſt $a = 2k = \frac{c^2}{g}$, ſo fällt $\alpha x = h - y$ aus, und es wird die Staucurve von einer horizontalen Linie HK gebildet; iſt $a < 2k$, ſo fällt αx kleiner als $h - y$, alſo y auch kleiner als $h - \alpha x$ aus, und man hat es dann mit der von Bidone zuerſt beobachteten Waſſerſchwelle OK zu thun.

Beiſpiel. Für $a = 4$, $h = 3$, $c = 4{,}375$ Fuß, ferner $\alpha = 0{,}000623$ und $y = 0{,}1$ Fuß iſt die Stauweite annähernd

$$x = \frac{3 + 1/3\,(4 - 0{,}6125)\ Log.\ nat.\ 30}{0{,}000623} = \frac{3 + 1{,}1292 \,.\, 3{,}4012}{0{,}000623}$$

$$= \frac{6840{,}6}{6{,}23} = 1098{,}0 \text{ Fuß.}$$

Im Beiſpiele (1) des vorigen Paragraphen wurde $x = 1043{,}45$ Fuß gefunden.

(Anmerkung 1.) Die Waſſermenge, welche vor dem Wehre aufgeſtaut iſt, läßt ſich ſetzen:

$$V = \int b\,y\,dx; \text{ nun iſt aber annähernd}$$

$$\alpha x = h - y + \left(\frac{a - 2k}{3}\right) Log.nat. \left(\frac{h}{y}\right) \text{ und hiernach}$$

$$\alpha\,dx = -\,dy - \frac{a - 2k}{3}\,\frac{dy}{y}, \text{ daher folgt}$$

$$V = -\frac{b}{\alpha}\int\left(y\,dy + \frac{a - 2k}{3}\,dy\right) = -\frac{b}{\alpha}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{(a - 2k)}{3}\,y\right) + Const.$$

Da für $y = h$, $V = o$ iſt, ſo folgt

$$V = \frac{b}{\alpha}\left(\frac{h^2 - y^2}{2} + \frac{(a - 2k)}{3}(h - y)\right) = \frac{b\,(h - y)}{\alpha}\left(\frac{h + y}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right);$$

und für $y = o$,

$$V = \frac{bh}{\alpha}\left(\frac{h}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right).$$

Fließt dieſes Waſſerquantum in der Zeit t zu, ſo hat man auch $V = abct$, und daher

$$t = \frac{h}{\alpha ac}\left(\frac{h}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right).$$

Für $a = 2k$ fällt

$$V = \frac{bh^2}{2\alpha} \text{ und } t = \frac{h^2}{2\alpha ac} \text{ aus.}$$

Anmerkung 2. Vorſtehende Formel hat der Verfaſſer ſchon im Artikel „Bewegung des Waſſers“ in der allgemeinen Maſchinenencyclopädie, Bd. II, 1844 veröffentlicht. Wenn man in derſelben das Glied $2k = \frac{c^2}{g}$ vernachläſſigt, ſo er-

hält man eine Formel, welche Herr Heinemann in Berlin in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, Berlin 1855 (s. auch polyt. Centralblatt, 1855) die Hagen'sche nennt. Dasselbe gilt auch von der Formel, welche Herr Gödecker in Band VII der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieurvereins für das Königreich Hannover mittheilt. Diese Formeln geben natürlich über die Entstehung der Wasserschnelle gar keine Auskunft.

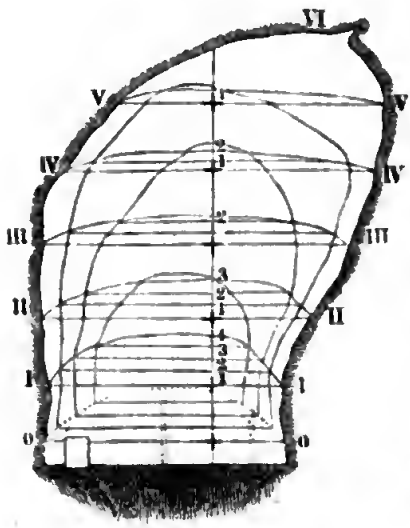
Sehr ausführlich wird die Staucurve behandelt im zweiten Theile des Cours de Mécanique appliquée par Bresse, Paris 1860. Nächstdem auch in Rühlmann's Hydromechanik, Leipzig 1857. Ueber Saint-Guilhem's empirische Formel zur Berechnung der Stauweite siehe Annales des ponts et chauss. 1838, und über Dupuit's Formel dessen Etudes théoretiques et practiques sur les mouvement des eaux courantes.

Teiche. In wasserarmen Gegenden und an Orten, wo große Maschi- §. 156
nenkräfte in Anspruch genommen werden, wie z. B. in Bergwerksrevieren, ist die Anlegung von Teichen (franz. étangs; engl. store-reservoirs, ponds, pools), d. i. von großen Wasserbehältern, die sich zur Zeit des Wasserüberflusses von selbst füllen, und bei eintretendem Wassermangel geleert werden können, von der größten Wichtigkeit. Man legt in der Regel Teiche in Schluchten und Thälern an, um nicht allein das Fluth- und Regenwasser, sondern auch die in diesen Vertiefungen fließenden Quellen und Bäche aufnehmen zu können. Dann läßt sich auch die künstliche Umschließung des Teichraumes durch einen einzigen Damm bewirken, den man quer über das Thal von einem Gehänge bis zum anderen führt, indem die ansteigende Thalsohle und die beiden Thalgehänge die übrige Umfassung des Teiches abgeben. Ein Teich hat um so mehr Nutzen, je kleiner die Oberfläche und je kürzer der Damm desselben bei bestimmtem Fassungsraume ist. Es ist daher für den Teichraum diejenige Stelle im Thale auszusuchen, wo die Gehänge mehr steil als flach sind und für den Damm der Ort, wo das Thal mehr eng als weit ist. Nur in weiten Thälern hat man die Teiche zuweilen mit zwei Dämmen, oder mit einem Hauptdamme und zwei Flügeldämmen zu umschließen. Localverhältnisse bestimmen zwar in der Regel den Ort für eine Teichanlage, jedoch ist zu berücksichtigen, daß tieferliegenden Teichen ein größeres Sammelrevier, und daher auch ein größerer Wasserzufluß zukommt, dieselben aber auch weniger Gefälle für die Maschinen übrig lassen, daß dagegen hochliegenden Teichen weniger Wasser zufließt, sie dafür aber mehr Gefälle gewähren. Derjenige Teich ist auf jeden Fall der vollkommenste, bei welchem das Product aus dem Wasserzufluß und dem Gefälle zwischen dem Teiche und der tiefer unten im Thale stehenden Maschinenanlage ein Maximum ist. Uebrigens kann man durch Anlegung von Gräben und Röschen das Sammelrevier eines Teiches erweitern. Noch hat man bei einer Teichanlage auf die Beschaffenheit des Teichgrundes Rücksicht zu nehmen, und dabei den Grund zu vermeiden, welcher das Wasser nicht hält, z. B. zerklüftetes Gestein, Kalkschlotten, Flug- und Triebsand, tiefen Sumpf,

Moraſt u. ſ. w. Durch Ausſetzen mit Lehm und Raſen oder Ausrammen mit einem Gemenge aus feinem Sande und gutem Thon kann man oft die Waſſerdichtigkeit eines Teichgrundes hervorbringen. Sind die Gehänge nicht waſſerdicht oder leiſten ſie dem Waſſer nicht hinreichenden Widerſtand, ſo muß man ſie durch Thon- oder Raſenſchichten, Mauern u. ſ. w. ſchützen.

Der Werth eines Teiches hängt noch vorzüglich von dem Flächen- und Faſſungsraume deſſelben ab. Um Beides zu finden, iſt eine beſondere Aufnahme nöthig. Hierzu gehört aber, daß man mit Hülfe eines Meßtiſches die Endpunkte I, II, III u. ſ. w., Fig. 317, von im Teichſpiegel anzunehmenden Parallelen abſchneidet, und nun mit einer Stange und mit Hülfe eines Nivellirinſtrumentes mehrere Tiefen in durch dieſe Parallelen zu legenden Querprofilen abmißt. Durch jene Endpunkte beſtimmen ſich die Parallelen und durch dieſe Tiefen die entſprechenden Querprofile ſelbſt, und hieraus laſſen ſich die in Frage ſtehenden Räume berechnen. Sind b_0, b_1, $b_2 \ldots b_n$ die n Breiten 0 — 0, I — I, II — II u. ſ. w., und iſt der Abſtand zwiſchen je zwei Parallelen $= a$, ſo hat man die Oberfläche des Teiches:

Fig. 317.



$$G = [b_0 + b_n + 4(b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-2})] \cdot \frac{a}{3}.$$

Sind ebenſo F_0, F_1, F_2 u. ſ. w. die den Breiten b_0, b_1, b_2 u. ſ. w. entſprechenden Querprofile, ſo hat man das Teichvolumen:

$$V = [F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{n-2})] \cdot \frac{a}{3}.$$

Uebrigens laſſen ſich auch mit Hülfe dieſer Regeln die jeder Waſſertiefe entſprechenden Faſſungsräume berechnen, indem man ſich den ganzen Teich durch Horizontalebenen in Schichten zerlegt denkt.

Anmerkung. Von der Aufnahme und Berechnung der Teiche handelt ſpeciell der „Ingenieur" ſowie die neue Markſcheidekunſt des Verfaſſers; einen beſonderen Aufſatz hierüber findet man aber in der gleichbenannten Zeitſchrift „Der Ingenieur", Heft I, 1846, Freiberg ꝛc.

× §. 157 **Teichdämme.** Die Teichdämme führt man in der Regel aus Erde, ſelten aber aus Steinen auf. Man verſieht ſie mit einer dicken Lehmbruſt, um das Eindringen des Waſſers zu verhindern, und bekleidet dieſe wohl noch mit einer Mauer, der ſogenannten Terraſſenmauer, um die nachtheiligen

Wirkungen des Wellenſchlages auf den Damm zu ſchwächen. Außerdem erhält der Teichdamm noch einen mit Lehm oder Raſen dicht auszuſchlagenden Grundgraben, welcher vorzüglich dazu dient, das Waſſer zurückzuhalten. Man geht mit dieſem Graben bis auf feſten Grund, z. B. bis auf feſtes Geſtein oder dichten Lehmboden herab, oder, wenn dieſer nicht zu erlangen iſt, wie z. B. bei ſandigem oder grandigem Erdboden, verſchafft man ſich durch einzuſchlagende Pfähle einen feſten Grund. Die Tiefe eines Grundgrabens hängt von der Beſchaffenheit des Erdbodens ab, bei feſtem und dichtem Geſtein reichen oft 5 Fuß Tiefe hin, wogegen man bei zerriſſenem oder lockerem Boden 20 Fuß Tiefe nöthig haben kann. Nachtheilig können zumal Klüfte, Geſteinſchichtungen und Steinſcheidungen werden, indem ſie das Waſſer unter oder neben dem Damme durchlaſſen. Um dieſes zu verhindern, hat man den Grundgraben ſehr tief auszuheben, und ihn an den Gehängen weit hinauszuführen. Die Hauptform eines Teichdammes ſtimmt mit dem in Fig. 318 abgebildeten Körper von trapezoidalem Querſchnitt $HKEN$ oder $GLMF$ überein. Die obere Fläche AC iſt die Dammkappe, die dem Waſſer zugekehrte Seite $ABGH$ die Bruſt und die gegenüberliegende Seite der Rücken; es iſt ferner KMN das Mittelſtück, ſowie ANH der eine und BMC der andere Dammflügel. Was die Dimenſionen des Dammes betrifft, ſo macht man die obere Dammbreite $AD=BC$ nicht unter 10 Fuß, und wenn ein Weg über ſie gelegt iſt, nicht unter 20 Fuß, es iſt aber auch Regel, dieſe Breite mindeſtens der Dammhöhe gleich zu machen. Giebt man nun der Bruſt und dem Rücken 45° Böſchung, ſo fällt die untere Dammbreite dreimal ſo groß aus als die Dammhöhe oder obere Dammbreite. Manchen Dämmen giebt man aber 30 bis 40° Böſchung, weshalb bei ihnen ein noch größeres Verhältniß der unteren Breite zur Höhe ſich herausſtellt. Die Dammhöhe iſt ſehr verſchieden; man hat im hieſigen Bergreviere 15 bis 35 Fuß hohe Dämme. Wegen des Wellenſchlages iſt es nothwendig, die Dämme 2 bis 3 Fuß höher zu machen als der Waſſerſpiegel zu ſtehen kommt. In Fig. 319 iſt das Querprofil eines Teichdammes abgebildet. $ABCE$ iſt die bis auf feſten Grund herabgehende feſtgeſtampfte

Fig. 318.

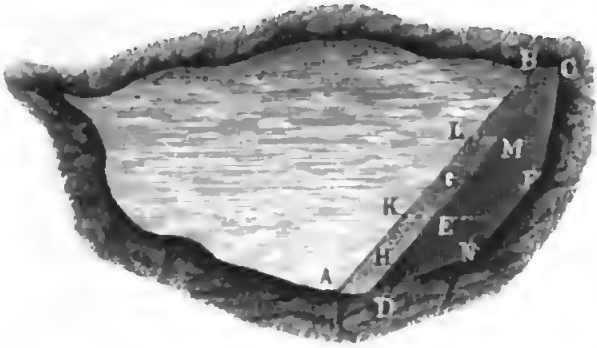
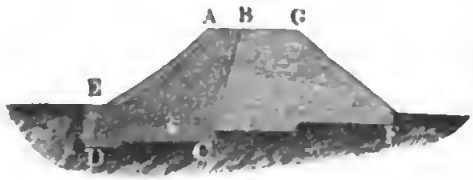


Fig. 319.



Lehmbruſt, ſowie $BGFC$ der aus Schutt beſtehende Hinterdamm, und AE die oben 2 Fuß und unten 4 Fuß dicke und ausgebauchte Terraſſenmauer.

Anmerkung 1. Bezeichnet l die obere und l_1 die untere Länge, b die obere und b_1 die untere Breite, ſowie h die Höhe eines Teichdammes, wie Fig. 318, ſo iſt das Volumen deſſelben:

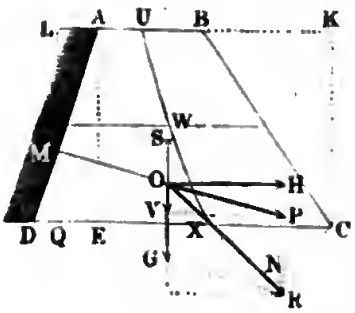
$$V = [lb_1 + l_1 b + 2(lb + l_1 b_1)]\,\frac{h}{6}$$ (ſ. Bd. I, §. 121).

Bei Anwendung dieſer Formel zur Berechnung der Dammmaſſe iſt zu berückſichtigen, daß die feſtgeſtampfte Erde noch nicht ganz die Hälfte des Volumens der lockeren Erde einnimmt.

Anmerkung 2. Einer der großten Teiche im Freiberger Bergreviere iſt der untere Großhartsmannsdorfer Teich. Er hat einen Flächenraum von 32692 Quadratruthen (ſächſ. Maaß) und einen Faſſungsraum von 60,66000 Cubikfuß oder 60,19 wöchentliche Rad Waſſer, jedes Rad zu 100 Cubikfuß pr. Minute; d. h. dieſer Teich gewährt ohne allen Zufluß 60 Wochen lang in jeder Minute 100 Cubikfuß Waſſer. Der Damm dieſes Teiches iſt 1276 Ellen lang, oben 30, unten 82 Ellen breit und $14^3/_4$ Ellen hoch, doch beträgt die höchſte Anſpannung nur 13 Ellen 7 Zoll. In Rußland, und namentlich am Ural, hat man jedoch noch viel größere Teichanlagen.

§. 158 **Stabilität der Teichdämme.** Die Teichdämme ſind dem Drucke und zuweilen ſogar dem Stoße des Waſſers ausgeſetzt, es iſt daher nöthig, ihnen hinreichende Dimenſionen zu ertheilen, damit ſie durch ihr Gewicht dieſen Wirkungen widerſtehen und weder umgeſtürzt noch fortgeſchoben werden. Die Verhältniſſe des Fortſchiebens haben wir ſchon früher (Bd. I, §. 360) kennen gelernt; es bleibt daher nur noch die Stabilität eines Teichdammes in Hinſicht auf das Kippen zu unterſuchen übrig. Das Waſſer übt gegen die Bruſtfläche AD eines Teichdammes $ABCD$, Fig. 320, einen Normaldruck $\overline{OP} = P$ aus, deſſen Angriffspunkt M um LM oder $^2/_3$ der Tiefe $\overline{CK} = {}^2/_3 h$ vom Waſſerſpiegel abſteht (Band I, §. 358). Für ein Dammſtück von der Länge $= 1$ iſt dieſer Druck

Fig. 320.



$$P = \overline{AD} \,.\, 1 \,.\, \gamma \,.\, \frac{h}{2},$$

wenn γ die Dichtigkeit des Waſſers bezeichnet. Der horizontale Component dieſes Druckes iſt

$$H = h \,.\, 1 \,.\, \gamma \,.\, \frac{h}{2} = {}^1/_2 h^2 \gamma,$$

und der verticale Component, wenn m die relative, alſo mh die abſolute Böſchung DE der Bruſtfläche bezeichnet,

$$V = mh \,.\, 1 \,.\, \gamma \,.\, \frac{h}{2} = {}^1/_2 mh^2 \gamma.$$

Das im Schwerpunkte S des trapezoidalen Querſchnittes $ABCD$ angreifende Gewicht des Dammſtückes von der Länge $= 1$ iſt, wenn γ_1 die Dichtigkeit der Dammmaſſe, b die Kappenbreite AB und n die relative, alſo nh die abſolute Hinterböſchung bezeichnet,

$$G = \left(b + \frac{m+n}{2} h\right) h \gamma_1.$$

Aus P und G oder H, V und G entſpringt aber eine Mittelkraft $\overline{OR} = R$, deren ſtatiſches Moment $\overline{CN} . R$ in Hinſicht auf die Hinterkante C des Dammes die Stabilität deſſelben ausdrückt. Denken wir uns P, und alſo auch H und V in M angreifend, ſo erhalten wir das ſtatiſche Moment von P = ſtatiſches Moment von H minus ſtatiſches Moment von V:

$= {}^1/_2 h^2 \gamma . \overline{MQ} - {}^1/_2 m h^2 \gamma . \overline{CQ} = {}^1/_2 h^2 \gamma (\overline{MQ} - m . \overline{CQ})$

$= {}^1/_2 h^2 \gamma [{}^1/_3 h - m (nh + b + {}^2/_3 mh)]$.

Nun iſt aber das in entgegengeſetzter Richtung wirkende ſtatiſche Moment von G:

$$= {}^1/_2 n h^2 \gamma_1 . {}^2/_3 nh + bh\gamma_1 \left(nh + \frac{b}{2}\right) + {}^1/_2 mh^2 \gamma_1 (nh + b + {}^1/_3 mh)$$

$$= h\gamma_1 ({}^1/_3 n^2 h^2 + nbh + {}^1/_2 b^2 + {}^1/_2 mnh^2 + {}^1/_2 mbh + {}^1/_6 m^2 h^2)$$

$$= h\gamma_1 \left[\left(\frac{m^2 + 2n^2}{3} + mn\right)\frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right) bh + {}^1/_2 b^2\right];$$

es folgt daher die Stabilität des Teichdammes:

$$S = h\left(\left[\left(\frac{m^2 + 2n^2}{3} + mn\right)\frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right) bh + {}^1/_2 b^2\right]\gamma_1 - [{}^1/_3 h - m (nh + b + {}^2/_3 mh)]\frac{h}{2}\gamma\right).$$

Um nun den Punkt X anzugeben, in welchem die Widerſtandslinie UWX die Sohle CD des Dammes durchſchneidet, beſtimmen wir die Entfernung CX dieſes Punktes von der Kante C, indem wir in Hinſicht auf den Punkt C das Moment $R . \overline{CN}$ der Mittelkraft R gleich dem Moment $(G + V) . \overline{CX}$ ihres verticalen Componenten $G + V$ ſetzen.

Es iſt hiernach $\dfrac{CX}{CN} = \dfrac{OR}{HR} = \dfrac{R}{G + V}$,

und daher

$$\overline{CX} = a = \frac{\overline{CN} . R}{V + G} = \frac{S}{G + V}$$

$$= \left(\left[\left(\frac{m^2 + 2n^2}{3} + mn \right) \frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2} \right) bh + {}^1/_2 b^2 \right] \gamma_1 \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{2m^2 - 1}{3} + mn \right) h + mb \right] \frac{h}{2} \gamma \right)$$
$$: \left(\left[\left(\frac{m + n}{2} \right) h + b \right] \gamma_1 + {}^1/_2 mh\gamma \right);$$

oder:

$$a = \frac{[(m^2+2n^2+3mn)h^2+(2n+m) \cdot 3bh+3b^2]\gamma_1+[(2m^2-1+3mn)h+3mb]h\gamma}{3([(m+n)h+2b]\gamma_1+mh\gamma)}.$$

Mit Hülfe dieſer Formel kann man auch andere Punkte W u. ſ. w. in der Widerſtandslinie finden, wenn man für h beliebige Dammhöhen einführt, alſo die Stabilität einzelner, durch Horizontalebenen begrenzter Dammſtücke ins Auge faßt.

Für einen Damm ohne Böſchung iſt $m = n = o$, daher:

$$a = \frac{3b^2\gamma_1 - h^2\gamma}{6b\gamma_1} = {}^1/_2 b - \frac{h^2\gamma}{6b\gamma_1} \text{ (vergl. Bd. II, §. 12).}$$

Bei einem Damme mit 45° Böſchung zu beiden Seiten iſt $m = n = 1$, daher:

$$a = \frac{3(2h^2 + 3bh + b^2)\gamma_1 + (4h + 3b)h\gamma}{3[2(b + h)\gamma_1 + h\gamma]};$$

iſt nun noch $b = h$, ſo hat man:

$$a = \frac{18\gamma_1 + 7\gamma}{4\gamma_1 + \gamma} \cdot \frac{h}{3},$$

nimmt man endlich $\gamma_1 = 2\gamma$ an, ſo erhält man:

$$a = {}^{43}/_{27} h = {}^{43}/_{27} b,$$

oder, da dann die untere Dammbreite $b_1 = 3b$, alſo $b = {}^1/_3 b_1$ iſt,

$$a = {}^{43}/_{81} b_1.$$

Nach Vauban iſt hinreichende Sicherheit vorhanden, wenn

$$a = {}^5/_9 \cdot \frac{b_1}{2} = {}^5/_{18} b_1 \text{ ausfällt (ſ. Bd. II, §. 14);}$$

im letzten Falle wäre alſo eine übermäßige Sicherheit vorhanden. Am angemeſſenſten für Teichdämme möchte es jedoch ſein, mindeſtens $a = 0{,}4\ b_1$ zu machen, alſo die Widerſtandslinie 4 Zehntel der unteren Breite von der Hinterfläche abweichen zu laſſen.

Beiſpiel. Man ſoll die Widerſtandslinie für einen Teichdamm angeben, deſſen vordere Böſchung $m = 1$, hintere Böſchung $n = {}^1/_2$ und Dammkappenbreite $b = 10$ Fuß iſt, vorausgeſetzt, daß die Dammmaſſe das ſpecifiſche Gewicht $= 2$ hat. Hier iſt

$$a = \frac{2(3h^2 + 60h + 300) + ({}^5/_2 h + 30)h}{3(3h + 40 + h)} = \frac{1200 + 300h + 17h^2}{24(10 + h)};$$

es ſtellt ſich daher heraus:

für $h = 0$, $a = 5$ Fuß; für $h = 5$ Fuß, $a = \frac{3125}{360} = 8{,}68$ Fuß;

für $h = 10$ Fuß, $a = \frac{5900}{480} = 12{,}29$ Fuß; für $h = 15$ Fuß, $a = \frac{9525}{600} = 15{,}87$ Fuß;

für $h = 20$ Fuß, $a = \frac{14000}{720} = 19{,}44$ Fuß u. ſ. w.

Für eine ſehr große Dammhöhe läßt ſich

$$a = \frac{17h}{24} \text{ und } b = {}^3/_2 h, \text{ alſo } \frac{a}{b} = {}^{17}/_{36}$$

ſetzen. Da $^{17}/_{36}$ ſchon größer als 0,4 iſt, ſo würde dieſer Damm ſelbſt bei einer unendlichen Höhe ſicher vor dem Kippen ſein.

Anmerkung. Nach der Formel $b = \frac{3h - a}{2}$ im Beiſpiele Bd. I, §. 360 iſt, wenn man $a = mh$ ſetzt,

$$2b = (3 - m)\, h, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{2b}{3 - m},$$

alſo im letzten Beiſpiele, wo $m = 1$ iſt,

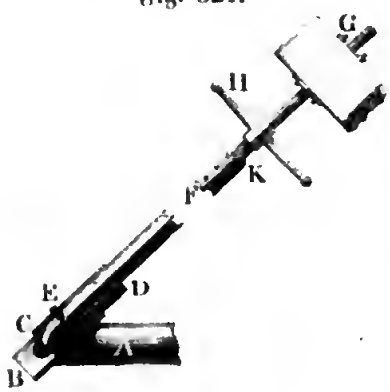
$$h = h_1 = 10 \text{ Fuß zu machen.}$$

Ablassen der Teiche. Zum Ablaſſen des Waſſers aus den Teichen §. 159 ✕
dienen die Teichgerinne und die Fluther. Jene gehen durch den Teichdamm hindurch und dienen zum regelmäßigen Abzapfen, dieſe aber ſind bloße Einſchnitte im Damme und haben den Zweck, das im Uebermaß zufließende Waſſer eines bereits gefüllten Teiches abzuleiten. Zuweilen hat ein Teich mehrere Teichgerinne und mehrere Fluther. Das tiefſte oder im tiefſten Punkte des Teiches einmündende Gerinne wird in der Regel nur beim gänzlichen Ablaſſen und Fiſchen des Teiches geöffnet, und heißt deshalb das Schlämm- oder Fiſchgerinne; das höher liegende Gerinne hingegen endigt ſich in dem Graben, durch welchen das Waſſer auf die Maſchinen geführt wird, und heißt deshalb das Mühl- oder Maſchinengerinne. Bei tiefen Teichen iſt es ſehr zweckmäßig, zwei oder mehrere, in verſchiedenen Höhen einmündende Maſchinengerinne anzuwenden, und das Waſſer, ſo lange es geht, immer durch das höhere Gerinne abzulaſſen, um ſo viel wie möglich Gefälle für die Maſchinen übrig zu behalten. Auch kann man, um denſelben Zweck zu erreichen, das durch das Teichgerinne abgeführte Waſſer außerhalb des Teiches in einem hohen Behälter auffangen, und aus demſelben durch mit Schiebern oder Schlitzen zu verſehenden Mündungen in das eine oder andere Aufſchlaggerinne fließen laſſen.

Die Teichgerinne ſind entweder hölzern, oder ſteinern, oder eiſern; die letzten ſind die beſten. Man verwendet dazu gußeiſerne Röhren von 1 bis $2^1/_2$ Fuß Weite. Zum Reguliren des Abfluſſes dient der Zapfen oder Striegel. Die in neuerer Zeit hier in Anwendung gebrachten Striegel

haben eine Einrichtung, wie ſie Fig. 321 vor Augen führt. Es iſt hier A der Kopf des Teichgerinnes mit der außen abgeſchliffenen Kopfplatte B, CD ein innen abgeſchliffener gußeiſerner Schieber, EF die bis auf die Dammkappe hinaufführende Striegelſtange oder der Striegelſchaft, E eine mit dem Schieber feſt verbundene und über die Kopfplatte weggreifende Schiene, wodurch der Schieber gegen die Kopfplatte gedrückt wird; es iſt ferner G ein ſtarker Steg über der Teichkappe und innerhalb des Teichhäuschens, GK eine Schraubenſpindel, welche durch eine in dem Stege feſtſitzende Mutter hindurchgeht, bei K durch ein Gewinde mit dem Zapfenſchaft verbunden iſt, und durch einen Schlüſſel H in Umdrehung geſetzt werden kann. Man kann nun leicht ermeſſen, wie durch dieſe Umdrehung der Schieber mittels ſeines Schaftes gehoben oder geſenkt, oder die Eintrittsöffnung in das Teichgerinne vergrößert oder verkleinert werden kann.

Fig. 321.



Das Teichgerinne muß einen Querſchnitt erhalten, welcher ſelbſt bei dem niedrigſten Waſſerſtande und bei vollſtändiger Eröffnung noch das erforderliche Waſſerquantum hindurchläßt. Iſt Q die pr. Secunde abzulaſſende Waſſermenge, h die gegebene kleinſte Druckhöhe, l die Länge, d die Weite des Teichgerinnes, ζ_0 der Widerſtandscoefficient für den Eintritt und ζ der Reibungscoefficient für die Bewegung in dem Teichgerinne, ſo hat man nach Bd. I, §. 430:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d + \zeta l}{2 g h} \cdot \left(\frac{4 Q}{\pi}\right)^2},$$

oder einfacher:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{[(1 + \zeta_0)\, d + \zeta l]\, \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß}.$$

Wenn man nun ζ_0 aus der Tabelle in Bd. I, §. 423 und ζ aus der Tabelle in Bd. I, §. 429 wählt, ſo läßt ſich hiernach auf dem Wege der Näherung die geſuchte Gerinnweite berechnen. Bei höherem Waſſerſtande wird ein Theil der Eintrittsmündung durch den Schieber verſchloſſen, weshalb nun nach Bd. I. §. 443 ein größerer Widerſtandscoefficient für den Eintritt einzuführen iſt. Iſt die Eintrittsöffnung ſehr klein, ſo füllt endlich das Waſſer das Teichgerinne gar nicht mehr aus, und es iſt dann einfach der Inhalt dieſer Einmündung:

$$F = \frac{Q}{\mu\sqrt{2gh}} = \frac{(1+\sqrt{\xi_0})\,Q}{\sqrt{2gh}},$$

wo ξ_0 ebenfalls aus §. 443 genommen werden muß. Mit Hülfe der S. 152 u. ſ. w. im „Ingenieur“ mitgetheilten Kreisſegmententabelle läßt ſich hieraus die Schieberſtellung ſelbſt finden.

Die Fluther oder Fluthbetten werden wegen der leichteren Ableitung des Waſſers nahe an den Gehängen in den Damm eingeſchnitten. Sie ſind höchſtens 5 Fuß tief, 10, 20 und mehr Fuß lang und erhalten, wie die Wehre, ein ſteinernes Bette. Uebrigens rüſtet man ſie noch mit Schützen und Rechen aus.

Beiſpiele. 1. Welche Weite iſt einem Teichgerinne von 100 Fuß Länge zu ertheilen, welches bei 1 Fuß Druckhöhe noch 10 Cubikfuß Waſſer pr. Secunde abführt? Führen wir den einer Dammneigung von 40° entſprechenden Coefficienten $\zeta_0 = 0{,}870$, und den einer Geſchwindigkeit von 5 Fuß entſprechenden Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}022$ ein, ſo erhalten wir die Formel:

$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{(1{,}870\,d + 2{,}2).100},$$

welcher $d = 1{,}7$ ſo ziemlich entſpricht, denn ſetzt man rechts $d = 1{,}7$, ſo folgt links:

$$d = 0{,}4817.\sqrt[5]{537{,}9} = 1{,}694 \text{ Fuß}.$$

Es iſt alſo hiernach ein Gerinne von $1{,}7.12 = 20{,}4$ Zoll anzuwenden.

2. Wie tief iſt der Schieber zu ſtellen, damit das vorige Gerinne bei 16 Fuß Druckhöhe ebenfalls nur 10 Cubikfuß Waſſer liefert? Nehmen wir an, daß hier das Gerinne nicht vollfließt, ſo haben wir:

$$F = \frac{(1+\sqrt{\zeta_0})\,Q}{\sqrt{2gh}} = \frac{(1+\sqrt{0{,}87}).10}{7{,}906.\sqrt{16}} = \frac{19{,}327}{7{,}906.4} = 0{,}611 \text{ Quadratfuß}.$$

Dieſes Segment vom Halbmeſſer $\frac{1{,}7}{2}$ auf den Halbmeſſer 1 reducirt, fällt nun

$$F = 0{,}611 \cdot \frac{4}{2{,}89} = 0{,}846$$

aus, und es giebt nun die Segmententabelle im „Ingenieur“ die entſprechende Bogenhöhe oder Schieberſtellung:

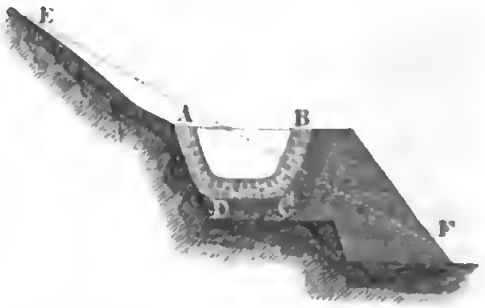
$$s = 0{,}629 \cdot \frac{1{,}7}{2} = 0{,}535 \text{ Fuß} = 6{,}42 \text{ Zoll}.$$

Canäle. Man führt das Aufſchlagwaſſer in Canälen, Gräben und Gerinnen aus den Wehren, Teichen und anderen Sammelapparaten nach dem Punkte des Bedarfes, d. i. nach den Maſchinen, welche es in Bewegung ſetzen ſoll. Die Canäle werden in der Regel in die natürliche Erdoberfläche eingeſchnitten, zuweilen aber auch in einen künſtlich aufgeworfenen Damm gebettet; ſie werden ferner mittels Brücken (Aquäducte) in größerer Höhe über der Erdoberfläche oder unterirdiſch (in Röſchen) unter derſelben fortgeführt. Das Bett wird entweder durch natürliche Erde, Sand oder Steine, oder durch künſtlichen Mörtel gebildet, oder es wird ausgemauert, §. 160.

oder es beſteht daſſelbe in einem hölzernen, ſteinernen oder eiſernen Gerinne. Das Querprofil eines Canales iſt ein geradliniges oder wenig gebauchtes Trapez, das eines Gerinnes aber in der Regel ein Rechteck. Das Nöthigſte über die zweckmäßigſte Form der Querprofile iſt bereits in Bd. I, §. 472 u. ſ. w. abgehandelt worden. Die Querprofile bei Aufſchlagecanälen ſind meiſtens im Mittel $1^1/_2$- bis 3mal ſo lang als tief, bei Schifffahrtscanälen aber iſt ihre Tiefe 5- bis 10mal in ihrer mittleren Länge enthalten. Mit Mörtel ausgemauerten Canälen giebt man wenig oder gar keine Böſchung, Canälen mit Trockenmauerung giebt man $^1/_2$ Böſchung, in dichter Erde ausgehobene Canäle erhalten aber die Böſchung 1 und in Sand und lockere Erde ausgehobene Canäle die Böſchung 2. Die Conſtruction eines Canales in einem nicht waſſerdichten Boden führt Fig. 322 vor Augen. Hier ſind die Seiten und der Boden 1 bis 2 Fuß dick mit Lehm ausgerammelt, und wenig geböſchte Seitenmauern AD und BC von $1^1/_2$ bis 2 Fuß

Fig. 322.

Fig. 323.



Dicke angeſetzt. Wird der Canal an einem Gehänge EF, Fig. 323, hingeführt, ſo ſchneidet man ihn nur zum Theil ein und benutzt die ausgehobene Erde zur Bildung des übrigen Theiles. Um die Sohle CD zu ſchützen iſt dieſelbe, wie die Seiten, ausgemauert. Höhere Dämme, auf welchen Canäle fortgeführt werden, verſieht man mit Futtermauern AB und CD, Fig. 324. Unterirdiſche Canäle ſtehen entweder in feſtem Geſteine oder ſind ausgemauert, wie Fig. 325 vor Augen führt. Um Röſchen

Fig. 324.

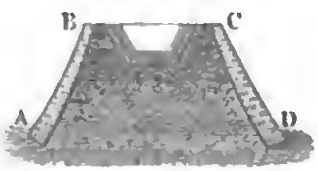
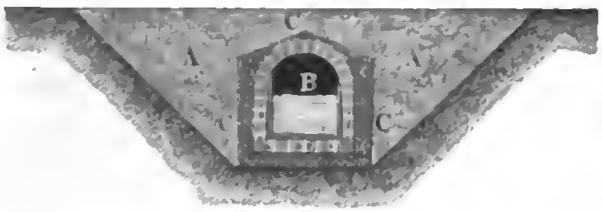


Fig. 325.

begehen zu können, erhalten dieselben eine angemessene Höhe und ein auf Stegen *A B* liegendes Laufbrett *C*. Die in einem Gebirgseinschnitt *A A* (Fig. 326) liegende Wasserleitung *B* ist rund herum ausgemauert, innen mit Cement überzogen, und außen mit einer Lehmhülle umgeben.

Fig. 326.



Ein hölzernes Gerinne oder Spundstück ist in Fig. 327 abgebildet. Dasselbe besteht aus den durch Pfosten gebildeten Borden oder Seitenwänden *A A*, aus dem durch Bretter gebildeten und auf Tragleisten *C C* ruhenden Boden *B*, und wird durch Geviere, wie *D E F G*, zusammengehalten. Die Verdichtung in den Stoßfugen wird durch feines Moos oder durch Kitt u. s. w. bewirkt. Die Construction gußeiserner Gerinne ist aus Fig. 328 ersichtlich. Hier sind die Seitenwände mit Lappen, wie *A B*, *B C* u. s. w., versehen, und es erfolgt die Zusammensetzung durch Schrauben, welche durch je zwei Lappen hindurchgehen.

Fig. 327.

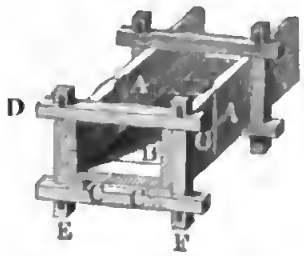
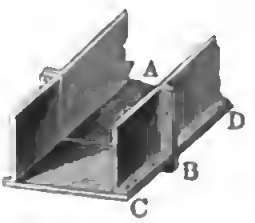


Fig. 328.

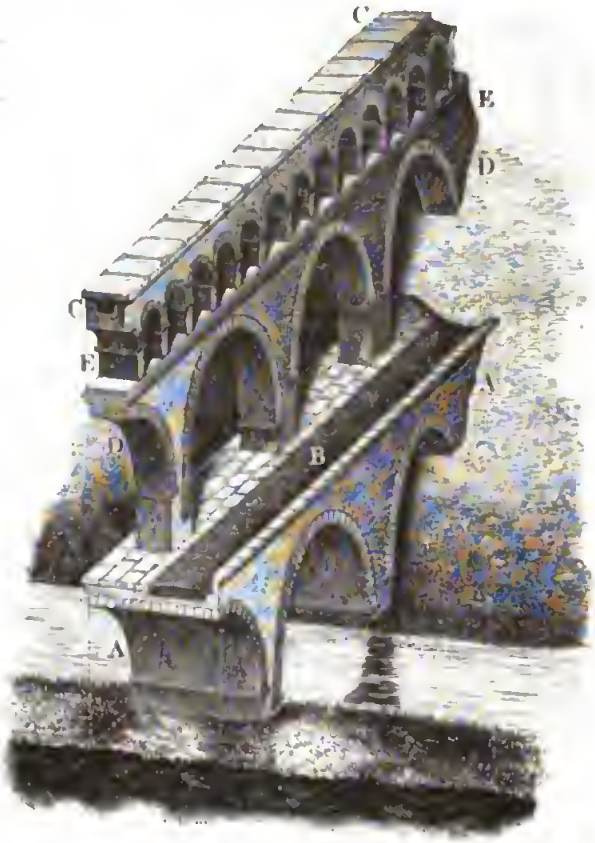


Zu den unterirdischen Wasserleitungen gehören auch die Straßenschleusen oder verdeckten Abzugscanäle unter den Straßen (franz égouts; engl. sewers). Sie unterscheiden sich von den gewöhnlichen unterirdischen Wasserleitungen nur dadurch, daß das Wasser, welches dieselben fortführen, sehr unrein und mit vielen fremden Stoffen angefüllt, und daß die Menge desselben innerhalb weiter Grenzen sehr veränderlich ist. Deshalb erhalten dieselben ein großes Gefälle von mindestens $^1/_{50}$ der Länge. Damit sie dem Erddruck hinreichend widerstehen können, giebt man diesen Schleusen eine eiförmige Umfangsmauer *A B*, Fig. 329, und damit sie die nöthige Wasserdichtigkeit erhalten, verwahrt man die Sohle derselben durch eine Betonschicht *B* u. s. w. Noch versieht man diese Schleusen mit Lichtlöchern, wie z. B. *C*, welche mittels durchlöcherter eiserner Deckel *D D* verschlossen werden.

Fig. 329.

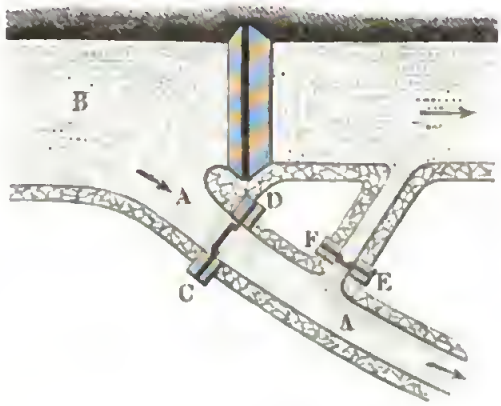
Anmerkung. Ein Beiſpiel von einem antiken Aquäduct führt Fig. 330 vor Augen. Es iſt dies eine monodimetriſche Abbildung von dem 160 Fuß hohen Aquäduct du Gard bei Nismes. Der Canal *CC*, in welchem das Waſſer fließ, iſt 4½ Fuß breit und 5 Fuß hoch; er ruht auf drei übereinander ſtehenden Bogenreihen und iſt durch ſteinerne Platten bedeckt. Die untere Bogenreihe *AA* beſteht aus ſechs Halbkreisbogen von 55 bis 77 Fuß Spannung und trägt zugleich eine gewöhnliche Fahrſtraße *B*. Die mittlere Bogenreihe *DD* beſteht aus zehn Bögen und die oberſte Bogenreihe *EE* aus einer ſehr großen Anzahl kleiner Bogen, iſt aber an den Enden bereits eingeſtürzt.

Fig. 330.



§. 161 Die Einmündung eines Canales *AA*, Fig. 331, in einen Fluß *B* iſt durch allmälige Erweiterung und Abrundung zu bewirken, die Ufer ſind durch Mauerung und durch eine zwiſchen Lehmrammelung ſtehende Spundwand *CD* vor den zerſtörenden Wirkungen des fließenden Waſſers zu ſchützen. Uebrigens läßt ſich das Schützenwerk, welches zum Reguliren des Waſſers dient, gleich in das Bundwerk der Spundwand oder der ſogenannten Verheerdung einſetzen. Um das durch beſondere Umſtände, z. B. durch ſtarke Regengüſſe, Thaufluthen u. ſ. w.

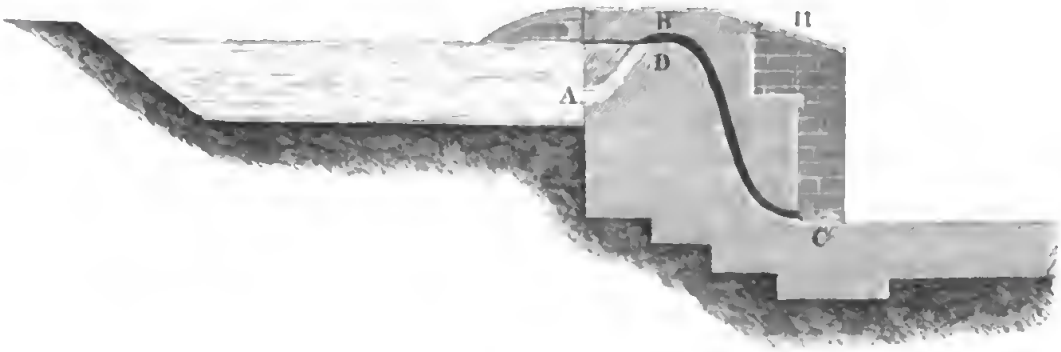
Fig. 331.



herbeigeführte Ueberlaufen oder Ueberfüllen der Canäle zu verhindern, sind noch Abläſſe, Abſchläge oder Fluther anzubringen. Dieſe ſind kurze, ſeitwärts einmündende Canäle mit einem ſtarken Gefälle. Man ſchützt dieſelben durch Mauerung, Lehmrammelung und Verheerdung, wie EF, Fig. 331 zeigt, und ſperrt ſie für gewöhnlich durch eingeſetzte Pfoſten oder bewegliche Schützen. Auch verſieht man wohl zu demſelben Zwecke den Wehrdamm mit einem Fluther.

Um endlich noch das nöthige Ablaſſen des Waſſers aus Canälen von ſelbſt, ohne Beihülfe eines Aufſehers zu bewirken, wendet man beſondere Mechanismen, wie z. B. Schwimmer, an, welche beim Anſchwellen des Waſſers im Canale ſteigen und dabei die meiſt in einer Klappe oder Thür beſtehende Schütze öffnen, oder man bedient ſich eines Kaſtens, in welchen Waſſer einfließt, wenn daſſelbe im Canale eine gewiſſe Höhe überſchritten hat, und welcher beim Niederſinken die Abflußklappe öffnet. Am einfachſten iſt aber der Heber ABC, Fig. 332, mit einer Luftröhre DE. Sowie der Waſſerſpiegel im Canale in das Niveau des Heberſcheitels B kommt, ſo füllt ſich

Fig. 332.

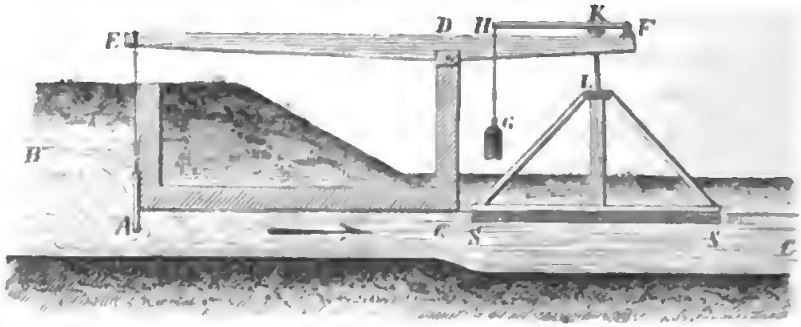


der letztere ganz mit Waſſer und es fließt daſſelbe bei C mit gefülltem Querſchnitte und unter einer Druckhöhe ab, welche der Tiefe CH der Ausmündung C unter dem Waſſerſpiegel gleichkommt. Sinkt aber das Waſſer wieder bis zur Luftröhre, ſo dringt Luft ein, und es endigt ſich dadurch der Ausfluß. Füllt das Waſſer nur einen Theil des höchſten Röhrenquerſchnittes BD aus, ſo tritt natürlich nur das Ausflußverhältniß eines Ueberfalles ein.

Eine ſich ſelbſt ſtellende Schütze iſt in Fig. 333 (a. f. S.) abgebildet. Es iſt hier die Schütze A, welche das aus B nach C abfließende Waſſer reguliren ſoll, an einem um D drehbaren Hebel EF aufgehangen, der mit einem auf dem abfließenden Waſſer CC ruhenden Schwimmer SS in Verbindung ſteht. Steigt das Waſſer CC und mit ihm SS, ſo ſinkt die Schütze A, und fällt CC, ſo wird A mittels SS gehoben; im erſten Falle wird aber die Ausflußmenge bei A vermindert, und im zweiten vergrößert,

jedenfalls alſo die dem Steigen oder Sinken von SS entſprechende Zu- oder Abnahme des Abflußwaſſers wieder aufgehoben. Um dem Steigen des

Fig. 333.



Schimmers kein Hinderniß entgegenzuſetzen, wenn die Schütze A geſchloſſen und CC in Folge von Regengüſſen angeſchwollen iſt, läßt man die Schwimmer mittels eines Bolzens KL auf einen Hebel FH wirken, der durch ein Gewicht G niedergezogen wird.

§. 162 **Canalgefälle.** Die Geſchwindigkeit des Waſſers in einem Canale ſoll eine mittlere ſein; nicht zu klein, weil ſich außerdem derſelbe leicht verſchlämmt oder verſandet, und nicht zu groß, weil ſonſt das Bett nicht hinreichenden Widerſtand leiſtet, und weil eine große Geſchwindigkeit ein zu großes Gefälle für den Canal in Anſpruch nimmt und es den Maſchinen entzieht. Um das Abſetzen von Schlamm zu verhindern, ſoll die mittlere Geſchwindigkeit mindeſtens 7 bis 8 Zoll übertreffen, da, wo aber das Abſetzen von Sand zu befürchten iſt, ſoll man dieſelbe nicht unter $1\frac{1}{4}$ Fuß zulaſſen. Was die Maximalgeſchwindigkeit des Waſſers in Canälen anlangt, ſo hängt dieſe von der Beſchaffenheit des Bettes ab; damit dieſes nicht angegriffen wird, darf die Geſchwindigkeit am Boden nicht überſchreiten:

bei ſchlammigem Boden $\frac{1}{4}$ Fuß,
„ thonigem Boden $\frac{1}{2}$ Fuß,
„ ſandigem Boden 1 Fuß,
„ kieſigem Boden 2 Fuß,
„ grobſteinigem Boden 4 Fuß,
„ einem Boden von Conglomerat oder Schieſergeſtein 5 Fuß,
„ einem Boden von geſchichtetem Geſteine 6 Fuß,
„ einem Boden von hartem und ungeſchichtetem Geſteine 10 Fuß.

Wenn nun auch die Geſchwindigkeit am Boden kleiner iſt als die mittlere Geſchwindigkeit im ganzen Querprofile, ſo wird es doch der Sicherheit wegen gut ſein, ſelbſt mit der letzteren die eben angegebenen Grenzen nicht zu überſchreiten.

Aus der angenommenen mittleren Geſchwindigkeit c und aus dem fortzuführenden Waſſerquantum Q ergiebt ſich nun der Inhalt des Querprofiles

F, und hieraus wieder der Umfang p des Waſſerprofiles; ſetzt man nun dieſe Werthe in die Formel

$$\delta = \frac{h}{l} = \xi \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g} \text{ (ſ. Bd. I, §. 475 u. f. w.)}$$

ein, ſo bekommt man den erforderlichen Abhang δ des Canales, aus dem ſich wieder das Gefälle auf die ganze Canallänge l, $h = \delta l$ ergiebt.

Hiernach erhält man allerdings unter verſchiedenen Verhältniſſen ſehr verſchiedene Abhänge; da indeſſen, ξ im Mittel $= 0{,}007565$, c in der Regel zwiſchen 1 und 5 Fuß und bei Aufſchlageeanälen, $\frac{p}{F}$ zwiſchen $^1/_5$ und 2 gelegen iſt, ſo folgen die Grenzen der Abhänge bei dieſen Canälen:

$$0{,}007565 \,.\, {}^1/_5 \,.\, 1 \,.\, 0\,016 = 0{,}000024 \text{ und}$$
$$0{,}007565 \,.\, 2 \,.\, 25 \,.\, 0{,}016 = 0{,}00605.$$

Den Abzugseanälen giebt man in der Regel ein größeres Gefälle, um eine größere Geſchwindigkeit zu erzeugen und das Waſſer, nachdem es gewirkt hat, ſchnell von der Umtriebsmaſchine zu entfernen.

Da nach Bd. I, §. 474 für Canäle mit ähnlichen Querprofilen $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ iſt, ſo folgt die Neigung der Canalſohle $\delta = \xi \frac{m}{\sqrt{F}} \cdot \frac{c^2}{2g}$; und es fällt alſo hiernach dieſelbe um ſo größer aus, je kleiner das Querprofil des Canales iſt.

Aus demſelben Grunde haben bei gleicher Geſchwindigkeit große Flüſſe und Ströme einen kleineren Fall als Bäche und Canäle. Beziehen ſich p, F, l und c auf einen Graben und p_1, F_1, l_1 und c_1 auf eine Flußſtrecke, neben welcher der Graben hinläuft, iſt folglich $h = \xi \frac{pl}{F} \frac{c^2}{2g}$ das Gefälle des erſteren und $h_1 = \xi \frac{p_1 l_1}{F_1} \frac{c_1^2}{2g}$ das der letzteren, ſo fällt das durch die Grabenführung gewonnene **nutzbare Gefälle**

$$h_2 = h_1 - h = \xi \frac{p_1 l_1}{F_1} \frac{c_1^2}{2g} - \xi \frac{pl}{F} \frac{c^2}{2g} \text{ aus.}$$

Da in der Regel $\frac{p_1}{F_1} < \frac{p}{F}$ ausfällt, ſo iſt zu fordern, daß $l c^2 < l_1 c_1^2$, daß alſo die Grabenſtrecke kürzer ſei als die Flußſtrecke, und daß die Geſchwindigkeit des Waſſers in der erſteren kleiner ausfalle als in der letzteren.

Anmerkungen. 1. Hieſigen Aufſchlagegräben giebt man 0,00025 bis 0,0005, den Abzugsgräben aber 0,001 bis 0,002 Abhang. Die urſprünglich römiſche Waſſerleitung zu Arcueil bei Paris hat $\delta = 0{,}000416$, die New-River-Waſſerleitung in London aber $\delta = 0{,}00004735$ u. ſ. w.

2. Plötzliche Richtungs- und Querſchnittsveränderungen ſind bei einem Canale zu vermeiden, weil dadurch nicht nur Gefälle verloren geht, ſondern auch nachtheilige Wirkungen auf das Bett deſſelben entſtehen. Wenn man Canäle an Gehängen hinführt, ſo ſind Krümmungen nicht zu vermeiden, und es iſt dann wenigſtens dafür zu ſorgen, daß dieſelben große Halbmeſſer oder wenigſtens größere Querſchnitte erhalten.

3. Durch das Anſetzen von Schlamm, Sand und Eis, ſowie durch Einwachſen von Waſſerpflanzen, wie Schilf u. ſ. w., wird das Querprofil der Canäle verengt, und dadurch ebenfalls ein Gefällverluſt herbeigeführt. Man ſoll daher die Canäle von Zeit zu Zeit von ſolchen Hinderniſſen befreien, übrigens aber die Bildung derſelben, zumal durch Bedeckung der Canäle, zu verhindern ſuchen. Endlich verliert ein Canal auch Waſſer durch Verdunſtung und Verſickerung, gewinnt aber auch wieder durch Quellen und Regen. Sichere Angaben laſſen ſich jedoch hierüber nicht machen.

4. Wenn man in der Formel $h = \zeta \frac{ml}{\sqrt{F}} \frac{c^2}{2g} = \zeta \frac{mlQ^2}{2gF^{5/2}}$, F um $\triangle F$ zunehmen läßt, ſo nimmt h um $\triangle h = {}^5/_2 \zeta \frac{mlQ^2 \triangle F}{2gF^{7/2}}$ ab, und es iſt $\frac{\triangle h}{h} = -{}^5/_2 \frac{\triangle F}{F}$ ſowie $\frac{\triangle F}{F} = -{}^2/_5 \frac{\triangle h}{h}$. Es iſt alſo die relative Gefällvergrößerung $= {}^5/_2$mal der relativen Querſchnittsverminderung, ſowie die relative Querſchnittsvergrößerung $= {}^2/_5$mal der relativen Gefällvermiuderung. Die Waſſermenge bleibt z. B. dieſelbe, ob man den Querſchnitt des Grabens um 2 Procent größer oder kleiner, oder ob man das Gefälle deſſelben um 5 Procent kleiner oder größer macht.

§. 163 **Schützen.** Der Eintritt des Waſſers in einen Canal iſt entweder frei oder durch eine Schütze zu reguliren. Tritt das Waſſer frei aus dem Wehrteiche oder einem Reſervoir, worin es als ſtillſtehend anzunehmen iſt, ſo bildet ſich eine Senkung des Waſſerſpiegels, welche auf die Erzeugung der Geſchwindigkeit v des Waſſers im Canale verwandt wird, daher $= \frac{v^2}{2g}$ iſt, und allemal vom ganzen Canalgefälle abgezogen werden muß. Bei mittleren Geſchwindigkeiten von 3 bis 4 Fuß beträgt jedoch dieſe Senkung nur $1{}^1/_2$ bis 3 Zoll. Wird der Eintritt des Waſſers in einen Canal durch ein Schutzbrett regulirt, ſo ſind zwei Fälle von einander zu unterſcheiden. Entweder fließt das Waſſer frei durch die Schutzöffnung, oder es fließt unter dem die Vorderfläche des Schutzbrettes zum Theil bedeckenden Unterwaſſer aus. In der Regel iſt die Höhe des im Graben fortfließenden Waſſers größer als die Oeffnungshöhe und es bildet ſich deshalb in einer gewiſſen Entfernung vor der Schütze AC, Fig. 334, ein Sprung S. Die Höhe $BC = x$ dieſes Sprunges beſtimmt ſich aus der Geſchwindigkeit v des fortfließenden und

Fig. 334.

aus der Geſchwindigkeit v_1 des ankommenden Waſſers mittels der Formel:

$$x = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g},$$

und zieht man dieſe Höhe von der die Geſchwindigkeit v_1 erzeugenden Druckhöhe

$$AC = h = \frac{v_1^2}{2g}$$

ab, ſo bleibt das zur Erzeugung der Anfangsgeſchwindigkeit v verwendete Gefälle

$$AB = h_1 = h - x = \frac{v_1^2}{2g} - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v^2}{2g};$$

und zwar genau ſo groß wie beim freien Eintritt. Da die Mündung nie vollkommen glatt und abgerundet iſt, ſo wird ſie allerdings noch ein Hinderniß darbieten und das Gefälle noch um 10 oder mehr Procent vergrößern.

Setzen wir den Inhalt des Querſchnittes vom fortfließenden Waſſer $= G$ und den der Oeffnung CD, $= F$, ſowie den Contractionscoefficienten $= \alpha$, ſo erhalten wir:

$$Gv = \alpha F v_1,$$

und daher die Sprunghöhe:

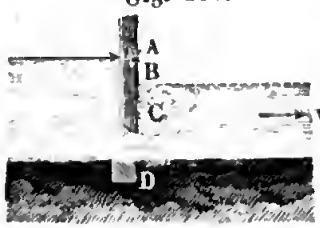
$$x = a - a_1 = \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g}.$$

Statt $\frac{v_1^2}{2g}$ die Geſchwindigkeits- oder Druckhöhe $\overline{AC} = h$ und den Widerſtandscoefficienten ζ_0 eingeführt, ſowie $h = (1 + \zeta_0) \frac{v_1^2}{2g}$ geſetzt, folgt

$$x = \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{h}{1 + \zeta_0}.$$

Iſt anfänglich die Differenz $a - a_1$ der Waſſerhöhen a und a_1 kleiner als $= \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g}$, ſo zieht ſich der Sprung bis zu einer gewiſſen Stelle S ſtromabwärts; iſt ſie hingegen größer, ſo zieht er ſich aufwärts, ſo daß zuletzt der in Fig. 335 abgebildete Ausfluß unter Waſſer eintritt. Hier wird die Druckhöhe $AB = h$ nicht allein auf die Erzeugung der Geſchwindigkeit v des fortfließenden Waſſers, ſondern auch auf die Ueberwindung des Hinderniſſes verwendet, welches ſich herausſtellt, wenn die Geſchwindigkeit v_1 in der Mündung plötzlich in die Geſchwindigkeit v im Canale verwandelt wird. Setzen wir den Inhalt der Mündungsfläche $CD = F$ und den Querſchnitt des Canales, $= G$, ſo haben wir die durch dieſen Uebergang verlorene Druckhöhe

Fig. 335.



$$h_1 = \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

und daher das erforderliche Gefälle:

$$AB = h = \frac{v^2}{2g} + \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

d. i.:

$$h = \left[1 + \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Man ſieht, daß dieſes Gefälle oder der Niveauabſtand des Waſſers vor und hinter dem Schutzbrette um ſo größer ausfällt, je kleiner die Schutzöffnung F in Anſehung des Canalquerſchnittes G iſt.

Beiſpiel. Ein Canal hat 5 Fuß mittlere Breite und liefert bei 3 Fuß Tiefe 45 Cubikfuß Waſſer pr. Secunde; wenn nun ſeine Speiſung durch eine 4 Fuß weite und 1 Fuß hohe Schutzöffnung erfolgt, um wie viel wird das Waſſer hinter dem Schutzbrette tiefer ſtehen als vor demſelben? Es iſt:

$G = 5.3 = 15$ Quadratfuß und $F = 4.1 = 4$ Quadratfuß; ferner:

$v = {}^{45}/_{15} = 3$ Fuß und $v_1 = \frac{3.15}{4} = {}^{45}/_{4} = 11{}^{1}/_{4}$ Fuß.

Da nun $\left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g} = [1 - ({}^{4}/_{15})^2].2{,}02 = 1{,}88$ Fuß kleiner als $a - a_1 = 3 - 1 = 2$ Fuß iſt, ſo wird ein freier Ausfluß nicht ſtattfinden können. Die Formel

$$h = \left[1 + \left(\frac{G}{F} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

giebt den geſuchten Niveauabſtand:

$$h = (1 + 2{,}75^2).0{,}144 = 8{,}56.0{,}144 = 1{,}23 \text{ Fuß},$$

welcher jedoch wegen der Hinderniſſe in der Mündung mindeſtens noch 10 Proc. größer ſein kann.

§. 164 **Leitungsröhren.** Röhrenleitungen dienen in der Regel nur zur Fortleitung kleiner Waſſermengen, wie ſie etwa zum Speiſen einer Waſſerſäulenmaſchine mit hohem Gefälle nöthig ſind. Da ſie rings umſchloſſen ſind, ſo kann man ſie nicht bloß fallend, ſondern auch ſteigend legen. Auch kann das Neigungsverhältniß ein ganz beliebiges ſein, wenn nur die Ausmündung unter, und der höchſte Punkt der Leitung noch nicht 1 Atmoſphäre (32,84 Fuß) über, beſſer aber ebenfalls unter der Einmündung liegt. Durch Röhrenleitungen laſſen ſich alſo Thäler und Anhöhen überſchreiten, ohne Brücken und Röſchen zu erfordern. Die Leitungsröhren ſind aus Holz oder gebranntem Thon, Stein, Glas, Eiſen, Blei u. ſ. w. Am häufigſten kommen die Holz- und Eiſenröhren vor, nächſtdem aber die Steinröhren.

Zu den hölzernen Leitungsröhren verwendet man gewöhnlich Nadelholz, weil ſich daraus leicht gerade Röhren von 12 bis 20 Fuß Länge ſchneiden laſſen. Die Weite der Bohrung beträgt $1{}^{1}/_{2}$ bis 8 Zoll, ſie ſoll übrigens

ein Drittel des Röhrendurchmeſſers nicht übertreffen. Die Verbindungsweiſen der Röhren untereinander ſind aus den Figuren 336 und 337 zu erſehen. Fig. 336 zeigt eine coniſche Verzapfung mit einem eiſernen Ringe

Fig. 336.

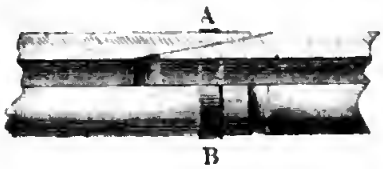


Fig. 337.

AB und einer Einlage von getheertem Hanf oder getheerter Leinwand. Fig. 337 zeigt eine Verbindung mit einer eiſernen Büchſe *CD*, welche mit ihren ſchneidigen Ringen in beide Röhrenenden 1 bis 2 Zoll tief eindringt.

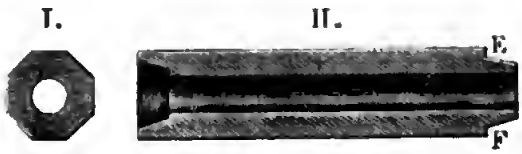
Die ſteinernen Röhren ſind 5 bis 6 Fuß lang, ſie werden ſtumpf zuſammengeſtoßen, mit einem Kitte oder hydrauliſchem Mörtel und einem über beide Röhrenenden weggreifenden eiſernen Ringe verbunden.

Es gehören hierher auch die ſogenannten Steinzeugröhren, Portlandcementröhren u. ſ. w.

In manchen Fällen laſſen ſich auch Aſphaltröhren mit Vortheil anwenden. Ebenſo gezogene Bleiröhren, ſowie zuſammengelöthete Zinkröhren u. ſ. w.

Einen Quer- und einen Längendurchſchnitt einer ſteinernen Röhre mit coniſcher Verzapfung *EF* zeigt Fig. 338, I und II.

Fig. 338.



Die eiſernen Röhren zeichnen ſich durch große Feſtigkeit und Dauerhaftigkeit vor allen anderen Röhren aus. Sie werden von ſehr verſchiedenen Weiten und bei mindeſtens $\frac{1}{2}$ Zoll Stärke, 5 bis 10 Fuß lang gegoſſen. Man muß ſie vor dem Gebrauche einer hydroſtatiſchen Prüfung unterwerfen. Um ſie vor der Oxydation von innen zu ſchützen, werden dieſelben ausgepicht, oder überfirnißt, oder gar mit hydrauliſchem Mörtel beſtrichen. Uebrigens iſt die Wandſtärke von der Weite und vom Drucke abhängig und nach Band I, §. 363 zu beſtimmen. Die Zuſammenſetzung der eiſernen Röhren erfolgt entweder mittels Kränzen *AB* und Schrauben *CD*, wie Fig. 339 (a. f. S.) vor Augen führt, oder mittels Schnauzen *EF*, wie Fig. 340 zeigt, oder mittels Ringen (Sätteln) *GH*, welche, wie Fig. 341 andeutet, über die ſtumpf zuſammengeſtoßenen Enden von je zwei Röhren weggreifen. Zur Verdichtung dient Leder, Filz, Kautſchuk, Blei,

Eiſenkitt oder Holz, welches letztere in Keilform in die Fugen einzutreiben iſt. Zuweilen ſetzt man auch noch ſchwache Eiſen- oder Kupferringe ſo inwendig

Fig. 339.

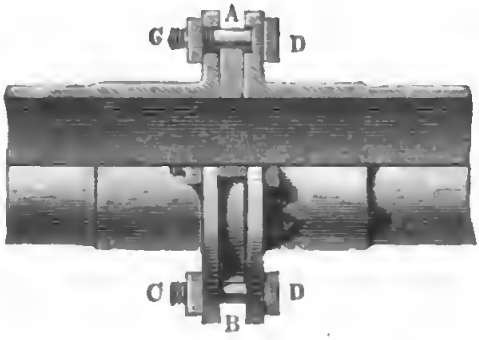
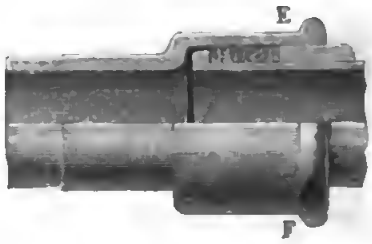


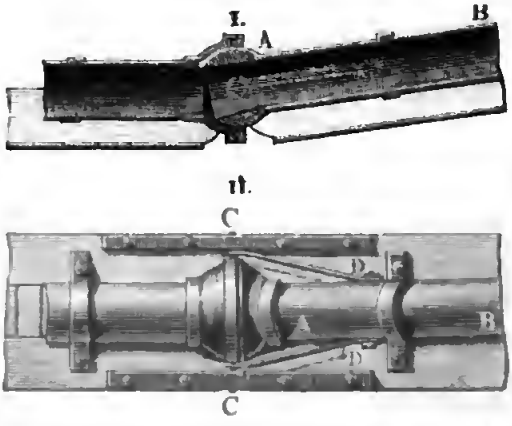
Fig. 340.



an, daß ſie über beide Röhrenenden weggreifen. Hölzerne und ſteinerne Röhren laſſen ſich ebenfalls durch Schnauzen mit eiſernen Röhren verbinden. Noch hat man auch Verbindungen mit der Nuß A, wie Fig. 342 I und II zeigt, durch welche ſich die Röhren unter beliebigen Winkeln zuſammenſtoßen laſſen. Dieſe Nußverbindung iſt noch mit einer Drehaxe CC und zwei Armen CD, CD ausgerüſtet, welche um die Axe CC drehbar und mit der Röhre AB feſt verbunden ſind.

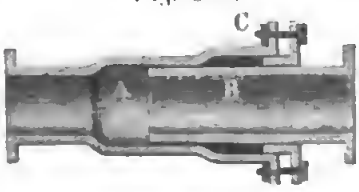
Fig. 341.

Fig. 342.



Liegen die gußeiſernen Röhren nicht tief unter oder wohl gar über der Erde, ſo erleiden dieſelben mit dem Wetter Temperaturveränderungen, die wieder eine Ausdehnung oder Verkürzung der Röhren zur Folge haben. Um nun aber die nachtheiligen Folgen dieſer Veränderung, wie z. B. das Zerſprengen, ſowie auch das Zufrieren der Röhren, zu vermeiden, müſſen ſogenannte Compenſationsröhren, wie Fig. 343, in die Leitung eingeſetzt werden. Die Längenausdehnung des Gußeiſens beträgt bei jedem Grad Wärmezunahme = 0,0000111; folglich die Längenausdehnung bei 50° Temperaturzunahme (vom tiefſten Winterfroſte bis zur höchſten

Fig. 343.



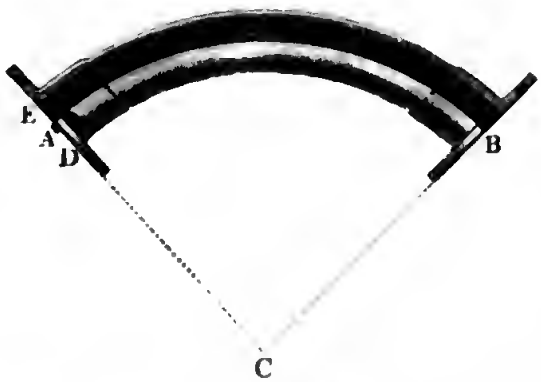
Sommerhitze) = 50 . 0,0000111 = 0,000555; iſt nun die Leitungsröhre $^1/_{0,000555}$ = 1800 Fuß lang, ſo nimmt dieſelbe folglich bei dieſer Temperaturveränderung um 1 Fuß an Länge zu. Dieſe Ausdehnung wird nun durch die Compenſationsröhre A wieder ausgeglichen, indem ſich die folgende Röhre B in ihr verſchiebt. Damit dies ungehindert geſchehen könne, wird das Ende dieſer Röhre abgedreht, und der Verſchluß durch eine mit einem Polſter gefüllte Stopfbüchſe C hervorgebracht. In der Regel bringt man auf 300 Fuß Länge eine Compenſationsröhre an.

Um das ſchon bei Null Grad Wärme eintretende Zufrieren der Röhren zu verhindern, legt man die Röhren mindeſtens 3 Fuß tief in die Erde, wobei natürlich auch die Zuſammenziehung derſelben durch die Kälte im Winter wegfällt.

Regulirung des Waſſers in Leitungsröhren. Nicht immer laſſen ſich Röhrenleitungen gerade fortführen, ſondern man muß ſie bald zur Seite, bald auf- bald abwärts ſteigend legen. Es iſt hierbei aber ſtets die Regel zu befolgen, plötzliche Richtungsänderungen, alſo Knieröhren, gänzlich zu vermeiden, krummen Röhren aber große Krümmungshalbmeſſer oder auch eine größere Weite zu geben. Ein ſolches gußeiſernes Kropfſtück iſt in Fig. 344 abgebildet. Es iſt hier der Ablenkungswinkel $ACB = 90^0$ und das Verhältniß der Röhrenweite DE zum Krümmungshalbmeſſer CA, $= 1/6$. Uebrigens ſind plötzliche Querſchnittsveränderungen ebenfalls zu vermeiden und, ſowie bei Ein- und Ausmündungen der Röhrenleitung, durch Abrundungen allmälige Uebergänge aus einem Querſchnitt in einen anderen zu bewirken. Aufwärtsgehende Krümmlinge, Fig. 345 (a. f. S.), haben den Nachtheil, daß ſich in ihnen die Luft L anſammelt, die den Querſchnitt verengt, und wenn ſie ſich in großer Menge angehäuft hat, denſelben ganz einnimmt, und dadurch die Bewegung des Waſſers ganz verhindert. Um dieſe Anhäufung zu verhindern, ſetzt man ſenkrechte Röhren AL, ſogenannte Luftſtänder, Windſtöcke (franz. ventouses; engl. wind-pipes), Fig. 345, auf, durch die ſich die Luft oder andere ſich aus dem Waſſer entwickelnde Gaſe entfernen können. Um ſie nicht zu lang machen zu dürfen, verſchließt man dieſelben mit einem Hahne, der von dem Röhrenwärter von Zeit zu Zeit und jedes Mal ſo lange zu öffnen iſt, bis ſich alle Luft entfernt hat und nur Waſſer ausſtrömt. Um

§. 165

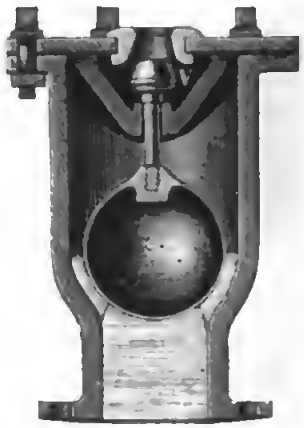
Fig. 344.



ſelbſt dieſes Oeffnen durch Menſchenhände unnöthig zu machen, wendet man Windſtöcke mit Schwimmer wie Fig. 346 an. Hier iſt das abſchließende Ventil V mit einem hohlen Schwimmer S aus Blech verbunden, der,

Fig. 345.

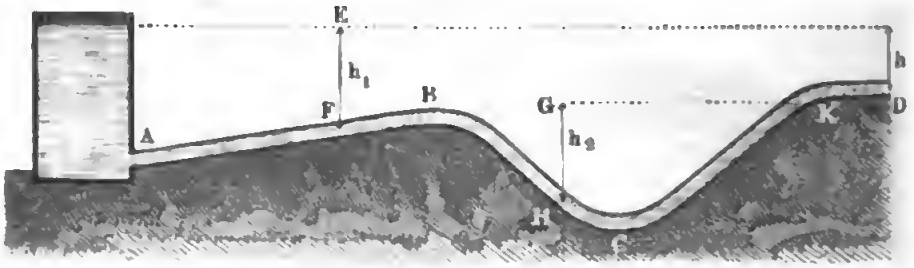
Fig. 346.



ſo lange Waſſer im Raume über dem Röhrenſcheitel iſt, nach oben zu ſteigen ſucht und das Ventil zuhält, dagegen aber niederfällt und das Ventil öffnet, wenn dieſer Raum mit Luft ausgefüllt iſt.

Wenn eine Röhrenleitung $A\,B\,C\,D$, Fig. 347, in der Kröpfung B

Fig. 347.

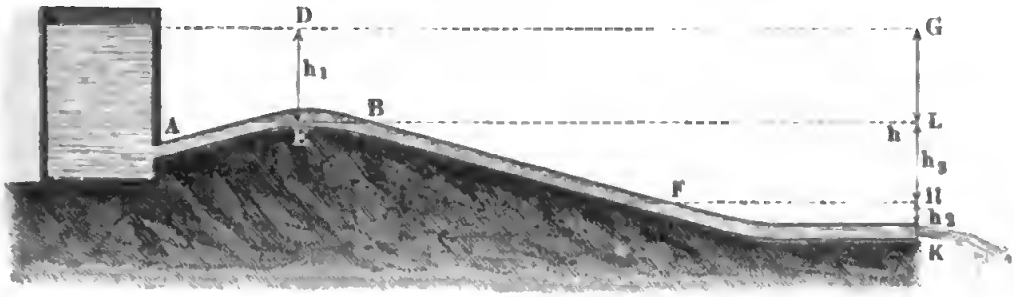


keinen Windſtock hat, ſo wird die eingeſchloſſene Luft einerſeits durch eine Waſſerſäule von der Höhe $E\,F = h_1$ und anderſeits durch eine ſolche von der Höhe $G\,H = h_2$ gedrückt; iſt daher $h_2 = h_1$, und reicht der Waſſerſpiegel K nicht bis zur Mündung D, ſo ſetzt ſich der Luftdruck in $F\,B\,H$ mit dieſen beiden Waſſerſäulen ins Gleichgewicht, ohne daß ein Ausfluß bei D erfolgt.

Der Mangel eines Windſtockes kann den Abfluß des Waſſers durch eine Röhrenleitung zuweilen auch bloß vermindern. Einen ſolchen Fall ſtellt die Leitung $A\,B\,C$, Fig. 348, dar, wo die Höhe z der Waſſerſäule, welche den Druck der in $E\,B\,F$ eingeſchloſſenen Luft mißt, nur wenig kleiner iſt als die Druckhöhe $D\,E = h_1$ des zufließenden Waſſers, und deshalb auch die Geſchwindigkeit des letzteren ſehr klein ausfällt. Von E aus fließt dann

das Waſſer bis zu einer Stelle F auf dem Boden der Röhre hin, ohne eine Druckveränderung zu erleiden, und von F aus ſtrömt es bis zur Mündung

Fig. 348.



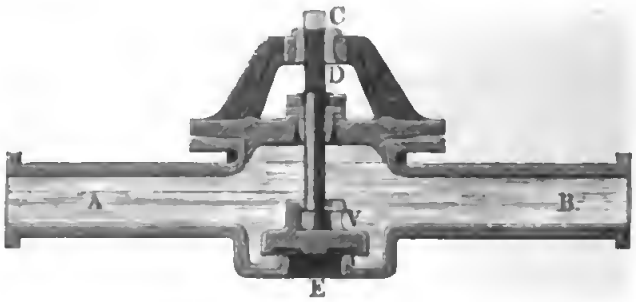
K mit gefülltem Querſchnitt. Es iſt alſo dann die Druckhöhe in der Ausmündung K nicht $\overline{GK} = h$, ſondern $\overline{HK} = h_2$ plus ε, oder nahe $= h_1 + h_2$, und daher das Gefälle $\overline{HL} = h_3$ zwiſchen E und F ganz verloren.

Sowie ſich an den höchſten Stellen einer Röhrenleitung Luft anſammelt, ebenſo ſetzt ſich an den tiefſten Punkten derſelben Schlamm, Sand u. ſ. w. nieder. Um dieſe Niederſchläge von Zeit zu Zeit zu entfernen, bringt man an dieſen Stellen Ausgußröhren oder Schlammkäſten (Wechſelhäuschen) an. Die Ausgußröhren münden ſeitwärts in die Röhre ein, und ſind für gewöhnlich durch Hähne oder Stöpſel verſchloſſen. Die Schlammkäſten ſind Gefäße, in welche die beiden Theile der Röhrenleitung einmünden, durch die alſo das Waſſer mit verminderter Geſchwindigkeit hindurchſtrömen muß. Das Abſetzen des Schmandes wird nicht allein durch die langſame Bewegung des Waſſers, ſondern wohl auch durch eingeſetzte Siebe oder Scheidewände erleichtert. Durch Oeffnen eines Spundes im Boden laſſen ſich dieſe Käſten von Zeit zu Zeit vom Bodenſatze reinigen. Ueberdies iſt es nöthig, in Diſtanzen von 100 oder mehr Fuß Spunde an der Röhrenleitung anzubringen, um das Unterſuchen und Reinigen der Röhren zu erleichtern. Das Reinigen erfolgt durch Auslaſſen des Waſſers, durch Einführen von Geſtängen aus Holz oder Eiſen, und das Ablöſen von Kalkkruſten durch Salzſäure und durch Einführen eines birnförmigen Eiſens, der ſogenannten Rohrbirne. Die Anwendung von Piezometern (ſ. Bd. I, §. 435) iſt ebenfalls zu empfehlen.

Zur Regulirung des Waſſers in Röhren ſind noch Hähne, Schieber oder Ventile nöthig. Ein einfaches Sperrventil iſt in Fig. 349 (a. f. S.) abgebildet. Dieſes Ventil V ſitzt an einem Schraubenbolzen CDV, und bedeckt eine Seitenöffnung E der Röhre AB. Wenn es darauf ankommt, das Waſſer durch E abzulaſſen, ſo wird CD durch einen Schlüſſel umgedreht, wobei ſich dann der Bolzen in Folge ſeiner ſchraubenförmigen Geſtalt

bei D und ſeiner Lagerung in der feſten Mutter CD hebt. Die Wirkungen dieſer Regulirungsapparate haben wir in Bd. I, §. 443 u. f. w. kennen gelernt. Um endlich noch die Wirkungen der Stöße beim ſchnellen Schließen einer ſolchen Vorrichtung zu ſchwächen, iſt es nützlich, durch Gewichte be-

Fig. 349.



ſchwerte Ventile anzubringen, die ſich nach außen öffnen, ſowie der Druck eine gewiſſe Grenze überſchreitet.

Anmerkung. Ausführlich über Waſſerleitungen wird gehandelt in Geniey's Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux, ſowie im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux etc. par Dupnit, Paris 1854 und in der Schrift: Les Fontaines publiques de la ville de Dijon, par Henry Darcy, Paris 1856, ferner über Röhrenleitungen insbeſondere in Hagen's Waſſerbaukunſt, Theil I, in Gerſtner's Mechanik, Theil II und in Eytelwein's Hydraulik. Auch in Bornemann's Hydrometrie, Freiberg 1849.

§. 166 **Bewegung des Waſſers in zuſammengeſetzten Röhren.** Die Bewegungsverhältniſſe des Waſſers in einer Röhrenleitung haben wir bereits kennen gelernt. Iſt h das Gefälle, l die Länge, d die Weite einer Leitung, ζ_0 der Widerſtandscoefficient beim Eintritt, ζ der Reibungscoefficient, ſind ferner ζ_1 u. ſ. w. die übrigen Widerſtandscoefficienten beim Durchgange durch Krümmungen, Hähne u. ſ. w. zuſammen genommen, und iſt endlich v die Ausflußgeſchwindigkeit, ſo hat man:

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1 + \cdots\right) \frac{v^2}{2g},$$

oder, wenn Q die Waſſermenge bezeichnet,

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1 + \cdots\right) \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2gd^4}.$$

Man ſieht hieraus, daß zum Fortführen einer gewiſſen Waſſermenge Q um ſo weniger Gefälle erfordert wird, je größer die Weite der Leitung iſt. Wendet man ſtatt einer Röhre deren zwei an, welche zuſammen ebenſo viel Querſchnitt haben als die einfache, und laſſen wir von jeder die halbe Waſſermenge der einfachen fortführen, ſo iſt das erforderliche Gefälle:

$$h_1 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d\sqrt{1/2}} + \zeta_1 + \cdots\right)\left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g\,(d\sqrt{1/2})^4}$$

$$= \left(1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l\sqrt{2}}{d} + \zeta_1 + \cdots\right)\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2gd^4},$$

alſo größer als im erſten Falle. Es iſt daher mechaniſch vollkommener ſtatt mehrerer Röhren nur eine anzuwenden, deren Querſchnitt ſo groß iſt als die Querſchnitte der einzelnen Röhren zuſammen.

Sehr zuſammengeſetzt fallen die Rechnungen für ganze Waſſerleitungsſyſteme aus, wo ſich die Röhrenleitungen in Zweige theilen, die ſich nach Befinden wieder weiter verzweigen u. ſ. w. Auch kommt es vor, daß ſich zwei oder mehrere Zweige einer Waſſerleitung vereinigen, wenn ſie z. B. das Waſſer von verſchiedenen Quellen auf eine Maſchine führen. Der Gang bei dieſen Rechnungen iſt wenigſtens im Allgemeinen aus Folgendem zu erſehen. Erfolgt die Theilung des Waſſers in einem Reſervoir, welches viel weiter als die Haupträhre iſt, ſo kommt das Waſſer in demſelben wieder zur Ruhe und es wird alſo hier die ganze lebendige Kraft deſſelben getödtet, die gleichwohl beim Eintritt in die Zweigröhren wieder nöthig iſt. Derſelbe Kraftverluſt tritt auch ein, wenn ſich mehrere Zweige in einem Sammelreſervoir vereinigen, aus dem das Waſſer wieder durch eine Haupträhre fortgeführt wird. In dieſem Falle läßt ſich die Rechnung für die Haupt- und für jede Zweigröhre beſonders machen, weshalb etwas Weiteres hierüber nicht zu ſagen iſt. Damit das Theilen oder Anſammeln des Waſſers in ſolchen Zwiſchenreſervoiren nur zu mäßigen Gefälleverluſten führe, iſt es nöthig, dieſe Behälter ſo hoch zu ſtellen, daß die Geſchwindigkeit des Waſſers in jeder der Röhren eine mittlere bleibe.

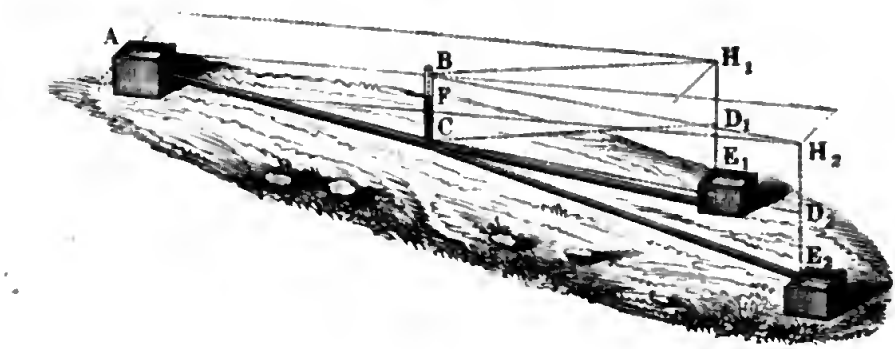
Bei der einfachen Verzweigung oder Gabelung iſt es mechaniſch vortheilhaft, die Anordnung ſo zu treffen, daß ſich das Waſſer in allen Röhren mit einerlei Geſchwindigkeit bewege. Wenn nun noch die Gabelung im richtigen Verhältniſſe gekrümmt iſt, ſo daß eine plötzliche Richtungsänderung bei dem Uebertritte des Waſſers aus der Haupträhre in eine Zweigröhre nicht vorkommt, ſo läßt ſich annehmen, daß hierbei ein namhafter Verluſt an Druck oder lebendigem Gefälle nicht ſtattfinde.

In dem in Fig. 350 (a. f. S.) abgebildeten Falle ſei h das Gefälle $\overline{BC} = H_1 D_1 = H_2 D_2$, l die Länge und d die Weite der Haupträhre AC, ferner h_1 das Gefälle $\overline{D_1 E_1}$, l_1 die Länge und d_1 die Weite der einen, ſowie h_2 das Gefälle $\overline{D_2 E_2}$, l_2 die Länge und d_2 die Weite der anderen Zweigröhre, ferner ſeien c, c_1, c_2 die Geſchwindigkeiten des Waſſers in dieſen drei Röhren, und endlich ſei ζ_0 der Widerſtandscoefficient für den Eintritt, ſowie ζ der Reibungscoefficient des Waſſers.

Bezeichnet nun noch z den Piezometerſtand oder die Druckhöhe $\overline{CF}$ am Ende des Hauptſtranges, ſo läßt ſich ſetzen:

$$\text{I.}\quad \overline{BF} = \overline{CB} - \overline{CF} = h - z = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g},$$

Fig. 350.



ferner:

$$\text{II.}\quad \overline{CF} + \overline{D_1 E_1} = z + h_1 = \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} + \zeta \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{c_1^2}{2g},$$

$$\text{III.}\quad \overline{CF} + \overline{D_2 E_2} = z + h_2 = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} + \zeta \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{c_2^2}{2g}.$$

Da die Waſſermenge

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c$$

der Haupträhre gleich iſt der Summe der Waſſermengen

$$Q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} c_1 \text{ und } Q_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} c_2$$

der beiden Zweigröhren, ſo gilt noch folgende Gleichung:

$$\text{IV.}\quad d^2 c = d_1^2 c_1 + d_2^2 c_2.$$

Mit Hülfe dieſer vier Gleichungen laſſen ſich natürlich auch vier Größen berechnen. In den gewöhnlichen Fällen ſind die Gefälle, Röhrenlängen und Waſſermengen gegeben und es wird nach den erforderlichen Röhrenweiten u. ſ. w. gefragt. Nehmen wir die Geſchwindigkeit c des Waſſers in der Haupträhre als gegeben an, ſo können wir zunächſt die Weite dieſer Röhre mittels der Formel:

$$1)\quad d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi c}} = 1{,}1284 \sqrt{\frac{Q}{c}}$$

berechnen, und hiernach wieder, mit Hülfe von I. die Piezometerhöhe an dem Theilungspunkte C:

$$2)\quad z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g}$$

bestimmen.

Setzt man diesen Werth für z in die Gleichungen II. und III., so erhält man, nach gehöriger Umformung, folgende Bestimmungsgleichungen für die Weiten d_1 und d_2 der Zweigröhren:

$$3)\quad d_1 = \sqrt[5]{\frac{\zeta l_1 + d_1}{2g\,(z + h_1) + c^2} \left(\frac{4\,Q_1}{\pi}\right)^2}$$

und

$$4)\quad d_2 = \sqrt[5]{\frac{\zeta l_2 + d_2}{2g\,(z + h_2) + c^2} \left(\frac{4\,Q_2}{\pi}\right)^2}.$$

Um die ersten Näherungswerthe zu erhalten, können wir anfangs d_1 und d_2 unter dem Wurzelzeichen vernachlässigen. Fallen c_1 und c_2 sehr verschieden von c aus, so hat man noch auf die Veränderlichkeit des Reibungscoefficienten ζ Rücksicht zu nehmen, demselben also für jede der drei Röhren besondere Werthe beizulegen und hiermit die Bestimmung von d_1 und d_2 zu wiederholen.

Beispiel. Eine Röhrenfahrt, welche aus einer Haupt- und zwei Zweigröhren bestehen soll, ist dazu bestimmt, in einem Zweige 15 und im anderen 21 Cubikfuß Wasser pr. Minute fortzuleiten, und es hat sich durch ein Nivellement ergeben, daß die Hauptröhre bei 1000 Fuß Länge, 4 Fuß, die erste Zweigrohre bei 600 Fuß Länge, 3 Fuß und die andere Zweigröhre bei 200 Fuß Länge, 1 Fuß Gefälle erhalten kann; welche Weiten muß man einzelnen Röhren geben? Wenn wir dem Wasser in der Hauptröhre $2^1/_2$ Fuß Geschwindigkeit ertheilen wollen, so müssen wir dieser Röhre die Weite:

$$d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi\,c}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 39}{5/_2 \cdot 60\,\pi}} = \sqrt{\frac{26}{25\,\pi}} = 0{,}5754 \text{ Fuß} = 6{,}9 \text{ Zoll}$$

geben. Nehmen wir nun (nach Band I, Seite 821) den Widerstandscoefficienten für den Eintritt, $\zeta_0 = 0{,}505$, und den Reibungscoefficienten (nach Band I, Seite 835), der Geschwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}0253$ an, ferner $2g = 62{,}5$ und $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}621$, so erhalten wir für den Piezometerstand an dem Theilungspunkte:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g} = 4 - \left(1 + 0{,}505 + 0{,}0253 \cdot \frac{12000}{6{,}9}\right) \frac{6{,}25}{62{,}5}$$

$$= 4 - (1{,}505 + 44) \cdot {}^1/_{10} = 4 - 4{,}5505 = -0{,}5505 \text{ Fuß.} \quad \text{(Nicht gut.)}$$

Nimmt man vorläufig auch für die Zweigröhre $\zeta = 0{,}0253$ an, und vernachlässigt man anfangs die Glieder d_1 und d_2 auf der rechten Seite, so erhält man:

$$z + h_1 = -0{,}5505 + 3 = 2{,}4495,$$

$$z + h_2 = -0{,}5505 + 1 = 0{,}4495,$$

$$\left(\frac{4\,Q_1}{\pi}\right)^2 = 1{,}621 \cdot \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \frac{1{,}621}{16} = 0{,}10131$$

und

$$\left(\frac{4\,Q_2}{\pi}\right)^2 = 1{,}621 \cdot \left(\frac{24}{60}\right)^2 = 1{,}621\,.\,(0{,}4)^2 = 0{,}25936,$$

ſowie

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0253\,.\,600\,.\,0{,}10131}{62{,}5\,.\,2{,}4495 + 6{,}25}} = \sqrt[5]{\frac{15{,}18\,.\,0{,}10131}{159{,}34}} = 0{,}395 \text{ Fuß}$$

und

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0253\,.\,200\,.\,0{,}25936}{62{,}5\,.\,0{,}4495 + 6{,}25}} = \sqrt[5]{\frac{5{,}06\,.\,0{,}25936}{34{,}34}} = 0{,}520 \text{ Fuß}.$$

Dieſen Durchmeſſern entſprechen die Geſchwindigkeiten:

$$c_1 = \frac{4\,Q}{\pi\,d_1^2} = \frac{4\,.\,15}{60\,\pi\,(0{,}395)^2} = 2{,}04 \text{ Fuß}$$

und

$$c_2 = \frac{4\,Q}{\pi\,d_2^2} = \frac{4\,.\,24}{60\,\pi\,(0{,}520)^2} = 1{,}88 \text{ Fuß},$$

welchen (wieder nach Band I, Seite 835) die Widerſtandscoefficienten

$$\zeta = 0{,}0262 \text{ und } \zeta = 0{,}0268$$

angehören.

Es iſt hiernach ſchärfer die Weite der erſten Zweigröhre:

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0262\,.\,600 + 0{,}395}{159{,}34} \cdot 0{,}10131} = 0{,}400 \text{ Fuß} = 4{,}8 \text{ Zoll},$$

und die der zweiten Zweigröhre:

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0268\,.\,200 + 0{,}520}{34{,}34} \cdot 0{,}25963} = 0{,}537 \text{ Fuß} = 6{,}44 \text{ Zoll}.$$

§. 167 **Zuſammengeſetzte Leitungsröhren.** Wenn die Theilung der Hauptröhre in zwei Röhren in einem beſonderen Behälter erfolgt, worin das Waſſer eine freie Oberfläche annimmt, ſo gehen die obigen Gleichungen unter I., II. und III. in folgende über:

$$\text{I.}\quad h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\frac{c^2}{2\,g},$$

$$\text{II.}\quad h_1 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l_1}{d_1}\right)\frac{c_1^2}{2\,g}$$

und

$$\text{III.}\quad h_2 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\right)\frac{c_2^2}{2\,g},$$

wobei h den ſenkrechten Abſtand des Waſſerſpiegels A im oberen Reſervoir über dem im mittleren bezeichnet, und h_1 ſowie h_2 von dem letzteren Waſſerſpiegel entweder bis zum Waſſerſpiegel E_1 im unteren Gefäße oder bis zur Mündungsmitte E_2 der Zweigröhre CE_2 gemeſſen wird, je nachdem das Waſſer unter Waſſer oder frei ausfließt.

Giebt man auch hier c, oder $d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi\,c}}$, ſo kann man mittels der erſten Gleichung zuerſt den Niveauabſtand h berechnen, und zieht man den-

ſelben von dem ganzen Gefälle zwiſchen A und E_1, ſowie zwiſchen A und E_2 ab, ſo erhält man die Gefälle h_1 und h_2 der Zweigröhren CE_1 und CE_2, deren Durchmeſſer d_1 und d_2 ſich dann durch die Formeln

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{(1 + \xi_0)\, d_1 + \xi\, l_1}{2\, g\, h_1} \cdot \left(\frac{4\, Q_1}{\pi}\right)^2}$$

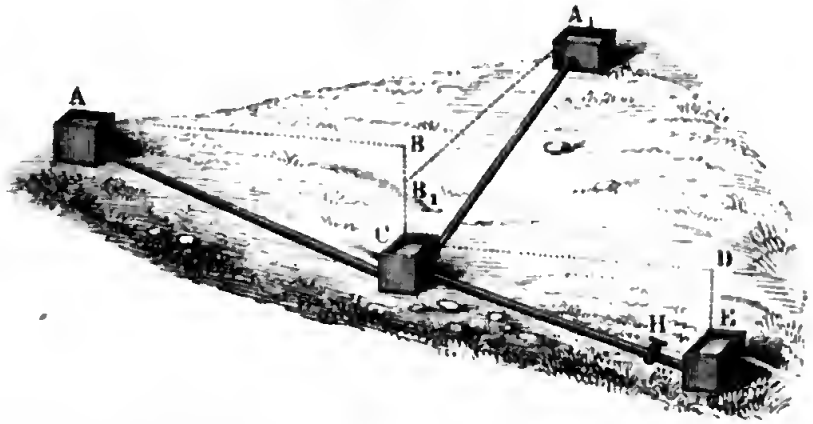
und

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{(1 + \xi_0)\, d_2 + \xi\, l_2}{2\, g\, h_2} \cdot \left(\frac{4\, Q_2}{\pi}\right)^2}$$

berechnen laſſen.

Vorſtehende Formeln finden auch dann ihre Anwendung, wenn, wie Fig. 351

Fig. 351.



darſtellt, ſich zwei Röhrenſtränge AC und A_1C in einem Reſervoir C vereinigen und das von beiden gelieferte Waſſer in einem Hauptſtrange CE weiter fortgeführt wird. Es bezeichnen dann h das Gefälle (DE), l die Länge, d die Weite u. ſ. w. der Hauptröhre CE, ferner h_1 das Gefälle $\overline{BC}$, l_1 die Länge, d_1 die Weite u. ſ. w. der einen Zweigröhre AC, ſowie h_2 das Gefälle $\overline{B_1C}$, l_2 die Länge, d_2 die Weite u. ſ. w. der anderen Zweigröhre A_1C. Auch finden bei einer ſolchen Confluenz die Formeln des vorigen Paragraphen ihre Anwendung, wenn ſtatt des Samulers C eine einfache Gabelröhre angebracht iſt, wie in Fig. 350.

Kommen in der Leitung noch Kröpfe oder Knieſtücke vor, ſo muß natürlich der Widerſtand, welchen das Waſſer beim Durchgange durch dieſelben zu überwinden hat, in Betracht gezogen werden, und ebenſo iſt es, wenn Regulirungsapparate, z. B. Stellhähne wie H, in der Röhrenleitung angebracht ſind. Iſt ξ_2 der Widerſtandscoefficient für eine gewiſſe Stellung eines ſolchen Apparates (ſ. Band I, §. 443), ſo hat man in demjenigen der obigen Ausdrücke, welcher der Leitröhre entſpricht, worin dieſer Apparat vorkommt, den Widerſtandscoefficienten ξ_0 für den Eintritt in die Röhre noch um ξ_2 zu vergrößern, alſo ſtatt ξ_0, $\xi_0 + \xi_2$

zu ſetzen, um dem obigen Ausdrucke auch in dieſem Falle Gültigkeit zu verſchaffen.

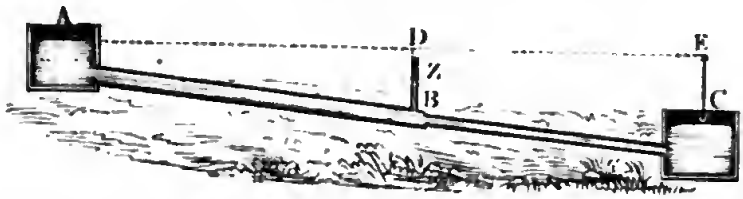
Kommt in einer Leitungsröhre eine kantige Querſchnittsveränderung vor, welche eine plötzliche Geſchwindigkeitsveränderung des Waſſers zur Folge hat, ſo tritt noch ein Widerſtand hinzu, welcher durch die Druckhöhe

$$h_1 = \frac{(c_1 - c)^2}{2g}$$

gemeſſen wird, wenn c_1 und c die beiden Geſchwindigkeiten des Waſſers bezeichnen.

Wenn ein Röhrenſtrang ABC, Fig. 352, aus einem weiteren und einem

Fig. 352.



engeren Röhrenſtück zuſammengeſetzt iſt, ſo fällt natürlich auch der Widerſtand in demſelben anders aus, als wenn derſelbe an allen Stellen eine und dieſelbe Weite hat.

Iſt l die Länge, d die Weite und h die Druckhöhe der unteren Röhre BC, ſowie c die Geſchwindigkeit des Waſſers in derſelben, ferner l_1 die Länge, d_1 die Weite und h_1 die Druckhöhe der oberen Röhre AB, ſowie c_1 die Geſchwindigkeit des Waſſers in derſelben, und bezeichnet h das ganze Gefälle CE, ſowie z den Piezometerſtand BZ an der Stelle B, wo die Querſchnittsveränderung eintritt, ſo hat man:

$$h_1 - z = \left(1 + \zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{c_1^2}{2g}$$

ſowie

$$z + h - h_1 = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{(c - c_1)^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g},$$

und es folgt durch Addition:

$$h = \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c^2}{2g} + \frac{(c - c_1)^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Da $\frac{c_1}{c} = \frac{d^2}{d_1^2}$ iſt, ſo läßt ſich

$$c_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 c$$

einführen, und wenn man nun nach Band I, §. 436 u. ſ. w.

$$\frac{(c - c_1)^2}{2g} = \left(1 - \frac{c_1}{c}\right)^2 \frac{c^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^2\right]^2 \frac{c^2}{2g} = \zeta_2 \frac{c^2}{2g}$$

ſetzt, ſo erhält man folgende Beſtimmungsgleichung:

$$2gh = \left[1 + \zeta_2 + \zeta\frac{l}{d} + \left(\zeta_0 + \zeta_1\frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]c^2.$$

Iſt das ganze Gefälle gegeben, ſo erhält man hiernach die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_2 + \zeta\frac{l}{d} + \left(\zeta_0 + \zeta_1\frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4}},$$

woraus ſich dann das Waſſerquantum

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}c$$

berechnen läßt.

Giebt man das letztere, ſo hat man hingegen für die erforderliche Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{\zeta l + (1 + \zeta_2)\,d}{2gh\left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 - \left(\zeta_0 + \zeta_1\frac{l_1}{d_1}\right)\frac{1}{d_1^4}}}.$$

Beiſpiel. Wenn die Waſſerleitung in Fig. 352 aus einer Röhre BC von 200 Fuß Länge und 3 Zoll Weite und aus einer Röhre AB von 300 Fuß Länge und 5 Zoll Weite beſteht, und das Totalgefälle derſelben 5 Fuß beträgt, ſo kann man, da ſich $\zeta_0 = 0{,}505$ und $\zeta_2 = \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^2\right]^2 = (1 - 0{,}36)^2 = 0{,}410$, ſowie vorläufig $\zeta = 0{,}024$ und $\zeta_1 = 0{,}030$ annehmen läßt, die Geſchwindigkeit des Waſſers in der engeren Röhre:

$$c = \sqrt{\frac{62{,}5\,.\,5}{1{,}410 + 0{,}024\,.\,800 + (0{,}505 + 0{,}03\,.\,300\,.\,{}^{12}/_5)\,({}^3/_5)^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{312{,}5}{23{,}475}} = 3{,}65 \text{ Fuß},$$

und folglich die in der weiteren Röhre

$$c_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 c = 0{,}36\,.\,c = 1{,}314 \text{ Fuß}$$

ſetzen.

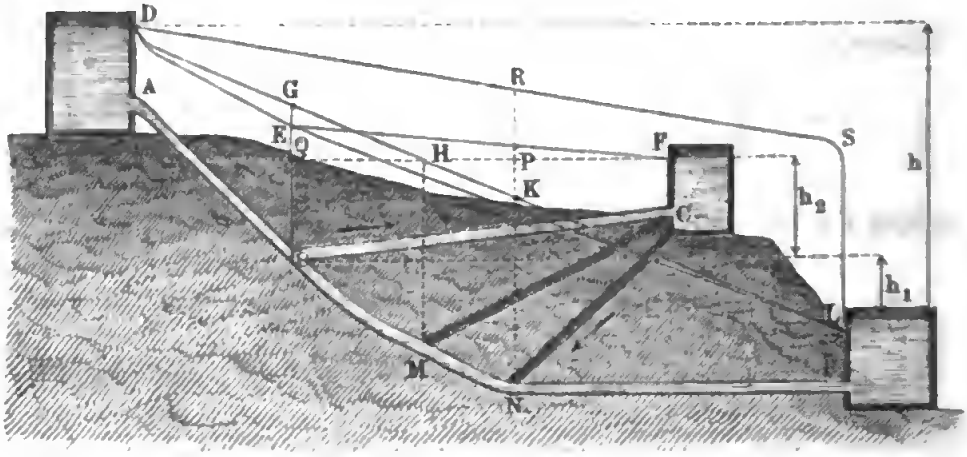
Nimmt man hiernach $\zeta = 0{,}0233$ und $\zeta_1 = 0{,}0291$ an, ſo folgt genauer die Geſchwindigkeit $c = 3{,}70$ Fuß, und das entſprechende Waſſerquantum pr. Sec.:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\,c = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3{,}70}{16} = 0{,}1816 \text{ Cubikfuß}.$$

Drucklinie einer Röhrenleitung. Die durch die Piezometerſtände einer Röhrenleitung AMB, Fig. 353 (a. f. S.), gehende Druckline $DGHKL$ giebt eine vollſtändige Ueberſicht über den Druck des Waſſers an jeder Stelle der Leitung. Z. B. in O wird der Druck §. 168

des Waſſers durch den Piezometerſtand OG, in M durch den Piezometerſtand MH gemeſſen u. ſ. w. Bei Röhrenleitungen mit Querſchnitts-

Fig. 353.



und Richtungsänderungen iſt die Drucklinie gekrümmt; ſie zieht ſich z. B. an den Stellen, wo die Röhre eng iſt, und folglich das Waſſer ſchnell fließt, nach unten, dagegen an den Stellen, wo dieſelbe einen größeren Querſchnitt hat, folglich das Waſſer langſam fließt, nach oben. Wenn die Röhrenleitung AMB, welche zwei Behälter A und B in Verbindung ſetzt, durch eine zweite Röhre mit einem dritten Behälter C communicirt, ſo entſteht zunächſt die Frage, ob das Waſſer aus C nach AB, oder ob es aus AB nach C fließt. Schneidet die Ebene des Waſſerſpiegels in C die Drucklinie $DGHKL$ in H, ſo iſt jedenfalls die ſenkrecht unter H liegende Stelle M der Röhre AMB diejenige, wo eine von C nach AB führende Seitenröhre CM in AMB einmünden kann, ohne daß Waſſer aus C heraus oder in C hineinſtrömt. Legt man die Einmündung nach dem Punkt N, deſſen Tiefe NP unter dem Waſſerſpiegel in C größer iſt als der Piezometerſtand NK, ſo fließt Waſſer aus C nach N und von da weiter nach B; läßt man dagegen die Communicationsröhre im Punkte O einmünden, deſſen Tiefe OQ unter dem Waſſerſpiegel in C kleiner iſt als der Piezometerſtand OG, ſo fließt das Waſſer aus A nicht allein nach B, ſondern zum Theil nach C; es ſind alſo dann beide Behälter B und C Sammelbehälter, wogegen im erſten Falle nur B ein ſolcher iſt.

Bezeichnen wieder, wie in §. 166, l, l_1 und l_2 die Längen; ſowie d, d_1 und d_2 die Weiten und h, h_1 und h_2 die Gefälle der Leitungsſtücke AO, OB und OC, ſetzen wir ferner den Piezometerſtand im Knotenpunkt O, $= z$, und berückſichtigen wir nur die Reibungswiderſtände der Röhren, ſo hat man einfach

$$h - z = \zeta \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g}$$

$$z + h_1 = \zeta \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

$$z - h_2 = \zeta \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{c_2^2}{2g},$$

oder, wenn man die Wassermengen $Q = \frac{\pi d^2}{4} c$, $Q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} c_1$ und $Q_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} c_2$ einführt, und zur Vereinfachung $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\zeta}{2g} = \psi$ setzt,

$$h - z = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\zeta}{2g} \frac{l Q^2}{d^5} = \frac{\psi l Q^2}{d^5},$$

$$z + h_1 = \frac{\psi l_1 Q_1^2}{d_1^5} \text{ und } z - h_2 = \frac{\psi l_2 Q_2^2}{d_2^5}.$$

Nun ist aber $Q = Q_1 + Q_2$, daher folgt

$$\sqrt{\frac{(h - z)\, d^5}{l}} = \sqrt{\frac{(z + h_1)\, d_1^5}{l_1}} + \sqrt{\frac{(z - h_2)\, d_2^5}{l_2}},$$

oder, wenn die Röhrenleitung überall gleich weit ist,

$$\sqrt{\frac{h - z}{l}} = \sqrt{\frac{z + h_1}{l_1}} + \sqrt{\frac{z - h_2}{l_2}}.$$

Es ist folglich im letzteren Falle der Piezometerstand z im Knotenpunkt O weder von der Röhrenweite d noch vom Wasserquantum Q abhängig.

Wäre das Reservoir C von der Röhrenleitung AB abgesperrt, so würde das Abflußquantum nach C

$Q_0 = \sqrt{\frac{(h + h_1)\, d^5}{\psi\,(l + l_1)}}$ betragen, und es wäre

$Q_0^2\,(l + l_1) = Q^2 l + Q_1^2 l_1 = (Q_1 + Q_2)^2 l + Q_1^2 l_1$, daher

$$Q_1^2 + \frac{2 Q_2 l}{l + l_1} Q_1 = Q_0^2 - \frac{Q_2^2 l}{l + l_1}.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt die Wassermenge, welche durch OB in den Behälter B geführt wird.

$$Q_1 = -\frac{Q_2 l}{l + l_1} + \sqrt{Q_0^2 - Q_2^2 \frac{l l_1}{(l + l_1)^2}}, \text{ oder annähernd,}$$

wenn Q_2 nicht groß ist gegen Q_0,

1) $Q_1 = Q_0 - \frac{l}{l + l_1} Q_2$, und

2) $Q = Q_1 + Q_2 = Q_0 + \frac{l_1}{l + l_1} Q_2$.

Durch das Hinzutreten der Röhre OC geht die Drucklinie $DGHIKL$ in DEL über und kommt die Drucklinie EF hinzu; jedenfalls iſt dann der Piezometerſtand in O, $\overline{OE} > \overline{OQ} < \overline{OG}$, ſowie die Druckhöhendifferenz von $\overline{AO}$ kleiner als $h - h_2$, dagegen die Druckhöhendifferenz von $\overline{OB}$ größer als $h_1 + h_2$.

Es läßt ſich daher auch ſetzen:

$$Q < \sqrt{\frac{(h - h_2)\, d^5}{\psi\, l}} \text{ und}$$

$$Q_1 > \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\, d^5}{\psi\, l_1}}, \text{ ſowie}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 < \sqrt{\frac{(h - h_2)\, d^5}{\psi\, l}} - \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\, d^5}{\psi\, l_1}}.$$

Nehmen wir nun vorläufig

$$Q_2 = \sqrt{\frac{(h - h_2)\, d^5}{\psi\, l}} - \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\, d^5}{\psi\, l_1}} \text{ an,}$$

ſo können wir mittels der obigen Formeln 1) und 2) annähernd auch Q und Q_1 berechnen, woraus dann genauer $Q_2 = Q - Q_1$ folgt. Durch wiederholte Anwendung der gedachten Formeln kann man ſo Q, Q_1 und folglich auch Q_2 immer genauer und genauer beſtimmen.

Wenn man bei B durch Stellung eines Hahnes oder anderen Regulators den Druck in der Röhre AMB vergrößert, ſo daß die Drucklinie in $DRSL$ übergeht, ſo ſteigt der Piezometerſtand NR im Knotenpunkte N über den Waſſerſpiegel von C, und es fließt dann durch die Röhre NC ebenfalls Waſſer aus A nach C. Um nach Bedürfniß mehr oder weniger Waſſer nach B zu leiten, bedarf es daher nur einer größeren oder kleineren Eröffnung des Regulators bei B.

Viertes Capitel.

Von den verticalen Waſſerrädern.

§. 169 **Waſſerkraft.** Das Waſſer wirkt als Motor oder ſetzt Maſchinen in Bewegung, entweder durch ſein Gewicht oder durch ſeine Trägheit (lebendige Kraft). Bei der Wirkung durch ſein Gewicht ſinkt das Waſſer allmälig und langſam in der Maſchine von einer gewiſſen Höhe, dem ſogenannten

Gefälle (franz. chute; engl. fall) herab, wogegen es bei der Wirkung durch seine lebendige Kraft mit allmälig abnehmender Geschwindigkeit an Flächen oder in Canälen hinläuft, welche mit den umlaufenden Maschinen ein Ganzes ausmachen.

Ist Q das Wasserquantum (also $Q\gamma$ das Gewicht desselben), welches pr. Secunde zur Wirkung kommt, und h das Gefälle oder die senkrechte Höhe, von welcher dasselbe bei der Wirkung durch sein Gewicht herabsinkt, so verrichtet das Rad die mechanische Arbeit oder Leistung

$$L = Q\gamma . h = Qh\gamma.$$

Ist hingegen c die Geschwindigkeit, mit welcher es der Maschine zufließt, so hat man die Leistung, welche es durch seine lebendige Kraft verrichten kann:

$$L = Q\gamma \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} Q\gamma.$$

Damit das Wasser aus der Ruhe in die Geschwindigkeit c versetzt werde, erfordert es ein Gefälle oder eine Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; und man kann daher auch im zweiten Falle:

$$L = Qh\gamma$$

setzen. Es ist also stets das Arbeitsvermögen des Wassers, sowie das eines starren Körpers, ein Product aus seinem Gewicht und aus der Höhe, von welcher es herabsinkt.

Zuweilen wirkt das Wasser durch sein Gewicht und durch seine lebendige Kraft zugleich, indem es während seiner Wirkung von der Höhe h herabsinkt und seine Geschwindigkeit c zusetzt. Dann ist natürlich auch die mechanische Arbeit desselben:

$$L = Q\gamma . h + Q\gamma \cdot \frac{c^2}{2g} = \left(h + \frac{c^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Die effective Leistung Pv einer hydraulischen Maschine ist allerdings stets kleiner als die eben angegebene disponible mechanische Arbeit $Qh\gamma$, weil noch manche Verluste vorkommen. Erstens kommt oft nicht alles Wasser zur Wirkung, zweitens geht in der Regel ein Theil von dem Gefälle verloren; drittens hält das Wasser, indem es die Maschine verläßt, noch eine gewisse lebendige Kraft zurück, und viertens treten noch andere Nebenhindernisse, wie Reibung u. s. w., hinzu. Es ist hiernach der Wirkungsgrad einer hydraulischen Umtriebsmaschine:

$$\eta = \frac{Pv}{Qh\gamma}$$

zu setzen, und nun die Güte oder Zweckmäßigkeit einer solchen Maschine um so größer, je mehr sich diese Verhältnißzahl der Einheit nähert.

Aus der allgemeinen Formel $L = Qh\gamma$ ist übrigens zu ersehen, daß

Gefälle und Waſſerquantum gleichen Antheil an der Leiſtung einer Maſchine haben, daß z. B. das doppelte Gefälle ebenſo gut die Leiſtung verdoppelt als das zweifache Waſſerquantum, auch daß von zwei Maſchinen einerlei Wirkung zu erwarten iſt, wovon die eine dreimal ſo viel Aufſchlagewaſſer hat als die andere, welche wieder dreimal ſo viel Gefälle benutzt als dieſe.

Beiſpiel. Einer Maſchine ſtehen 12 Cubikfuß Waſſer pr. Secunde und 10 Fuß Gefälle zu Gebote, ſie benutzt aber von demſelben nur 8,5 Fuß, und das Waſſer verläßt dieſelbe mit 9 Fuß Geſchwindigkeit, endlich verliert dieſelbe noch 750 Fußpfund durch die Reibung. Man ſoll den Wirkungsgrad dieſer Maſchine angeben. Es iſt die disponible Leiſtung

$$L = 12 . 10 . 61{,}75 = 7410 \text{ Fußpfund},$$

ferner die Leiſtung, welche dem benutzten Gefälle entſpricht,

$$= 12 . 8{,}5 . 61{,}75 = 6298{,}5 \text{ Fußpfund},$$

die durch die lebendige Kraft des fortfließenden Waſſers verlorene Arbeit

$$= 0{,}016 . 9^2 . 12 . 61{,}75 = 960{,}2 \text{ Fußpfund},$$

die durch die Reibung conſumirte Arbeit war aber

$$= 750 \text{ Fußpfund};$$

es iſt daher die effective Leiſtung dieſer Maſchine:

$$Pv = 6298{,}5 - (960{,}2 + 750) = 6298{,}5 - 1710{,}2 = 4588{,}3 \text{ Fußpfund},$$

und der Wirkungsgrad derſelben

$$\eta = \frac{4588{,}3}{7410} = 0{,}619.$$

§. 170 **Waſſerräder.** Die hydrauliſchen Umtriebsmaſchinen ſind entweder Radmaſchinen (Waſſerräder) oder Kolbenmaſchinen (Waſſerſäulenmaſchinen). Die Waſſerräder (franz. roues hydrauliques; engl. water-wheels) ſind durch Waſſerkraft in Bewegung geſetzte Radwellen (ſ. Band I, §. 165). Die Waſſerſäulenmaſchinen (franz. machines à colonne d'eau; engl. pressure-engines) beſtehen im Weſentlichen in einer Waſſerſäule (mit Waſſer angefüllten Röhre) und in einem Kolben, welcher durch den Druck der Waſſerſäule gegen ſeine Grundfläche in Bewegung geſetzt wird.

Man unterſcheidet verticale Waſſerräder (franz. roues hydrauliques verticales; engl. vertical water-wheels), d. h. ſolche mit horizontaler Axe, von den horizontalen Waſſerrädern (franz. roues hydrauliques horizontales; engl. horizontal water-wheels), oder den Waſſerrädern mit verticaler Axe.

Die verticalen Waſſerräder, von denen zunächſt die Rede iſt, ſind entweder oberſchlägige (franz. roues en dessus; engl. overshot water-wheels), oder mittelſchlägige (franz. roues de côté; engl. middleshot water-wheels), oder unterſchlägige Waſſerräder (franz. roues en dessous; engl. undershot water-wheels). Bei den Rädern der erſteren Art trifft das Waſſer die höheren Punkte des Rades, bei denen der zweiten Art fällt es in der Nähe des Radmittels ein, und bei den unterſchlägigen

Rädern kommt das Waſſer nahe am Fuße bei dem Rade an. Noch unterſcheidet man rückenſchlägige Waſſerräder, bei welchen das Waſſer zwiſchen dem Scheitel und dem Mittel des Rades einfällt, und welche daher zwiſchen den ober- und mittelſchlägigen Rädern inneſtehen. Bei den oberſchlägigen Waſſerrädern wirkt das Waſſer vorzüglich durch ſein Gewicht, bei den unterſchlägigen Rädern aber in der Regel durch ſeine, der Trägheit entſprechende lebendige Kraft, und bei den mittelſchlägigen Rädern wirkt es meiſt durch Gewicht und Trägheit zugleich. Die unterſchlägigen Waſſerräder hängen entweder frei im unbegrenzten Waſſer, oder ſie ſind von Gerinnen eingeſchloſſen. Zu den im unbegrenzten Waſſer hängenden Rädern gehören die Schiffmühlenräder (franz. roues pendantes; engl. ship-mills wheels). Die übrigen unterſchlägigen Waſſerräder hängen entweder im geraden Gerinne (franz. coursier rectiligne; engl. strait channel) oder in einem (kreisförmigen) Kropfgerinne (franz. coursier circulaire; engl. circular channel breast-trough).

Uebrigens gibt es auch mittelſchlägige Räder im Kropfgerinne, und dieſe heißen dann gewöhnlich Kropfräder (franz. roues de côté; engl. breast wheels).

Endlich ſind noch von den übrigen Waſſerrädern die Ponceleträder zu unterſcheiden, bei welchen das Waſſer nur durch ſeine lebendige Kraft wirkt, indem es an krummen Flächen auf- und hinabſteigt.

Zellenräder. Ein gewöhnliches verticales Waſſerrad beſteht aus einer §. 171
hölzernen oder eiſernen Welle mit zwei Zapfen, ferner aus zwei (ſeltener ein, drei oder mehreren) ringförmigen Kränzen, und aus mehr oder weniger radiallaufenden Armen, welche die Kränze mit der Welle verbinden, ferner aus den Schaufeln zwiſchen den Kränzen und endlich, nach Befinden noch, aus einem Boden, der ſich an die inneren Kranzumfänge cylindriſch anſchließt. Die Schaufeln theilen den von den Kränzen und dem Boden gebildeten ringförmigen Raum in Abtheilungen, und wenn die Schaufeln mehr tangential als radial geſtellt ſind, ſo bilden dieſe Abtheilungen waſſerhaltende Tröge oder ſogenannte Zellen. Hiernach hat man auch in Hinſicht auf Conſtruction zweierlei Waſſerräder, nämlich Schaufelräder (franz. roues à aubes; engl. wheels with floats) mit mehr radial geſtellten Schaufeln, und Zellenräder (franz. roues à augets; engl. wheels with buckets) mit trogförmigen Zellen. Die letzteren kommen in allen den Fällen vor, wenn das Waſſer durch ſein Gewicht wirkt, alſo bei den ober-, rücken-, und nach Befinden, mittelſchlägigen Waſſerrädern.

Zunächſt iſt die Rede von den oberſchlägigen Waſſerrädern. Das Waſſer wird dem Rade durch ein Gerinne zugeführt, und ſein Ausfluß durch eine Schütze am Ende des letzteren regulirt; es fällt hier in der Nähe des Radſcheitels, nämlich in der erſten, zweiten oder dritten Zelle, vom Scheitel ausgegangen,

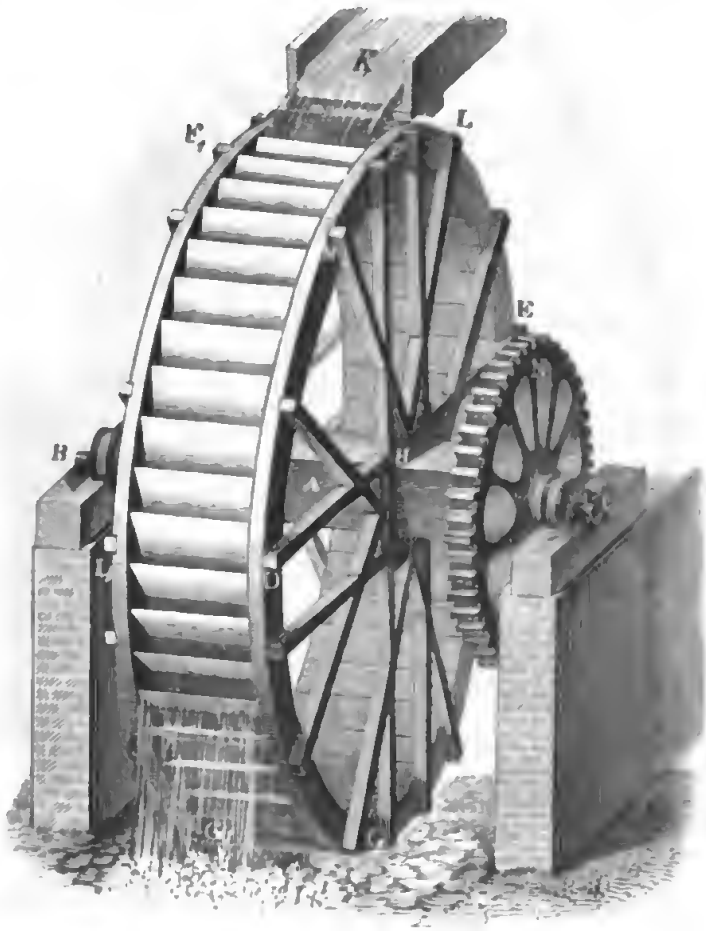
ein. Iſt nun das Rad einmal in Umdrehung geſetzt, ſo füllen ſich alle unter der Schützenmündung vorbeigehende Zellen zum Theil mit Waſſer, welches erſt in der Nähe des Radfußes wieder aus den Zellen heraustritt, ſo daß immer auf der einen Seite des Rades eine gewiſſe Anzahl von Zellen mit Waſſer gefüllt iſt, das nun durch ſein Gewicht die ſtete Umdrehung des Rades im Kreiſe unterhält. Die oberſchlägigen Räder kommen bei 8 bis 50 Fuß Gefälle und 3 bis 25 Cubikfuß Aufſchlagewaſſer pr. Secunde vor. Dem kleinſten Gefälle und kleinſten Waſſerquantum entſpricht die kleinſte Leiſtung von 3 bis 5 Pferdekräften, dem größten Gefälle und größten Aufſchlage aber die größte Leiſtung von 130 Pferdekräften; im letzteren Falle iſt es jedoch zweckmäßiger, zwei Räder anzuwenden, weil Waſſerräder über 80 Pferdekraft zu ſchwerfällig ausfallen.

Das Gefälle eines Waſſerrades iſt vom Waſſerſpiegel im Aufſchlaggerinne, oder vor der Schütze, bis zur Oberfläche des Unterwaſſers zu nehmen, deſſen Höhe von dem Waſſerquantum, der Breite und dem Gefälle des Abzugsgrabens abhängt. Um an Wirkung ſo wenig wie möglich zu verlieren, ſoll das Radtiefſte unmittelbar über dem Unterwaſſerſpiegel ſtehen, weshalb denn auch das Gefälle von der Oberfläche des Oberwaſſers bis zum Radtiefſten gemeſſen wird. Nur dann, wenn der Rückſtau und das Waten des Rades zu befürchten iſt, hängt man das Rad etwas höher, ſo daß ſein Tiefſtes noch $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuß von dem Unterwaſſer abſteht oder, wie man ſagt, freihängt.

§. 172 **Radconſtructionen.** Man baut die Waſſerräder aus Holz, oder aus Eiſen, oder theils aus Holz, theils aus Eiſen. Die Art und Weiſe, wie die Radarme mit der Welle verbunden ſind, iſt ſehr verſchieden. Bei den ganz hölzernen Rädern hat man gewöhnlich ſogenannte Armgeviere, welche die zu dieſem Zwecke vierkantig gearbeitete Welle umfaſſen; ſeltener ſind die Arme durch die zu dieſem Zwecke durchlochte Welle hindurchgeſteckt. Die erſte Art von Rädern nennt man Satteläder, die zweite Art Sternräder. Letztere Conſtruction kommt nur bei leichten oder ſchwachen Rädern vor. Bei hohen Rädern reichen die Armgeviere nicht aus, es müſſen daher noch andere Arme, ſogenannte Helfarme, zwiſchen die die Armgeviere bildenden Arme, oder ſogenannte Hauptarme, eingeſetzt werden. Die letztere Conſtruction kommt bei dem in Fig. 354 abgebildeten Rade vor. Man baut beim ſächſiſchen Bergbau ſolche Räder zum Umtriebe der Pochwerke, Kunſtgezeuge u. ſ. w. von 20 bis 50 Fuß Höhe. In dieſer Zeichnung iſt A die Welle, B und C ſind deren Zapfen, DE, FG u. ſ. w. die Hauptarme, HM, HL u. ſ. w. aber die Helfarme, welche bei H in den ſogenannten Viertelſtöcken eingeſetzt ſind. Ferner ſind DFG und $D_1 F_1 G_1$ die Radkränze, und K iſt das Aufſchlaggerinne. Die Kränze ſind aus zwei Holzringen

zuſammengeſetzt, die aus 8 bis 16 einzelnen, 3 bis 5 Zoll dicken bogenförmig gearbeiteten Pfoſtenſtücken, den ſogenannten Felgen, beſtehen. Die

Fig. 354.

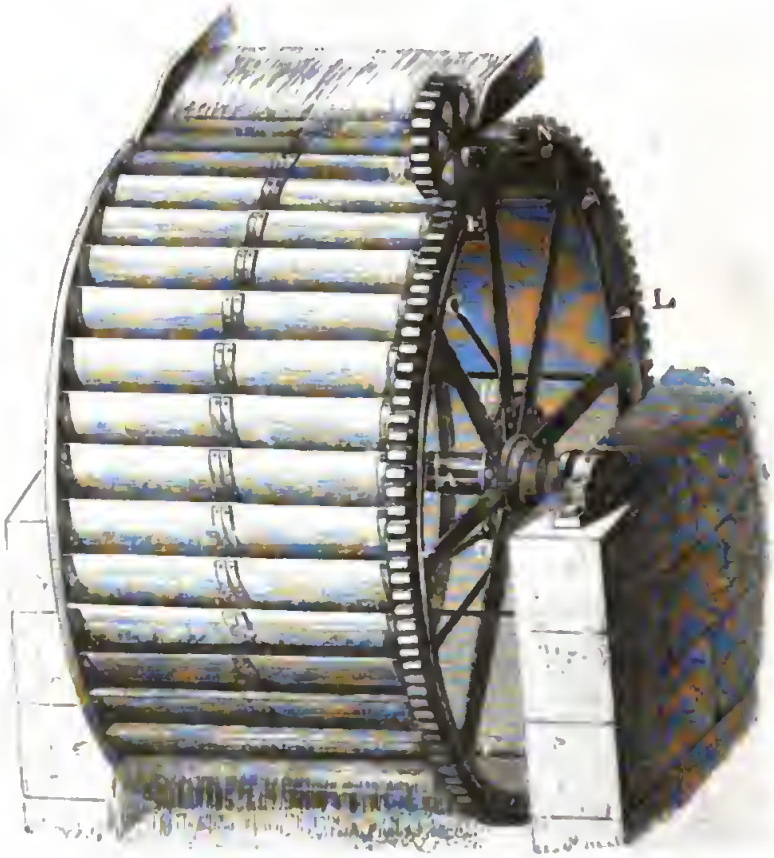


Arme ſind unter ſich und mit den Kränzen durch Schrauben verbunden. Zur feſten Verbindung der Kränze mit einander dienen die Hängenägel oder lange Schraubenbolzen, welche durch beide Kränze und durch je zwei Radarme zugleich hindurchgehen. Um die Schaufeln einſetzen zu können, ſind in die Innenflächen der Kränze ſogenannte Larven eingeſchnitten. Das Zahnrad N dient zur Transmiſſion der Bewegung.

In Fig. 355 (a. f. S.) iſt ein eiſernes Rad neuerer Conſtruction abgebildet. Hier ſind die Radarme $BE, DF \ldots$ durch Schrauben mit Scheiben oder Roſetten, wie BD, feſt verbunden, welche auf der Welle AC aufſitzen. Dieſe Räder werden in der Regel ſehr weit gemacht, und erhalten deshalb außer den beiden Seitenkränzen noch einen dritten, mitten zwiſchen jenen. Dieſer dritte Kranz iſt nun noch durch Diagonalarme, wie BG u. ſ. w., geſtützt. Zur Befeſtigung des Ganzen ſind noch Ankerſtangen durch je zwei Haupt-

arme hindurchgezogen. Mit einem der äußeren Kränze iſt das Zahnrad *E L F* verbunden, das in ein anderes Zahnrad *M* eingreift und dadurch

Fig. 355.



eine Welle *M N* in Umdrehung ſetzt. Die Schaufeln beſtehen hier aus Eiſenblech, und werden mittels Schrauben auf Rippen befeſtigt, die an den inneren Seiten der Radkränze angegoſſen ſind.

§. 173 **Radhalbmesser.** Das erſte Hauptelement eines Waſſerrades iſt die Umfangsgeſchwindigkeit v, oder Umdrehungszahl u deſſelben. Aus einem oder dem anderen dieſer beiden Elemente läßt ſich zunächſt der Radhalbmeſſer beſtimmen. Wir werden weiter unten ſehen, daß wir oberſchlägigen Waſſerrädern eine kleine Umfangsgeſchwindigkeit geben müſſen. Bei hohen Rädern ſteigt dieſelbe bis auf 10 Fuß, Räder von mittlerer Höhe haben nur 5 Fuß Geſchwindigkeit und ſelbſt bei den niedrigſten Rädern läßt man dieſe Geſchwindigkeit nicht unter $2\frac{1}{2}$ Fuß herabgehen. Die Geſchwindigkeit c des eintretenden Waſſers hängt von der Radgeſchwindigkeit v ab, und iſt in einem beſtimmten Verhältniſſe größer als dieſe. Zur Erzeugung der Geſchwindigkeit c iſt ein Gefälle nöthig, wie in Fig. 356,

$\overline{AB} = h_1 = \frac{c^2}{2g}$, welches vom Totalgefälle $AF = h$ nur noch das eigentliche Radgefälle

$$\overline{BF} = h_2 = h - h_1 = h - \frac{c^2}{2g}$$

übrig läßt. Da ſelbſt bei dem vollkommenſten Ausfluß noch 5 Procent an lebendiger Kraft verloren gehen (ſ. Band I, §. 405), ſo möchte es rathſam ſein, denſelben hier zu 10 Procent anzunehmen, und daher das effective Gefälle für den Eintritt,

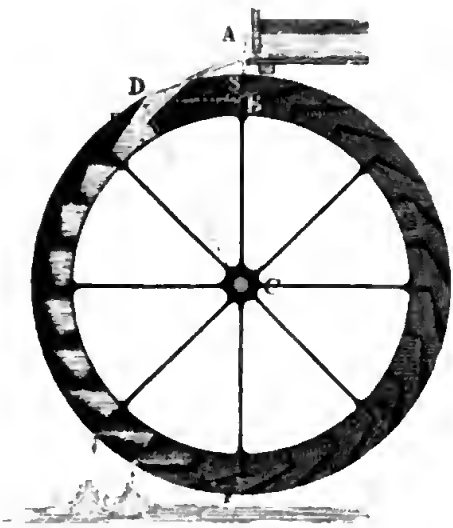
$$h_1 = 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g},$$

alſo

$$h_2 = h - 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g}$$

zu ſetzen. Aus dem Radgefälle h_2 ergiebt ſich nun noch die Radhöhe oder der Radhalbmeſſer $\overline{CF} = \overline{CS} = a$, indem wir den Winkel $SCD = \theta$, um welchen die Eintrittsſtelle D vom Radſcheitel S abweicht, als gegeben anſehen können. Es iſt nämlich:

Fig. 356.



$$h_2 = \overline{CF} + \overline{CB} = a + a\cos.\theta = (1 + \cos.\theta)\, a,$$

daher umgekehrt, der Radhalbmeſſer:

$$a = \frac{h - h_1}{1 + \cos.\theta}.$$

Aus dem Radhalbmeſſer a und der Umfangsgeſchwindigkeit v ergiebt ſich die Anzahl der Umdrehungen des Rades pr. Minute:

$$u = \frac{30\, v}{\pi a}.$$

In der Regel giebt man die Umdrehungszahl u und hat hieraus a und v zu berechnen. Setzen wir hiernach

$$v = \frac{\pi u a}{30} \text{ und } c = \varkappa \cdot \frac{\pi u a}{30},$$

wo $\varkappa$ ein gegebenes Verhältniß, der ſogenannte Geſchwindigkeitscoefficient $\frac{c}{v}$ iſt, ſo erhalten wir:

$$(1 + \cos.\theta)\, a = h - \frac{1{,}1}{2g} \cdot \left(\frac{\varkappa . \pi u a}{30}\right)^2,$$

und hieraus, wenn man $g = 31{,}25$ und $\pi = 3{,}1416$ einführt,

$$a = \frac{h - 0{,}000193\ (\varkappa u a)^2}{1 + cos.\,\theta}.$$

Die Auflöſung dieſer quadratiſchen Gleichung giebt den Radhalbmeſſer:

$$1)\quad a = \frac{\sqrt{0{,}000772\ (\varkappa u)^2\ h + (1 + cos.\,\theta)^2} - (1 + cos.\,\theta)}{0{,}000386\ (\varkappa u)^2},$$

oder annähernd:

$$a = \frac{h\ [1 - 0{,}000048\ (\varkappa u)^2\ h]}{1 + cos.\,\theta}\ \text{Fuß}.$$

Hiernach folgt dann die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades:

$$2)\quad v = \frac{\pi u a}{30} = 0{,}1047\,.\,u a.$$

Beiſpiele. 1. Für ein Gefälle von 30 Fuß iſt ein Rad zu conſtruiren, welches 8 Fuß Umfangsgeſchwindigkeit hat, und das noch einmal ſo ſchnell eintretende Waſſer 12 Grad unter dem Scheitel aufnimmt, wie groß iſt der erforderliche Radhalbmeſſer und die Umdrehungszahl? Es iſt:

$$c = 2\,.\,8 = 16\ \text{Fuß},$$

daher:

$$h_1 = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,16^2 = 4.5\ \text{Fuß},$$

und

$$a = \frac{30 - 4{,}5}{1 + cos.\,12^0} = \frac{25{,}5}{1{,}978} = 12{,}9\ \text{Fuß},$$

endlich:

$$u = \frac{30\,.\,8}{\pi\,.\,12.9} = 5{,}92.$$

2. Iſt die Umdrehungszahl $u = 5$ gegeben, ſo folgt bei dem nämlichen Gefälle und dem gegebenen Verhältniſſe $\varkappa = 2$, der Radhalbmeſſer

$$a = \frac{\sqrt{2{,}316 + 3{,}9125} - 1{,}978}{0{,}0386} = \frac{0{,}5177}{0{,}0386} = 13{,}41\ \text{Fuß};$$

ferner die Umfangsgeſchwindigkeit:

$$v = 0{,}1047\,.\,5\,.\,13{,}41 = 7{,}02\ \text{Fuß},$$

die Eintrittsgeſchwindigkeit:

$$c = 14{,}04\ \text{Fuß},$$

und endlich das Gefälle zur Erzeugung der letzteren Geſchwindigkeit:

$$h_1 = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,14{,}04^2 = 3{,}47\ \text{Fuß}.$$

§. 174 **Kranzbreite und Radweite.** Wichtige Radverhältniſſe ſind ferner noch die Kranzbreite und die Radweite. Die Kranzbreite (Radtiefe) oberſchlägiger Waſſerräder macht man gewöhnlich 10 bis 12 Zoll, ſelten 14 bis 15 Zoll, und zwar nur deshalb, weil das Waſſer bei einem Rade mit ſchmalem Kranze an einem größeren Hebelarme wirkt, als bei einem gleich hohen Rade mit breitem Kranze. Was dagegen die Radweite oder Radbreite anlangt, ſo hängt dieſe von dem dem Rade zu gebenden Faſſungsraume ab. Iſt d die Kranzbreite oder Radtiefe und e die Radweite, ſo hat

man für den Querschnitt des vom Boden und von den Radkränzen gebildeten ringförmigen Fassungsraumes, $= de$; und ist noch v_1 die Radgeschwindigkeit im Mittel der Kranzbreite, so hat man den in der Secunde dem eintretenden Wasser dargebotenen Fassungsraum, $= de.v_1$. Dieser Raum kann jedoch dem Aufschlagquantum Q pr. Secunde nicht gleich sein, weil der Fassungsraum einer Radzelle nicht so groß ist als der ganze zwischen je zwei Schaufeln befindliche Raum, und es auch wegen des zu zeitigen Ausfließens nicht zweckmäßig ist, die Zellen ganz mit Wasser anzufüllen; es ist daher $\varepsilon de v_1 = Q$, und $\varepsilon < 1$ zu setzen. In der Regel nimmt man diesen Coefficienten, den man auch den Füllungscoefficienten nennt, $\varepsilon = 1/4$ bis $1/3$ an. Jedenfalls bestimmt sich nun die gesuchte Radweite durch die Formel

$$e = \frac{Q}{\varepsilon d v_1},$$

oder, wenn man annähernd

$$v_1 = v = \frac{\pi a u}{30}$$

einführt,

$$e = \frac{30\,Q}{\varepsilon \pi u a d} = 9{,}55\,\frac{Q}{\varepsilon u a d},$$

oder für ε den mittleren Werth $1/4$ angenommen,

$$e = 38{,}2\,\frac{Q}{u a d}.$$

Damit sehr hohe Räder nicht zu schmal ausfallen, nimmt man für sie ε wohl gar $1/5$.

Schaufelzahl. Die Schaufelzahl n ist ein weiteres wichtiges Rad- §. 175
element. Es ist leicht einzusehen, daß eine kleinere Wassermenge in einer Radzelle länger beharrt als ein größeres Wasserquantum, und da nun dieses letztere unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen um so kleiner ausfällt, je größer die Anzahl der Schaufeln des Rades ist, so folgt, daß im Allgemeinen eine große Schaufelzahl auf eine größere Ausnutzung der Wasserkraft führt, und daher eine größere Leistung des Wasserrades verspricht als eine kleine Schaufelzahl. Jedoch hat diese Zahl auch ihre Grenzen, und zwar nicht allein deshalb, weil die Schaufeln in Folge ihrer Dicke einen gewissen Theil vom Fassungsraum des Rades in Anspruch nehmen, wonach man also Rädern mit dünneren eisernen Schaufeln eine größere Schaufelzahl geben müßte, als Rädern mit dickeren Holzschaufeln, sondern auch deshalb, weil es zwecklos und nachtheilig ist, die Schaufeln so nahe an einander zu rücken, daß die eine Zelle in den Fassungsraum der anderen tritt, welche daher nicht soviel Wasser zu fassen vermag, als wenn diese Schaufeln mehr von einander abstehen. Einen wesent-

lichen Einfluß auf die Anzahl der Schaufeln eines Rades hat auch noch die Geſtalt der Schaufeln, ſowie die Art und Weiſe der Einführung des Waſſers in das Rad, da dem Waſſerſtrahl zum Eintritt in das Rad ein hinreichender Querſchnitt dargeboten werden muß.

Hat man den Abſtand zwiſchen je zwei Schaufeln feſtgeſetzt, ſo iſt die Anzahl n der Schaufeln dem Radumfang oder Halbmeſſer a proportional wachſend anzunehmen, und zwar im Mittel bei der gewöhnlichen Radtiefe von 10 bis 12 Zoll, $n = 5\,a$ bis $6\,a$ zu ſetzen, wenn a in Fußen ausgedrückt wird.

Räder von größerer Radtiefe erhalten eine kleinere Schaufelzahl als ſolche von kleinerer Tiefe.

Aus der Schaufelzahl n folgt der ſogenannte Theilwinkel, d. i. der Winkel zwiſchen zwei benachbarten Schaufeln:

$$\varphi = \frac{360^0}{n}.$$

Beiſpiel. Wenn ein oberſchlägiges Waſſerrad bei 15 Fuß Halbmeſſer, 1 Fuß Kranzbreite und 10 Cubikfuß Aufſchlag pr. Secunde, fünf Umdrehungen pr. Minute machen ſoll, ſo hat man ihm die Weite

$$e = 38{,}2 \cdot \frac{10}{5.15.1} = 5{,}1 \text{ Fuß}$$

zu geben; und es iſt die Schaufelzahl $n = 5\,a = 5.15 = 75$, oder, wegen der leichteren Vertheilung, $n = 72$, in Anwendung zu bringen, endlich iſt der Theilungswinkel $\varphi = {}^{360}/_{72} = 5^0$ zu machen.

§. 176 **Schaufelungsmethoden.** Von großem Einfluſſe auf die Wirkung eines Waſſerrades ſind die ſogenannten Schaufelungsmethoden oder die Formen der durch den Boden und durch die Schaufeln des Rades gebildeten Radzellen (franz. augets; engl. buckets). Die Schaufeln müſſen ſo geformt und ſo geſtellt ſein, daß ſie das Ausſchlagewaſſer (franz. eau motrice; engl. moving water) nicht allein ungehindert in die Radzelle eintreten laſſen, ſondern auch darin ſoviel wie möglich zum tiefſten Punkte des Rades zurückhalten. Viele von den verſchiedenen Schaufelungsmethoden entſprechen dieſen Forderungen nur ſehr unvollkommen. Bei gleicher Schaufelzahl, gleicher Waſſermenge u. ſ. w. hängt jedenfalls der Ein- und Austritt des Waſſers von der Lage des äußeren Schaufelendes AB, Fig. 357, ab. Daſſelbe ſchließt mit dem äußeren Radumfange einen gewiſſen Winkel $BAT = \beta$ ein, welchen wir in der Folge den Eintrittswinkel des Waſſers nennen wollen. Dieſer Winkel ergänzt den Winkel BAC, welchen das Schaufelende mit dem Radhalbmeſſer CA einſchließt und gewöhnlich der Dockungs- oder Deckungswinkel genannt wird, zu einem Rechten (90^0). Das äußere Schaufelend AB bildet die äußere Seitenwand einer Zelle, deren veränderlicher Faſſungsraum daher auch von der Lage und Ausdehnung dieſes Begrenzungselementes abhängt. Wenn beim Niedergehen der Zelle das Schaufelende in eine horizontale Lage AB, Fig. 358, gelangt, ſo ver-

liert es die Eigenschaft einer Seitenwand vollständig und es fällt der Fassungsraum der Zelle Null aus. In diesem Augenblicke steht das Schaufelende

Fig. 357.

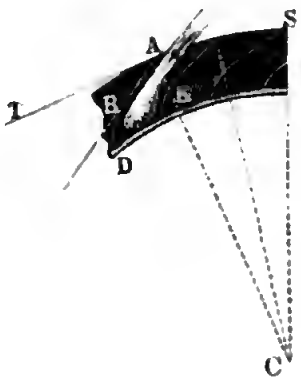


Fig. 358.

noch um den Winkel $ACF = BAT = \beta$ von dem Radtiefsten F ab; damit folglich das Wasser so lange wie möglich in der niedergehenden Zelle zurückgehalten werde, ist dieser Winkel so klein wie möglich zu machen. Da nun aber zur Einführung des Wassers in das Rad ein gewisser Zellenquerschnitt AE, Fig. 357, nothwendig ist, welcher von der Größe des Eintrittswinkels abhängt und mit demselben gleichzeitig Null ausfällt, so ist zur Erzielung einer vortheilhaften Leistung des Wasserrades erforderlich, daß der Eintrittswinkel des Wassers zwar klein sei, jedoch unter eine gewisse und noch zu bestimmende Grenze nicht herabkomme.

Außerdem hängt der Fassungsraum einer Radzelle auch noch von der Form und Ausdehnung der Schaufeln ab, und es ist leicht zu ermessen, daß derselbe um so größer ausfällt, je breiter die Schaufeln sind und je mehr dieselben im Mittel vom inneren Radumfange oder von dem als innere Seitenwand der Zellen dienenden Radboden abstehen. Wenn es nun auch zum längeren Zurückhalten des Wassers in den Zellen erforderlich ist, den Fassungsraum der letzteren so viel wie möglich zu vergrößern, so ist doch auch hierin die Grenze nicht zu überschreiten, wobei entweder die Fassungsräume der benachbarten Zellen in einander eindringen oder die Zellen Dimensionen annehmen, welche dem Ein- und rechtzeitigen Austritt des Wassers hinderlich sind. Aus diesem Grunde sind auch die einfachen ebenen Schaufeln, wie AB, Fig. 359 (a. f. S.), entweder gar nicht anwendbar oder wenigstens ganz unzweckmäßig, und man ersetzt dieselben durch zusammengesetzte oder krumme Schaufeln, welche sich zwar an den äußeren Radumfang unter dem gegebenen Eintrittswinkel β anschließen, dagegen aber auf dem inneren Radumfang oder Radboden ganz oder nahe rechtwinkelig stehen.

Die hölzernen Schaufeln läßt man gewöhnlich aus zwei Theilen AB und

BD, Fig. 360, beſtehen, welche natürlich unter einem ſtumpfen Winkel aneinander ſtoßen. Der äußere Theil der Schaufel heißt die Stoß- oder

Fig. 359.

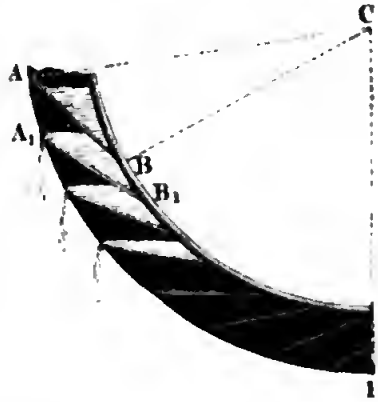
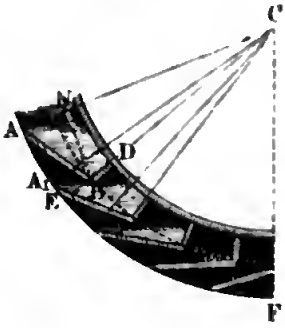


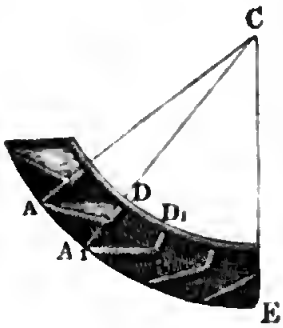
Fig. 360.



Setzſchaufel, und der innere die Riegel- oder Kropfſchaufel; die erſtere trifft den äußeren Radumfang unter dem Eintrittswinkel β und die letztere wird radial, zuweilen auch, jedoch mit Nachtheil, rechtwinkelig gegen die erſtere gelegt. Man nennt den Kreis, welcher durch die Punkte beſtimmt iſt, worin dieſe Schaufeln zuſammenſtoßen, den Theilkreis des Waſſerrades, weil auf ihm die Eintheilung des Rades in Zellen vorgenommen wird. Dieſen Kreis legt man bei einem kleineren Eintrittswinkel ins Mittel, wie Fig. 360, und bei einem größeren Eintrittswinkel ins Drittel der Kranzbreite, wie Fig. 361, ſo daß er im erſteren Falle von beiden Radumfängen gleich und im zweiten vom äußeren Radumfange noch ein Mal ſo viel abſteht als vom inneren.

Eine gewöhnliche und ſehr einfache Schaufelconſtruction beſteht darin, daß man die Stoßſchaufel AB, Fig. 361, von den Schenkeln CA und CB des Theilwinkels $ACB = \varphi$ einſchließen und folglich in einem und demſelben Radius CD eine Stoßſchaufel $A_1 B_1$ anfangen und eine andere Stoßſchaufel AB auslaufen läßt. Um einen kleineren Eintrittswinkel zu erhalten, macht man auch den Winkel $ACB = \psi$, Fig. 360, welcher eine Stoßſchaufel zwiſchen ſeine Schenkel faßt, noch größer als den Theilwinkel ACA_1, z. B. Fünfviertel dieſes Winkels.

Fig. 361.



Iſt a der äußere Halbmeſſer CA, und a_1 der Halbmeſſer CB des Theilkreiſes, ſo hat man für den dem Schaufelwinkel ψ entſprechenden Eintrittswinkel $EAB = ABN = \beta$

$$tang.\,\beta = \frac{AN}{BN} = \frac{a - a_1\,cos.\,\psi}{a_1\,sin.\,\psi},$$

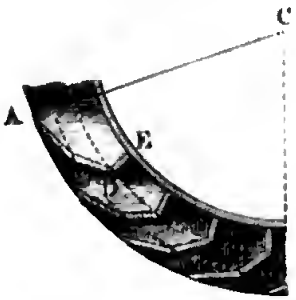
in welchem Ausdrucke φ statt ψ einzusetzen ist, wenn die gewöhnliche einfache Schaufelconstruction angewendet wird. Bezeichnet nun d die Kranzbreite $\overline{DE}$, so hat man, jenachdem man den Theilkreis ins Mittel oder ins Drittel legt,

$$a_1 = a - {}^1/_2 d \text{ oder } a_1 = a - {}^2/_3 d$$

in die letzte Formel einzusetzen.

Die Stoß- und Riegelschaufeln aus Gußeisen oder Eisenblech gehen in einem Bogen allmälig in einander über und bestehen nur aus einem Stücke (Fig. 358). Da bei diesen eisernen Schaufeln die Verengung der Zelle durch die Ecke zwischen den beiden Schaufeln wegfällt, so gewähren diese Schaufeln eine bessere Einführung des Wassers als die zweitheiligen Holzschaufeln. Um auch den aus Holzschaufeln gebildeten Radzellen eine größere Weite zu verschaffen, kann man die Kante zwischen der Stoß- und Riegelschaufel abstumpfen und statt derselben ein drittes Schaufelstück BD, Figur 362, einsetzen.

Fig. 362.



Noch kann man den Fassungsraum einer Zelle dadurch vergrößern, ohne die Zelle, zum Nachtheil der Einführung des Wassers in dieselbe, zu verengen, daß man die Riegelschaufel BD, Fig. 363, nicht rechtwinkelig gegen den Radboden, sondern so stellt, daß sie innerlich mit demselben einen spitzen Winkel BDE, z. B. einen solchen von 45 Grad einschließt. Um diesen schrägen Anschluß bei eisernen Schaufeln zu erhalten, kann man diese Schaufeln ganz oder zum Theil nach einem Kreisbogen krümmen, welcher unter einem spitzen Winkel von circa 45 Grad an den Radboden anstößt. Den Mittelpunkt M eines solchen Kreisbogens AD, Fig. 364, hat man in einer Linie

Fig. 363.

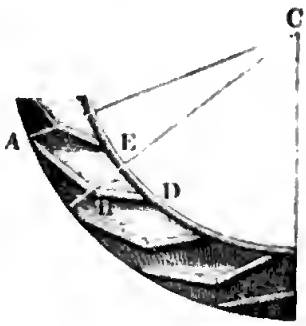
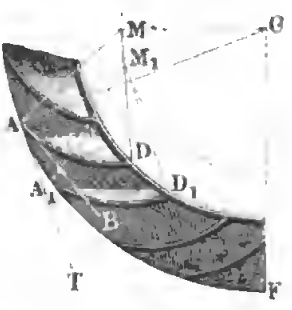


Fig. 364



AM anzunehmen, welche mit dem Radhalbmesser CA den Eintrittswinkel

$$CAM = BAT = \beta$$

einschließt. Die Mittelpunkte M_1, M_2... der übrigen Schaufeln $A_1 D_1$, $A_2 D_2$... liegen in einem mit CM aus C beschriebenen Kreise.

Beispiel. Bei einem Rade von $2a = 30$ Fuß Höhe und $d = 10$ Zoll Kranzbreite, welches nach der in § 175 vorläufig angegebenen Regel

$$5a = 5 . 15 = 75,$$

oder, der leichten Vertheilung wegen, 72 Radschaufeln erhalten soll, ist der Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{360^0}{n} = {}^{360}/_{75} = {}^{24}/_{5} = 4{}^{4}/_{5} \text{ Grad};$$

macht man die Schaufelwinkel $\psi = {}^{5}/_{4}\,\varphi$ und legt den Theilungskreis in die Kranzmitte, so hat man:

$$\psi = {}^{24}/_{5} . {}^{5}/_{4} = 6^0;$$

ferner den Theilkreishalbmesser

$$a_1 = a - \frac{d}{2} = 15 - {}^{5}/_{12} = 14{,}5833 \text{ Fuß}$$

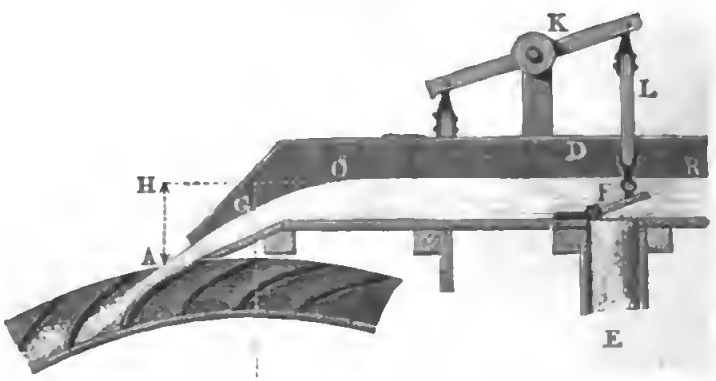
und für den Eintrittswinkel β:

$$tang.\,\beta = \frac{a - a_1\,cos.\,\psi}{a_1\,sin.\,\psi} = \frac{15 - 14{,}5833\,cos.\,6^0}{14{,}5833\,sin.\,6^0} = \frac{0{,}496}{1{,}527} = 0{,}325;$$

hiernach ist dieser Winkel selbst: $\beta = 18^0\,1'$
und der Deckungswinkel $90 - \beta = 71^0\,59'$,
wofür man 72 Grad annehmen kann.

§. 177 **Schützen.** Von nicht unbedeutender Wichtigkeit ist die Art und Weise, wie das Wasser auf ein Rad geführt wird. Man läßt entweder das Wasser aus dem Gerinne frei einfallen in das Rad, oder man spannt dasselbe durch eine sogenannte Spannschütze an, ehe es in das Rad tritt. Im ersten Falle hängt die Einfallsgeschwindigkeit fast nur von der Fallhöhe ab, im zweiten hingegen kann diese durch die Druckhöhe regulirt werden. Aus dem letzteren Grunde zieht man daher auch die Anwendung eines Schutzbretes dem freien Eintritte oder der Einführung durch ein sogenanntes Schußgerinne vor. In Fig. 365 ist ein Wassereinlauf ohne Schütze abgebildet.

Fig. 365.



Das durch das Gerinne DO zugeführte Wasser wird durch ein Schußgerinne G in bestimmter Richtung auf das Rad geführt. Um wenigstens den Zufluß zu reguliren, ist vor dem Rade ein Abfalllutten E angebracht, durch den das überflüssige Wasser abfließt und über welchem eine Fallklappe F liegt, welche sich mittels Hebel K, Stange L u. s. w. beliebig eröffnen und verschließen läßt. Fließt das Wasser im Gerinne mit der Geschwindigkeit c_0 zu und ist die Fallhöhe $\overline{AH}$, vom Wasserspiegel OR bis Eintrittspunkt A gerechnet, $= h_1$, so hat man die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers beinahe

$$c = \sqrt{2gh_1 + c_0^2} = \sqrt{2gh_1 + \left(\frac{Q}{G}\right)^2},$$

wenn Q das Wasserquantum und G den Inhalt des Querschnittes vom zufließenden Wasser bezeichnen.

Die Spannschützen (franz. vannes; engl. sluices, hatches, penstocks, shuttles) sind entweder horizontal, oder vertical, oder geneigt. Die Anordnung und Stellvorrichtung eines horizontalen Schutzbretes BC ist aus Fig. 366, und die eines verticalen Schutzbretes aus Fig. 367 ersichtlich. Dort wird das Bret durch Zugstange DE und Hebel KD u. s. w., und durch Zahnstange Z und Getriebe R in Bewegung gesetzt.

Die Construction von einer schiefstehenden Spannschütze ist in Fig. 368 abgebildet. Bei dieser in Freiberg angewendeten Spannschütze

Fig. 366.

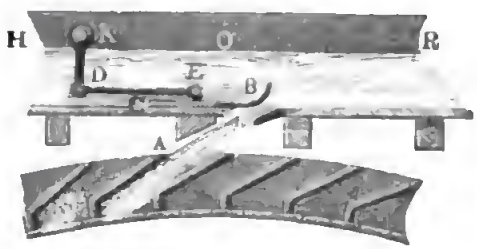


Fig. 367.

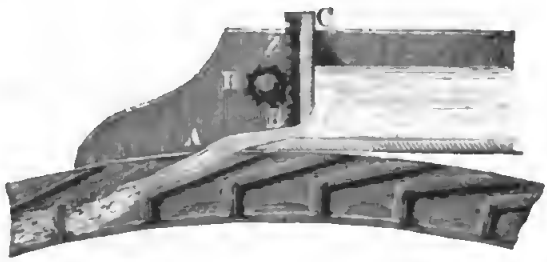
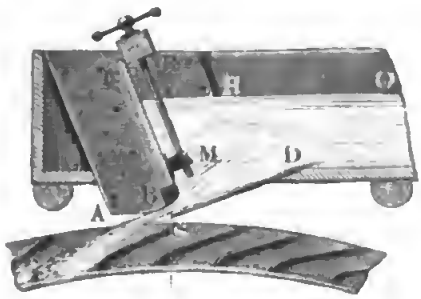


Fig. 368.



erfolgt die Stellung durch eine Schraube RM, welche oben durch eine über dem Gerinne wegliegende Schwelle R und unten durch eine an dem Schutzbrete BC vorstehende Nase M hindurchgeht.

Es ist bei allen Constructionen dieser Art, Regel, die Mündung im Inneren so viel und so glatt wie möglich abzurunden oder nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles zu formen, damit die äußere Con-

traction des Waſſerſtrahles vermieden und dem Waſſer ſo wenig wie möglich Hinderniſſe in den Weg gelegt werden. Fällt das Waſſer, nachdem es aus der Mündung herausgetreten iſt, ganz frei, und kann man die Mündungsebene winkelrecht gegen die Richtung des Strahles legen, ſo iſt es auch zweckmäßig, die Mündung einer dünnen Wand anzuwenden; nur muß dann auch dafür geſorgt werden, daß nicht partielle, einen ſchiefen Strahl gebende Contraction eintrete (ſ Bd. I, §. 414).

Bei dem Ausfluſſe durch Spannſchützen beſtimmt ſich aus der Druckhöhe $= h_0$ die Ausflußgeſchwindigkeit

$$c_0 = \mu \sqrt{2 g h_0};$$

iſt nun noch z die freie Fallhöhe von Schutzmündung bis Eintrittspunkt gerechnet, ſo hat man die Einfallsgeſchwindigkeit:

$$c = \sqrt{c_0^2 + 2 g z} = \sqrt{2 g (\mu^2 h_0 + z)}.$$

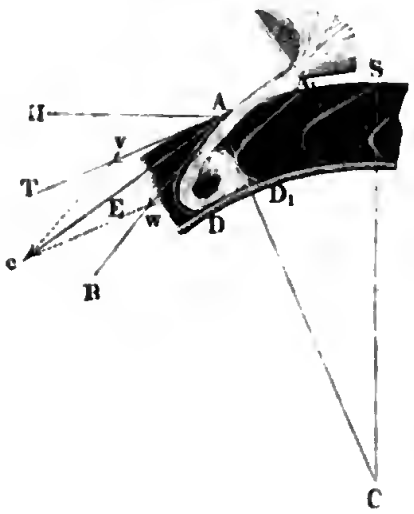
Nehmen wir den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}95$ an, ſo bekommen wir demnach:

$$c = \sqrt{2 g} (0{,}9 h_0 + z).$$

Man erſieht hieraus, daß bei gleichem Einlaßgefälle die Einfallsgeſchwindigkeit ziemlich dieſelbe iſt, das Waſſer mag frei einfallen oder aus einer Schutzöffnung in das Rad gelangen.

§. 178 **Eintritt des Waſſers.** Damit das Waſſer ungehindert in die Radzellen eintrete, darf es nicht am äußeren Radumfange mit den Schaufeln zuſammenſtoßen, ſondern es muß der Zuſammenſtoß erſt nahe am inneren Umfange erfolgen. Aus dieſem Grunde iſt nicht nur die äußere Schaufelkante A möglichſt zuzuſchärfen, ſondern auch noch der Waſſerſtrahl $\overline{Ac}$, Fig. 369, ſo zu richten, daß ſich ſeine Geſchwindigkeit in zwei Componenten zerlegen läßt, wovon der eine mit der Umfangsgeſchwindigkeit $\overline{Av} = v$ zuſammenfällt und der andere die Richtung AB der Stoßſchaufel oder des äußeren Schaufelendes überhaupt hat. Da man die Richtung AB der Stoßſchaufel als gegeben anſehen kann, ebenſo die gegen den Radhalbmeſſer CA rechtwinkelig gerichtete Geſchwindigkeit v am äußeren Radumfange bekannt und die Größe der Geſchwindigkeit c des einfallenden Waſſers eine beſtimmte iſt, ſo findet man

Fig. 369.



die erforderliche Richtung des letzteren, wenn man durch (v) eine Parallele zu AB legt, mit c, als Halbmeſſer, aus A einen Kreisbogen beſchreibt und nun von A nach dem Durchſchnitte (c) dieſes Bogens mit jener Parallelen eine Gerade $\overline{Ac}$ zieht.

Führt man endlich noch durch den Endpunkt (c) eine Parallele zu $\overline{Av}$, ſo ſchneidet dieſe von AB die relative Geſchwindigkeit $\overline{Aw} = w$ ab, mit welcher das Waſſer in das Rad eintritt. Durch Rechnung findet man Folgendes: Iſt α der **Zutrittswinkel** EAT, unter welchem der zufließende Waſſerſtrahl den äußeren Radumfang trifft, und β der gegebene Eintrittswinkel, unter welchem ſich die Schaufeln an dieſen Radumfang anſchließen, ſo gelten für dieſelben die bekannten Proportionen (ſ. Bd. I, §. 33):

$$\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta} = \frac{w}{c} \text{ und } \frac{\sin.(\beta - \alpha)}{\sin.\beta} = \frac{v}{c}.$$

Die letztere Proportion führt auf die Formel

$$\sin.(\beta - \alpha) = \frac{v}{c}\sin.\beta = \frac{\sin.\beta}{\varkappa},$$

wonach ſich aus dem Eintrittswinkel β und dem Geſchwindigkeitsverhältniſſe $\varkappa = \frac{c}{v}$, der Winkel $\beta - \alpha = EAB$ beſtimmen läßt, um welchen die Richtung AE des Waſſerſtrahles von der Richtung AB des Schaufelendes abweichen muß, und wodurch auch der Zutrittswinkel

$$\alpha = \beta - (\beta - \alpha)$$

gefunden wird.

Mit Hülfe der erſteren Proportion folgt dann aus dem letzteren Winkel die relative Eintrittsgeſchwindigkeit:

$$w = \frac{c\sin.\alpha}{\sin.\beta}.$$

Man kann dieſe Geſchwindigkeit auch mittels der bekannten Formel

$$w = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} = v\sqrt{1 - 2\varkappa\cos.\alpha + \varkappa^2}$$

berechnen, auch läßt ſich, da α ſtets nur ein kleiner Winkel und folglich $\cos.\alpha$ nahe $=$ Eins iſt, annähernd, jedoch für den praktiſchen Gebrauch genau genug,

$$w = c - v = (\varkappa - 1)v, \text{ und ebenſo}$$

$$\sin.\alpha = \frac{c - v}{c}\sin.\beta = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right)\sin.\beta,$$

oder einfacher,

$$\alpha = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right)\beta \text{ ſetzen.}$$

Hiernach kann man alſo mittels des gegebenen Geſchwindigkeitsverhältniſſes $\varkappa = \frac{c}{v}$ aus dem Eintrittswinkel β der Zutrittswinkel α berechnen. Man erſieht auch hieraus, daß $\varkappa > 1$, und alſo auch $c > v$ ſein muß.

Da das in eine Radzelle eintretende Waſſer in Folge des Stoßes gegen die Kropfſchaufel u. ſ. w. eine entgegengeſetzte Bewegungsrichtung annimmt, ſo würde daſſelbe wenigſtens theilweiſe, wieder aus der Zelle heraustreten, wenn die relative Eintrittsgeſchwindigkeit des Waſſers eine ſehr große wäre und wenn nicht das Waſſer durch den Stoß gegen die Außenfläche der folgenden Schaufel eine andere Richtung bekäme. In dieſer Hinſicht iſt daher auch die Schaufelconſtruction in Fig. 360 der in Fig. 363 vorzuziehen und die Anwendung von Schaufeln $A\,D$, wie Fig. 369, welche ſich mit ihrer Außenfläche unter einem ſpitzen Winkel an den Radboden anſchließen, in allen den Fällen zu rechtfertigen, wo das Waſſer mit einer großen relativen Geſchwindigkeit in das Rad eintritt.

Da die relative Eintrittsgeſchwindigkeit $w = c - v = (\varkappa - 1)\,v$ nicht allein mit v, ſondern auch mit $\varkappa$ wächſt, ſo ſoll aus dieſem Grunde das Verhältniß $\varkappa$ nie einen großen, meiſtens nur zwiſchen $^3/_2$ und 2 liegenden Werth annehmen.

Giebt man noch den Winkel $SCA = \theta$, um welchen der Eintrittspunkt A vom Radſcheitel abweicht, ſo kann man nun auch den Neigungswinkel $EAH = \nu$ des einfallenden Waſſerſtrahles gegen den Horizont AH angeben; es iſt nämlich

$$\nu = TAH + EAT = \theta + \alpha.$$

Beiſpiel. Wenn ein 36 Fuß hohes verticales Waſſerrad in der Minute vier Umdrehungen machen und folglich mit der Geſchwindigkeit

$$v = \frac{\pi\, u\, a}{30} = 0{,}1047 \,.\, 4 \,.\, 18 = 7{,}54 \text{ Fuß}$$

umlaufen ſoll, ſo iſt bei dem Verhältniſſe $\varkappa = \frac{c}{v} = 2$ die erforderliche abſolute Geſchwindigkeit des zufließenden Waſſers:

$$c = \varkappa \,.\, v = 2 \,.\, v = 15{,}08 \text{ Fuß}.$$

Macht man nun den Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad, ſo iſt für den Zutrittswinkel α:

$$\sin.\,(\beta - \alpha) = \frac{\sin.\,\beta}{\varkappa} = {}^1/_2 \sin.\,\beta = {}^1/_2 \,.\, 0{,}3420 = 0{,}1710, \text{ daher:}$$

$$\beta - \alpha = 9^0\,51', \text{ ſo daß nun der Zutrittswinkel}$$
$$\alpha = 20^0 - 9^0\,51' = 10^0\,9',$$

und die relative Geſchwindigkeit des eintretenden Waſſers

$$w = \frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,\beta}\, c = \frac{0{,}1762}{0{,}3420} \cdot 15{,}08 = 7{,}78 \text{ Fuß folgt.}$$

Nach den Näherungsformeln wäre

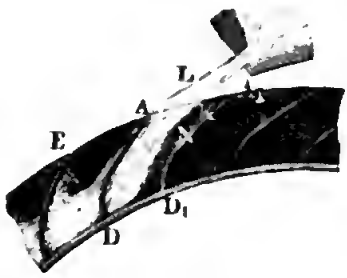
$$w = c - v = (\varkappa - 1)\, v = v = 7{,}54 \text{ Fuß und}$$
$$\alpha = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right) \beta = {}^1/_2\, \beta = 10 \text{ Grad.}$$

Steht die Eintrittsſtelle um den Winkel $\theta = 12$ Grad vom Radſcheitel ab, ſo iſt folglich die erforderliche Neigung des Waſſerſtrahles gegen den Horizont:

$$\nu = \theta + \alpha = 12^0 + 10^0\,9' = 22^0\,9'.$$

Iſt b die Länge des Bogens AK, Fig. 370, welchen der eintretende Waſſerſtrahl am äußeren Radumfange einnimmt, ſo beträgt die Dicke des Strahles unmittelbar vor dem Eintritte: §. 179

Fig. 370.



$\overline{KL} = \overline{AK} \sin. KAL = b \sin. \alpha$;

dagegen die Dicke deſſelben unmittelbar nach ſeinem Eintritte:

$\overline{AN} = \overline{AK} \sin. AKN = b \sin. \beta$,

und iſt nun noch e die der Radweite gleichzuſetzende Strahlbreite, ſo hat man die entſprechenden Querſchnitte des Strahles: $e\,b \sin. \alpha$ und $e\,b \sin. \beta$, und folglich das Aufſchlagwaſſerquantum:

$$Q = e\,b \sin. \alpha \,.\, c = e\,b \sin. \beta \,.\, w.$$

Nun iſt aber dem Obigen zufolge,

$$Q = \varepsilon\, d\, e\, v,$$

wenn ε den Füllungscoefficienten und d die Radtiefe DE bezeichnen, daher hat man auch:

$$\sin. \alpha = \frac{v}{c}\,\frac{\varepsilon d}{b} \text{ und } \sin. \beta = \frac{v}{w}\,\frac{\varepsilon d}{b}.$$

Umgekehrt, iſt die Länge des Bogens, welchen der Waſſerſtrahl am Radumfang einnimmt,

$$b = \frac{v}{c} \cdot \frac{\varepsilon\, d}{\sin. \alpha} = \frac{v}{w} \cdot \frac{\varepsilon\, d}{\sin. \beta}.$$

Annähernd, $w = c - v = (\varkappa - 1)\, v$ eingeſetzt, folgt:

$$b = \frac{\varepsilon\, d}{(\varkappa - 1) \sin. \beta}.$$

Da die oberſchlägigen Waſſerräder nicht ventilirt werden, d. i. keine Oeffnungen im Radboden zum Austritt der vom eintretenden Waſſer vertriebenen Luft haben können, ſo darf die Einmündung einer Radzelle nicht einen Augenblick lang von dem Querſchnitt des eintretenden Waſſers ausgefüllt ſein, ſondern es muß dieſer Querſchnitt noch einen zum Entweichen der verdrängten Luft nöthigen Raum übrig laſſen. Wenn nun die Strahlbreite nur wenig kleiner iſt als die Radweite e, ſo muß die Luft längs der ganzen Radweite austreten können, und es iſt daher nöthig, daß der im Vorſtehenden gefundene Bogen, welchen das eintretende Waſſer am äußeren Radumfange

einnimmt, noch kleiner sei als der an eben diesem Umfange von einer Radzelle eingenommene Bogen $A A_1$.

Ist n die Anzahl der Radschaufeln und a der äußere Radhalbmesser, so mißt dieser letztere Bogen: $b_1 = \frac{2\pi a}{n}$, und setzen wir ihn nun der Bogenlänge b gleich, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die zulässige Schaufel- oder Zellenzahl des Rades:

$$n = \frac{2\pi a}{b} = (\varkappa - 1) \cdot \frac{2\pi a \sin.\beta}{\varepsilon d}.$$

Der Sicherheit wegen ist diese Zahl noch kleiner, je nach Befinden, nur halb so groß, d. i.

$$n = (\varkappa - 1) \cdot \frac{\pi a \sin.\beta}{\varepsilon d}$$

anzunehmen.

Man ersieht aus dieser Formel, daß die Anzahl der Schaufeln eines Rades um so größer ausfallen kann, je größer der Radhalbmesser a, der Eintrittswinkel β und das Geschwindigkeitsverhältniß $\varkappa = \frac{c}{v}$, sowie je kleiner der Füllungscoefficient ε und je kleiner die Breite d des Radkranzes ist.

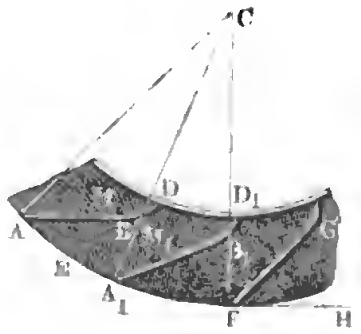
Beispiel. Für ein oberschlägiges Wasserrad von 24 Fuß Höhe und 1 Fuß Kranzbreite ist bei dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\varkappa = \frac{c}{v} = 2$, dem Füllungscoefficienten $\varepsilon = 1/4$ und dem Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad die größte Schaufelzahl:

$$n = (\varkappa - 1) \cdot \frac{2\pi a \sin.\beta}{\varepsilon d} = \frac{2\pi \,.\, 12 \sin. 20^0}{1/4} = 96\,\pi \sin. 20^0$$
$$= 96 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}342 = 103{,}1,$$

wofür jedoch der Sicherheit wegen nur zwei Drittel dieses Werthes, etwa 72, anzunehmen sein möchte.

(§. 180) **Anzahl der Zellen.** Wir haben im Obigen angenommen, daß das Wasser eine Zelle vollständig verlassen habe, wenn die Stoßschaufel $A B$, Fig. 371, oder wenigstens das äußerste Schaufelende eine horizontale Lage angenommen hat; dies ist jedoch nur annähernd richtig; denn die letzten Wassertheile, wie z. B. M, welchen der Druck mangelt, fallen erst allmälig von der Schaufel $A B$ herab, während dieselbe fortrückt und eine größere und größere Neigung annimmt. Die Zeit, welche hierzu nöthig ist, läßt sich wie folgt ermitteln.

Fig. 371.



Hat ſich die anfangs horizontale Schaufel AB um den Winkel $ACA_1 = \psi$ gedreht, iſt alſo auch ihre Neigung gegen den Horizont $= \psi$ geworden, ſo beträgt die Beſchleunigung des Waſſertheilchens M_1 auf derſelben: $p = g \sin. \psi$; nun iſt aber nach Bd. I, (§. 20) für die entſprechende Fallgeſchwindigkeit w, $\partial w = p \partial t$, daher hat man hier:

$$\partial w = g \sin. \psi \, . \, \partial t.$$

Dreht ſich das Rad, und alſo auch die Schaufel mit der Geſchwindigkeit v herum, ſo haben wir auch:

$$a \psi = v t, \text{ ſowie } a \partial \psi = v \partial t, \text{ daher läßt ſich}$$

$$\partial w = g \sin. \psi \cdot \frac{a \partial \psi}{v} = \frac{g a}{v} \sin. \psi \partial \psi,$$

und die relative Geſchwindigkeit des auf der Schaufel herabfallenden Waſſer-Elementes

$$w = \frac{g a}{v} \int \sin. \psi \partial \psi = \frac{g a}{v} (1 - \cos. \psi)$$

ſetzen.

Nach derſelben Stelle in Band I iſt auch für den Raum $B_1 M_1 = s$, welchen das Element in der Zeit t auf der Schaufel zurückgelegt hat:

$$\partial s = w \partial t = \frac{w a \partial \psi}{v} = \frac{g a^2}{v^2} (1 - \cos. \psi) \partial \psi;$$

es folgt daher der Weg ſelbſt

$$s = \frac{g a^2}{v^2} \int (1 - \cos. \psi) \partial \psi = \frac{g a^2}{v^2} (\psi - \sin. \psi).$$

Geht das Rad ſchnell um, ſo wird die Schwerkraft noch durch die anſehnliche Centrifugalkraft unterſtützt, und man hat daher, wenn auch nur annähernd, ſtatt $g, g + \frac{v^2}{a}$ (ſ. Band I, §. 42), wo a den Radhalbmeſſer bezeichnet, zu ſetzen.

Hiernach iſt nun:

$$s = \frac{a^2}{v^2} \left(g + \frac{v^2}{a} \right) (\psi - \sin. \psi),$$

und umgekehrt:

$$\psi - \sin. \psi = \frac{v^2 s}{(g a + v^2) a}.$$

Da der Inhalt eines Kreisſegmentes $= \frac{\psi - \sin. \psi}{2}$ für den Radius $= 1$ iſt, ſo läßt ſich daher ψ als der Centriwinkel eines Kreisabſchnittes vom Inhalt $\frac{1/2 \, v^2 s}{(g a + v^2) a}$ anſehen.

Damit ſich alles Waſſer aus der Zelle entfernt hat, wenn das äußere Schaufelende A am Fußpunkte F des Rades ankommt, muß dieſer Formel auch entſprochen werden, wenn man ſtatt s die ganze Schaufelbreite $AB = FG$, und für ψ den Aus- oder Eintrittswinkel, d. i. den Winkel $BAE = GFH = \beta$ einführt, um welchen die Schaufel AB oder FG vom äußeren Radumfange abweicht.

Mit Hülfe der Formel

$$\beta - sin.\,\beta = \frac{v^2 s}{(g a + v^2) a}$$

oder annähernd, mittels der Formel

$$sin.\,\beta = \sqrt[3]{\frac{6\,v^2 s}{(g a + v^2) a}},$$

läßt ſich die Größe des zuläſſigen Eintrittswinkel β beſtimmen, den wir im Vorſtehenden immer als gegeben oder bekannt angenommen haben. Auch erſieht man aus ihr, daß der Eintrittswinkel β um ſo kleiner, alſo der Deckungswinkel um ſo größer angenommen werden kann, je größer der Radhalbmeſſer a, ſowie je kleiner die Umfangsgeſchwindigkeit v und die Schaufelbreite s iſt.

Beiſpiele. 1. Für die Stoßſchaufelbreite $s = 1$ Fuß, die Umfangsgeſchwindigkeit $v = 5$ Fuß und den Radhalbmeſſer $a = 10$ Fuß hat man:

$$\beta - sin.\,\beta = \frac{25}{(31{,}25 \,.\, 10 + 25) \,.\, 10} = \frac{2{,}5}{337{,}5} = \frac{5}{675} = \frac{1}{135} = 0{,}0074074,$$

folglich:

$$\frac{\beta - sin.\,\beta}{2} = 0{,}0037037.$$

Nach dem „Ingenieur", Seite 152, iſt der entſprechende Winkel $\beta = 20\frac{1}{3}$ Grad. Die Näherungsformel giebt

$$sin.\,\beta = \sqrt[3]{6 \,.\, 0{,}0074074} = \sqrt[3]{0{,}04444} = 0{,}354,$$

und hiernach $\beta = 20\frac{2}{3}$ Grad.

2. Für ein hohes Rad von 20 Fuß Halbmeſſer und 10 Fuß Umfangsgeſchwindigkeit iſt, wenn man wieder $s = 1$ Fuß annimmt,

$$\frac{\beta - sin.\,\beta}{2} = \frac{50}{(31{,}25 \,.\, 20 + 100) \,.\, 20} = \frac{2{,}5}{725} = \frac{1}{290} = 0{,}0034483,$$

und hiernach β nahe $= 20$ Grad.

3. Für ein ſehr ſchnell umlaufendes niedriges Rad von 5 Fuß Halbmeſſer und 8 Fuß Umfangsgeſchwindigkeit iſt:

$$\frac{\beta - sin.\,\beta}{2} = \frac{32}{(31{,}25 \,.\, 5 + 64) \,.\, 5} = \frac{6{,}4}{220{,}25} = 0{,}029058,$$

folglich $\beta =$ nahe 40 Grad.

Es folgt aus dieſen Beiſpielen, daß ſich die Schaufeln unter einem Winkel von 20 bis 40 Grad an den äußeren Radumfang anſchließen müſſen, und zwar erſteres bei hohen und langſam und letzteres bei niedrigen und ſchnell umlaufenden Rädern.

Einführung des Waſſers. Damit das Waſſer in der gegebenen Richtung an das Rad gelange, legt man entweder die Schützenmündung ganz nahe an die Eintrittsſtelle und ſtellt das Schutzbrett rechtwinkelig zur Strahlrichtung, oder man bringt ein Schußgerinne in der geforderten Richtung des Strahles an, oder man ſtellt das Schutzbrett ſo, daß das Waſſer bei ſeinem freien Falle in einer Parabel die gegebene Richtung beim Eintritt von ſelbſt annimmt. §. 181

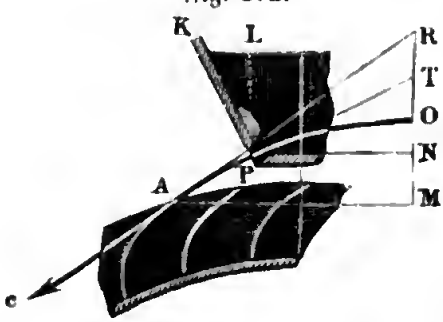
Um die Richtung des Schutzbrettes in dem Falle zu finden, wenn das Waſſer zum Theil frei auf das Rad fällt, hat man von der in Band I, §. 39 u. f. w. abgehandelten Theorie der Wurfbewegung Gebrauch zu machen. Aus der Geſchwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 372, und dem Neigungswinkel $RAM = v$ der geforderten Strahlrichtung gegen den Horizont folgt die verticale Coordinate des Parabelſcheitels:

$$\overline{MO} = x = \frac{c^2 \sin. v^2}{2g},$$

und dagegen die horizontale Coordinate:

$$\overline{AM} = y = \frac{c^2 \sin. 2v}{2g}.$$

Fig. 372.



Will man nun die Schutzöffnung nach irgend einem Punkte P dieſer paraboliſchen Bahn verlegen, und giebt man etwa die Höhe $MN = z$ dieſer Mündung über der Eintrittsſtelle A, ſo hat man für die Coordinaten $\overline{ON} = x_0$ und $\overline{NP} = y_0$ dieſes Punktes die Formeln:

$$x_0 = x - z$$

ſowie

$$y_0 = y\sqrt{\frac{x-z}{x}} = y\sqrt{1 - \frac{z}{x}},$$

und für den Neigungswinkel $TPN = v_0$, welchen die Parabel an dieſer Stelle mit dem Horizonte einſchließt,

$$tang.\, v_0 = \frac{TN}{PN} = \frac{2\,\overline{ON}}{PN} = \frac{2\,x_0}{y_0} = \frac{2\sqrt{x\,(x-z)}}{y}.$$

Die Ebene PK des Schutzbrettes muß nun winkelrecht auf der Tangente PT ſtehen. Wir finden hiernach alſo die erforderliche Lage des Schutzbrettes, wenn wir die Abſciſſe ON umgekehrt als OT auftragen, nun PT ziehen, und hierauf wieder ein Perpendikel PK errichten.

Legen wir die Schutzmündung in den Parabelſcheitel, ſo kommt natürlich das Schutzbrett vertical zu ſtehen.

Die Ausflußgeſchwindigkeit bei P iſt nun:

$$c_0 = \sqrt{c^2 - 2gz},$$

und die entſprechende theoretiſche Druckhöhe

$$h_0 = \frac{c^2}{2g} - z,$$

oder effectiv:

$$h_0 = 1{,}1 \left(\frac{c^2}{2g} - z\right),$$

wenn die Ausmündung glatt abgerundet und vielleicht gar mit Eiſenblech bekleidet iſt. Die Weite der Schutzmündung ſoll man nur wenig kleiner machen als die Radweite.

Beiſpiel. Für die Geſchwindigkeit $c = 15$ Fuß und den Neigungswinkel $\nu = 20^1/_4{}^0$ hat man die Coordinaten des Parabelſcheitels:

$$x = 0{,}016 \,.\, 15^2 \,(sin.\, 20^1/_4{}^0)^2 = 0{,}4312 \text{ Fuß},$$

und

$$y = 0{,}016 \,.\, 15^2 \,.\, sin.\, 40^1/_2{}^0 = 2{,}338 \text{ Fuß}.$$

Will man nun die Mitte der Schutzmündung um $z = 4$ Zoll $= 0{,}3333$ Fuß über die Eintrittsſtelle legen, ſo hat man die Coordinaten von der Mitte der Mündung:

$$x_0 = 0{,}4312 - 0{,}3333 = 0{,}0979, \text{ und}$$

$$y_0 = 2{,}338 \sqrt{\frac{979}{4312}} = 1{,}114 \text{ Fuß}.$$

Für die Neigung des Strahles gegen den Horizont iſt

$$tang.\, \nu_0 = \frac{1958}{11140},$$

hiernach dieſe Neigung ſelbſt:

$$\nu_0 = 9^0 58',$$

und folglich die des Schutzbrettes:

$$90^0 - \nu_0 = 80^0 2'.$$

§. 182 Bei der in §. 178 angegebenen Einführung des Waſſers in die Radzellen erleidet die paraboliſche Bahn des Waſſerſtrahles innerhalb des Rades nicht eher eine Veränderung, als bis der Strahl auf die Riegelſchaufel oder auf das bereits in der Zelle befindliche Waſſer aufſchlägt; es laſſen ſich auch für den Punkt W, Fig. 373, in welchem der Strahl auftrifft, die im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln anwenden. Bezeichnet z_1 den ſenkrechten Abſtand $\overline{MN}$ des Eintrittspunktes A von der Oberfläche W des Waſſers im Augenblicke, wenn der Zufluß in die entſprechende Zelle beendigt iſt, ſo haben wir die Abſciſſe des Endpunktes A_1 des Strahles:

$$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN}, \text{ d. i. } x_1 = x + z_1,$$

ferner die Ordinate deſſelben:

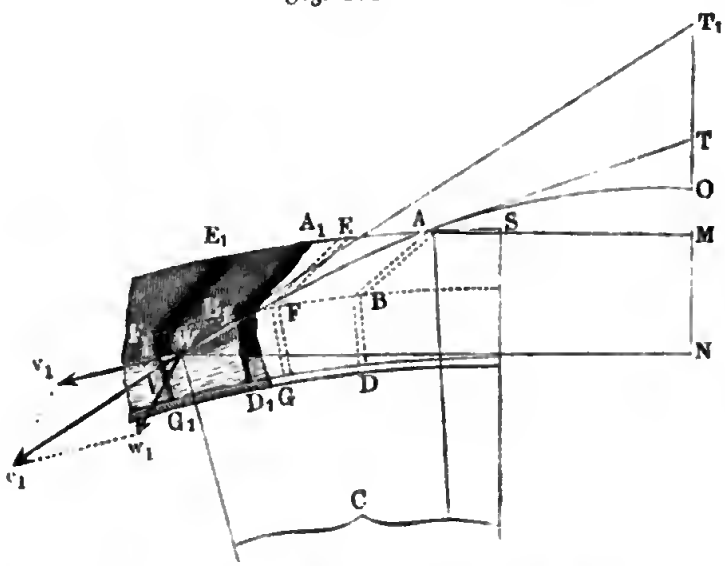
$$\overline{NW} = y_1 = y \sqrt{\frac{x_1}{x}} = y \sqrt{1 + \frac{z_1}{x}}$$

und endlich für den Neigungswinkel $T_1 W N = v_1$ des Wasserstrahles gegen den Horizont an eben dieser Stelle:

$$tang.\, v_1 = \frac{2 x_1}{y_1} = \frac{2\sqrt{x\,(x + z_1)}}{y}.$$

Noch ist für den Winkel $W C S = \theta_1$, um welchen der Endpunkt W vom Radscheitel S abweicht,

Fig. 373.



$$sin.\, \theta_1 = \frac{WN - AM + AS}{CW} = \frac{y_1 - y + a\, sin.\, \theta}{a_1},$$

wobei a_1 den Halbmesser $C W$ bezeichnet; und hieraus folgt nun der Winkel, um welchen die Richtung der Endgeschwindigkeit c_1 von der Richtung der Umdrehungsgeschwindigkeit v_1 in W abweicht:

$$\alpha_1 = v_1 - \theta_1.$$

Die Geschwindigkeit c_1, mit welcher endlich das Wasser in W aufschlägt, ist durch die bekannte Formel $\frac{c_1^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} + z_1$ bestimmt, also:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2 g z_1},$$

oder nach §. 177:

$$c_1 = \sqrt{2 g\,(0{,}9\, h_0 + z + z_1)}.$$

Beispiel. Bei dem im letzten Beispiele behandelten Falle ist, wenn man $z_1 = 9$ Zoll $= 0{,}75$ Fuß annimmt, für den Angriffspunkt W die Abscisse:

$$\overline{ON} = x_1 = x + z_1 = 0{,}4312 + 0{,}75 = 1{,}1812 \text{ Fuß},$$

die Ordinate:

$$\overline{NW} = y_1 = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}} = 2{,}338\sqrt{1 + \frac{0{,}75}{0{,}4321}}$$

$$= 2{,}338\sqrt{2{,}7356} = 3{,}867 \text{ Fuß}.$$

Ferner iſt für den Neigungswinkel des Strahles an eben dieſer Stelle:

$$tang.\,\nu_1 = \frac{2\,x_1}{y_1} = \frac{2{,}3624}{3{,}867},\quad log.\,tang.\,\nu_1 = 0{,}7859792 - 1,$$

folglich: $\nu_1 = 31^\circ 25'$.

Dagegen iſt für den Centriwinkel des Angriffspunktes W, wenn der Radhalbmeſſer $a = 18$ Fuß beträgt und der Winkel $A\,C\,S = \theta = 12$ Grad mißt:

$$sin.\,\theta_1 = \frac{y_1 - y + a\,sin.\,\theta}{a_1} = \frac{3{,}867 - 2{,}338 + 18\,sin.\,12^0}{17{,}25}$$

$$= \frac{1{,}529 + 3{,}742}{17{,}25} = \frac{5{,}271}{17{,}25},\quad log.\,sin.\,\theta_1 = 9{,}4851039,$$

folglich $\theta_1 = 17^0\,48'$, und der Winkel, um welchen in W die Richtung des Waſſerſtrahles von der Tangente des Rades abweicht:

$$\alpha_1 = \nu_1 - \theta_1 = 13^0\,37'.$$

Endlich iſt die Geſchwindigkeit des in W zum Stoße gelangenden Waſſers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2\,g\,z_1} = \sqrt{15^2 + 62{,}5\,.\,0{,}75} = \sqrt{225 + 46{,}875}$$
$$= \sqrt{271{,}875} = 16{,}490 \text{ Fuß}.$$

§. 183 **Bewegung des einfallenden Waſſers im Rade.** Die Art und Weiſe, wie das Waſſer innerhalb einer Zelle zum Stoße gelangt, iſt folgende. Es ſei $A\,F\,W$ (Fig. 374) die Axe des Waſſerſtrahles vor dem Anſtoße, und $A\,B\,D$ eine Schaufel, welche mit ihrem äußeren Ende durch A geht, ſowie $E\,F\,G$ die nächſt vorhergehende Schaufel und folglich $A\,G\,E$ die Zelle, welche den Waſſerkörper aufnimmt, deſſen Axe durch $A\,F$ repräſentirt wird.

Bei der oben (§. 178) angegebenen Lage des Schaufelendes $F\,E$ gelangt dieſer Waſſerkörper faſt ohne allen Stoß in die Zelle $A\,G\,E$, wenigſtens ſind es bloß nur die vorderſten Elemente, welche bei F an $E\,F\,G$ wirklich anſtoßen, der hauptſächlichſte Stoß erfolgt vielmehr erſt, während die Zelle allmälig aus der Lage $A\,G\,E$ in die Lage $A_1\,G_1\,E_1$ rückt, wobei die vorderſte Schaufel der Zelle nach und nach von allen übrigen Elementen des Waſſerkörpers $A\,F$ eingeholt wird. Der Stoß des Waſſers innerhalb der gedachten Zelle iſt beendigt, ſowie das letzte Element A des Waſſerkörpers $A\,F$ an die vorderſte Schaufel $E_1\,F_1\,G_1$ (in V) antrifft oder auf das Waſſer in der gefüllten Zelle (in W) aufſchlägt. Bei der entſprechenden Stellung der Zelle $A_1\,G_1\,E_1$ iſt alſo auch die Füllung deſſelben beendigt und daher anzunehmen, daß hier die Wirkung des Waſſers durch Stoß beendigt ſei und die Wirkung deſſelben durch Druck beginne. Um dieſe Zellenſtellung $A_1\,G_1\,E_1$ zu finden, hat man in Betracht zu ziehen, daß die vordere Schaufel $E\,F\,G$ bei ihrer Bewegung nach $E_1\,F_1\,G_1$ dieſelbe Zeit braucht, als das letzte Waſſerelement bei ſeiner Bewegung von A nach V oder W.

Bezeichnen wir den zu beſtimmenden Weg $A\,A_1 = E\,E_1$ der Schaufel durch s, ſo können wir, da ſich die letztere mit der Geſchwindigkeit v fortbewegt, die Zeit zum Durchlaufen dieſes Weges ſetzen:

$$t = \frac{s}{v},$$

bezeichnen wir dagegen die Länge des Curvenbogens AFV, durch s_1, und nehmen wir an, daß das letzte Waſſerelement A denſelben mit der mittleren Geſchwindigkeit $\frac{c + c_1}{2}$ zurücklege, ſo können wir die hierzu nöthige Zeit

$$t = \frac{2 s_1}{c + c_1}$$

ſetzen. Da nun aber dieſe beiden Zeiten einander gleich ſind, ſo folgt die Beſtimmungsgleichung

$$\frac{s}{v} = \frac{2 s_1}{c + c_1}.$$

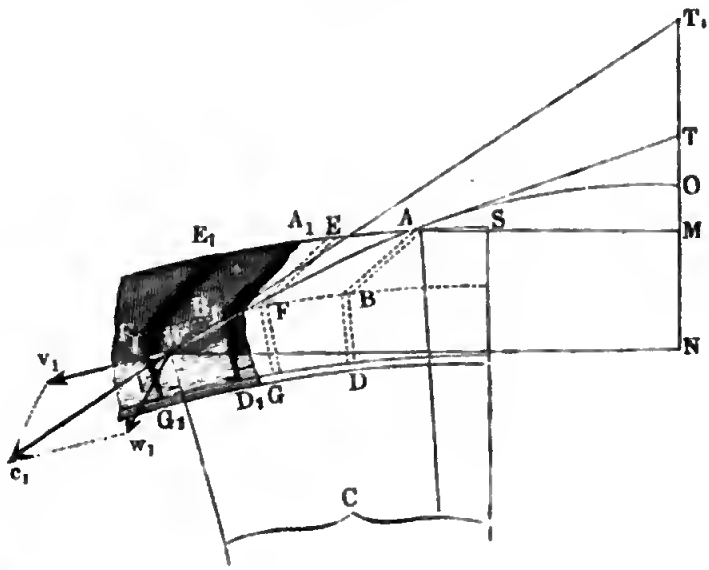
Wegen der nur mäßigen Abweichung der Richtung des Strahles AFV vom Umfange AE_1 läßt ſich annähernd $s_1 = AFV = AE + EF + EE_1$ ſetzen. Nun iſt aber AE der als bekannt anzuſehende und auf dem äußeren Radumfang zu meſſende Abſtand $b = \frac{2\pi a}{n}$, zwiſchen je zwei Radſchaufeln, und EF durch die Proportion

$$\frac{EF}{EA} = \frac{w}{v} = \frac{c - v}{v} = \varkappa - 1$$

beſtimmt, und zwar

$$\overline{EF} = (\varkappa - 1)\ \overline{EA} = (\varkappa - 1)\ b;$$

Fig. 374.



daher folgt:

$$s_1 = b + (\varkappa - 1)\ b + s = \varkappa b + s;$$

es nimmt nun die gefundene Beſtimmungsgleichung folgende Geſtalt an:

$$\frac{s}{v} = \frac{2}{c + c_1}(\varkappa b + s), \text{ oder:}$$

$$(c + c_1 - 2v)\, s = 2\varkappa v b,$$

und es iſt daher der geſuchte Weg der Schaufel während des Waſſerſtoßes folgender:

$$s = \varkappa \cdot \frac{2v}{c + c_1 - 2v}\, b = \frac{2\varkappa b}{\left(1 + \frac{c_1}{c}\right)\varkappa - 2}.$$

Mit Hülfe von $s = \overline{AA_1} = \overline{EE_1}$ läßt ſich nun die entſprechende Schaufelſtellung aufzeichnen. Da ſich aus dem gegebenen Aufſchlagsquantum Q pr. Secunde die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute ſowie aus der Anzahl der Radſchaufeln der Waſſerkörper

$$V = \frac{60\, Q}{n\, u}$$

und hieraus wieder der Querſchnitt deſſelben:

$$F = \frac{V}{c} = \frac{60\, Q}{n\, u\, c}$$

beſtimmen läßt, ſo kann man nun auch die Lage des Waſſerſpiegels W in der Zelle $A_1\, G_1\, E_1$ angeben und die Höhe $MN = z_1$ abmeſſen, welche wir im vorigen Paragraphen als gegeben angeſehen haben.

Da $c_1 = \sqrt{c^2 + 2\, g\, z_1}$ iſt, ſo hängt allerdings die ganze Beſtimmung von s durch die obige Formel mit von z_1 ab; es iſt indeſſen z_1 in der Regel eine mäßige Größe, für welche man in dem letzteren Ausdrucke einen Annäherungswerth einſetzen kann.

Beiſpiel. Wenn ein oberſchlägiges Waſſerrad bei einer Höhe von 36 Fuß, 96 Schaufeln hat und mit $7\frac{1}{2}$ Fuß Geſchwindigkeit umläuft, wenn ferner das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $c = 2v = 15$ Fuß in daſſelbe eingeführt wird und ſich dieſelbe im Rade auf $c_1 = 16{,}49$ Fuß ſteigert (ſ. das Beiſpiel des vorigen Paragraphen), ſo iſt die Theilung oder die äußere Weite einer Radzelle:

$$b = \frac{2\pi a}{n} = \frac{36 \,.\, 3{,}1416}{96} = 1{,}18 \text{ Fuß},$$

und die Bewegung derſelben während des Waſſerſtoßes:

$$s = \frac{2\varkappa b}{\left(1 + \frac{c_1}{c}\right)\varkappa - 2} = \frac{2b}{1 + \frac{16{,}45}{15} - 1} = \frac{2 \,.\, 1{,}18}{1{,}097} = 2{,}15 \text{ Fuß}.$$

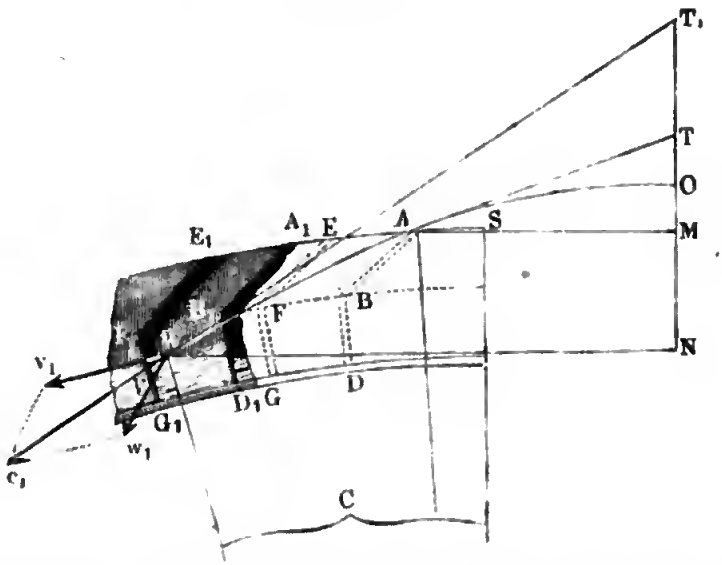
Anmerkung. Eine theoretiſche Unterſuchung über die Einführung des Waſſers in verticale Waſſerräder habe ich im „Civilingenieur" Bd. 4 veröffentlicht. Siehe auch das Taſchenbuch „der Ingenieur."

Stosswirkung. Das Wasser wirkt beim oberschlägigen Wasserrade §. 184
vorzüglich durch sein Gewicht, und nur zum kleinsten Theil durch Stoß. Die Wirkung durch den Stoß finden wir, indem wir von der ganzen Wirkung, welche der lebendigen Kraft des eintretenden Wassers entspricht, abziehen: die mechanische Arbeit, welche das Wasser behält, wenn es das Rad verläßt, sowie diejenige, welche es durch seine wirbelnde Bewegung beim Eintritt in die Zellen verliert. Die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers ist gleichzusetzen der Geschwindigkeit v_1 des Rades im Theilrisse, und es ist daher das im abfließenden Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{v_1^2}{2g} Q\gamma$. Der Arbeitsverlust, welcher bei dem Wirbeln und Zertheilen des Wassers entsteht, läßt sich aber, wie beim Stoße, $= \frac{w_1^2}{2g} Q\gamma$ setzen, insofern w_1 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, welche das Wasser beim Eintritt in die Zellen plötzlich verliert. Ist daher c_1 die Geschwindigkeit $\overline{Wc_1}$, Fig. 375, des eintretenden Wassers, so folgt die noch übrig bleibende Wirkung seiner lebendigen Kraft:

$$L_1 = \left(\frac{c_1^2 - v_1^2 - w_1^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Nun läßt sich aber c_1 in die Seitengeschwindigkeiten $\overline{Wv_1} = v_1$ und $\overline{Ww_1} = w_1$ theilen, wovon v_1 eben diejenige Geschwindigkeit ist, die das

Fig. 375.



Wasser behält, indem es mit der Zelle fortgeht, es ist daher auch der andere Componente w_1 die verlorene Geschwindigkeit. Setzen wir den Winkel $c_1 W v_1$, welchen die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit c_1 mit der Tan-

gente $W v_1$ oder Richtung der Umfangsgeſchwindigkeit einſchließt, $= \alpha_1$, ſo haben wir bekanntlich:

$$w_1^2 = c_1^2 + v_1^2 - 2 c_1 v_1 \cos. \alpha_1,$$

und daher die geſuchte mechaniſche Arbeit:

$$L_1 = \left(\frac{c_1^2 - v_1^2 - c_1^2 - v_1^2 + 2 c_1 v_1 \cos. \alpha_1}{2g} \right) Q \gamma$$

$$= \frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} Q \gamma,$$

oder da $\frac{1}{g} = 0{,}032$ und $\gamma = 61{,}75$ Pfund iſt,

$$L_1 = 1{,}976 \, (c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) \, v_1 \, Q \text{ Fußpfund, oder auch}$$

$$L_1 = 102 \, (c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) \, v_1 \, Q \text{ Meterkilogramm.}$$

Man erſieht leicht, daß dieſe Stoßleiſtung um ſo größer wird, je größer c_1 und je kleiner α_1 iſt; auch folgt durch Vergleichung mit Bd. I, §. 500, daß dieſe ein Maximum wird, wenn $v_1 = {}^1/_2 \, c_1 \cos. \alpha_1$ ausfällt. Die dem letzten Verhältniſſe entſprechende Maximalleiſtung iſt

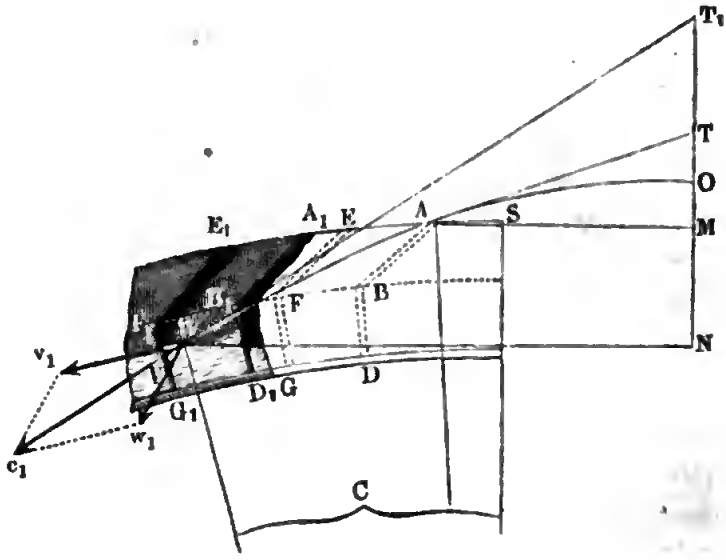
$$L_1 = {}^1/_2 \, \frac{c_1^2 \cos. \alpha_1^2}{2g} Q \gamma,$$

oder $\alpha_1 = 0$, alſo $\cos. \alpha_1 = 1$ geſetzt,

$$L_1 = {}^1/_2 \cdot \frac{c_1^2}{2g} Q \gamma.$$

Da $\frac{c_1^2}{2g}$ das der Geſchwindigkeit c_1 entſprechende Gefälle iſt, ſo folgt, daß die Stoßwirkung im günſtigſten Falle nur halb ſo groß iſt, als die

Fig. 376.



disponible Leiſtung. Und es iſt aus dieſem Grunde zweckmäßiger, vom ganzen Radgefälle nur den kleinſten Theil auf den Stoß und dagegen ſo viel wie möglich auf den Druck zu verwenden. Könnten wir $c_1 \cos. \alpha_1 = v_1$, alſo $c_1 = \frac{v_1}{\cos. \alpha_1}$ machen, ſo würden wir das Gefälle $\frac{v_1^2}{2g \cos. \alpha_1^2}$ zur Einführung des Waſſers in das Rad aufwenden, ohne eine Wirkung durch den Stoß zu erhalten. Machen wir hingegen $c_1 = \frac{2v_1}{\cos. \alpha_1}$, verwenden wir alſo auf die Einführung des Waſſers das vierfache Gefälle $4 \cdot \frac{v_1^2}{2g \cos. \alpha_1^2}$, ſo erhalten wir doch nur die Wirkung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{4 v_1^2}{2g} Q\gamma = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} Q\gamma,$$

und verlieren alſo gar das Gefälle $\left(\frac{4}{\cos. \alpha_1^2} - 2\right) \frac{v_1^2}{2g}$, oder, wenn wir, da α_1 ſehr klein iſt, $\cos. \alpha_1 = 1$ ſetzen, $= 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g}$, d. i. doppelt ſo viel, als wenn wir auf alle Stoßleiſtung Verzicht leiſten, alſo das Waſſer nur ſo ſchnell eintreten laſſen, als das Rad umgeht. Uebrigens erſehen wir auch, daß eine um ſo größere Wirkung vom Rade zu erwarten iſt, je kleiner v_1, d. i. je langſamer das Rad umgeht. Allerdings fällt aber die Radweite e oder der Faſſungsraum, und alſo auch das Gewicht des Waſſerrades, um ſo größer aus, je kleiner die Umfangsgeſchwindigkeit v oder Umdrehungszahl u des Rades iſt; da nun aber die Zapfen eines Rades um ſo ſtärker gemacht werden müſſen, je ſchwerer das Rad iſt, und das Moment der Zapfenreibung mit den Zapfenſtärken wächſt, ſo wird allerdings bei einem langſam umgehenden Rade mehr mechaniſche Arbeit durch die Zapfenreibung conſumirt als bei einem ſchneller umlaufenden, und es iſt hiernach leicht zu ermeſſen, daß die größte Leiſtung eines Waſſerrades noch keineswegs eine unendlich kleine Umdrehungsgeſchwindigkeit erfordert.

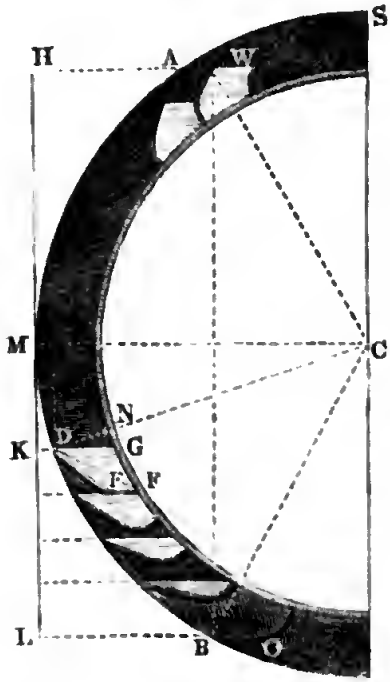
Da (nach §. 178) ſchon c größer als v ſein muß, ſo iſt um ſo mehr c_1 größer als v_1, es übertrifft daher der Arbeitsverluſt durch den Stoß ſtets die Größe

$$\frac{v_1^2}{2g} Q\gamma.$$

Druckwirkung. Die mit Waſſer gefüllten Zellen eines Waſſerrades §. 185
bilden gleichſam einen ringförmigen Waſſerraum AB, Fig. 377 (a. f. S.), den man deshalb auch den waſſerhaltenden Bogen nennt. Da das Waſſer am oberen Ende dieſes Bogens ein- und am unteren Ende austritt,

ſo iſt deſſen Höhe h_2 das wirkſame Gefälle, und daher die mechaniſche Leiſtung des Rades durch Druck, $= h_2 . Q\gamma$. Die Höhe des waſſerhaltenden Bogens läßt ſich aber aus drei Theilen zuſammenſetzen. Der erſte Theil HM liegt über dem Radmittel und hängt von dem Winkel $SCW = \theta_1$ ab, um welchen die aus §. 183 bekannte Eintrittsſtelle W des Waſſers in das Rad vom Radſcheitel abſteht. Setzen wir wieder den Halbmeſſer $CW = a_1$, ſo haben wir die Höhe des oberſten Theiles vom waſſerhaltenden Bogen,

Fig. 377.



$$\overline{HM} = a_1 \cos.\theta_1.$$

Der zweite Theil MK liegt unter dem Radmittel M und hängt von der Stelle D ab, wo das Waſſer anfängt auszufließen; ſetzen wir den Winkel MCD, um welchen dieſe Stelle unter dem Radmittel liegt, $= \lambda$, ſo haben wir dieſe zweite Höhe $\overline{MK} = a \sin.\lambda$. Der dritte Theil entſpricht endlich demjenigen Bogen DB, in welchem das Ausleeren vor ſich geht, der alſo zwiſchen dem Anfange D und dem Ende B des Austrittes liegt. Setzen wir den Winkel MCB, um welchen die Stelle B, wo das letzte Waſſer aus dem Rade tritt, unter dem Radmittel M liegt, $= \lambda_1$, ſo haben wir die Höhe KL deſſelben $= a\,(\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)$. Während nun in den erſten beiden Bogentheilen das Waſſer zur vollſtändigen Wirkung gelangt, theilt es in dem unteren Drittel nur einen Theil ſeiner mechaniſchen Arbeit dem Rade mit, weil es ſich hier allmälig vom Rade entfernt, und wir können daher die ganze Wirkung des Waſſers durch ſein Gewicht nur

$$= (a_1 \cos.\theta_1 + a \sin.\lambda)\, Q\gamma + a\,(\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)\, Q_1\gamma$$

ſetzen, wenn Q das ganze Aufſchlagwaſſerquantum pr. Secunde, Q_1 aber nur einen Theil deſſelben und zwar das mittlere Waſſerquantum bezeichnet, welches wir im Bogen DB wirkend annehmen können.

Vereinigen wir hiermit die Stoßleiſtung des Waſſers, ſo bekommen wir die ganze mechaniſche Arbeit eines oberſchlägigen Waſſerrades:

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha - v_1)v_1}{g} + a_1 \cos.\theta_1 + a \sin.\lambda\right) Q\gamma + a\,(\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)\, Q_1\gamma.$$

oder, wenn wir die Höhe $(a_1 \cos.\theta_1 + a \sin.\lambda)$ des Theiles vom waſſer-

haltenden Bogen, welcher das vollständige Wasserquantum aufnimmt, durch h_3, den übrigen Theil $a(\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)$ aber durch h_4 und das Verhältniß $\frac{Q_1}{Q}$ durch ξ bezeichnen:

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma,$$

und die Kraft am Umfange des Wasserrades:

$$P = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) \frac{Q}{v}\gamma.$$

Beispiel. Bei einem 30 Fuß hohen oberschlägigen Wasserrade ist die Eintrittsgeschwindigkeit $c_1 = 16$ Fuß, die Geschwindigkeit der Theilrisse, $v_1 = 7$ Fuß der Winkel α_1, um welchen die Strahlrichtung von der Bewegungsrichtung des Rades an der Eintrittsstelle W abweicht, $= 12^0$, und der Halbmesser oder Abstand $CW = 14$ Fuß, ferner der Abstand dieser Stelle vom Scheitel, $WCS = 18^0$, der Abstand der Anfangsstelle D des Ausgusses vom Radmittel, $\lambda = 58\frac{1}{2}^0$, und der Abstand der Endstelle B von eben diesem Mittel, $\lambda_1 = 70\frac{1}{2}^0$, endlich das Aufschlagequantum $Q = 5$ Cubikfuß, und es werde $\xi = \frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{2}$ angenommen: man sucht die Leistung des Rades. Es ist das wirksame Stoßgefälle

$= 0{,}032\ (16\ \cos.12^0 - 7).7 = 0{,}224\ (15{,}65 - 7) = 1{,}937$ Fuß;

und das Druckgefälle:

$= 14\ \cos.18^0 + 15\ [\sin.58\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ (\sin.70\frac{1}{2} - \sin.58\frac{1}{2})]$

$= 13{,}315 + 15\ (0{,}8526 + \frac{1}{2}.0{,}09) = 13{,}315 + 13{,}464 = 26{,}779$ Fuß;

folglich die ganze Leistung des Wasserrades:

$L = (1{,}937 + 26{,}779).5.61{,}75 = 28{,}716.308{,}75 = 8866$ Fußpfund

$= 18{,}5$ Pferdekräfte.

Die Kraft am Umfange des Rades, dessen Geschwindigkeit $v = 7\frac{1}{2}$ Fuß mißt, beträgt folglich: $P = \frac{L}{v} = \frac{8862}{7{,}5} = 1182$ Pfund.

Austritt des Wassers aus dem Rade. Man sieht hiernach leicht §. 186
ein, daß es bei genauer Bestimmung der Druckwirkung des Wassers bei einem oberschlägigen Rade besonders darauf ankommt, die beiden Grenzen des Ausgußbogens und das Verhältniß $\xi = \frac{Q_1}{Q}$ der mittleren Wassermenge einer Zelle im Ausgußbogen zur anfänglichen Wassermenge in einer Zelle zu finden. Hierüber sollen daher in Folgendem die nöthigen Regeln gegeben werden.

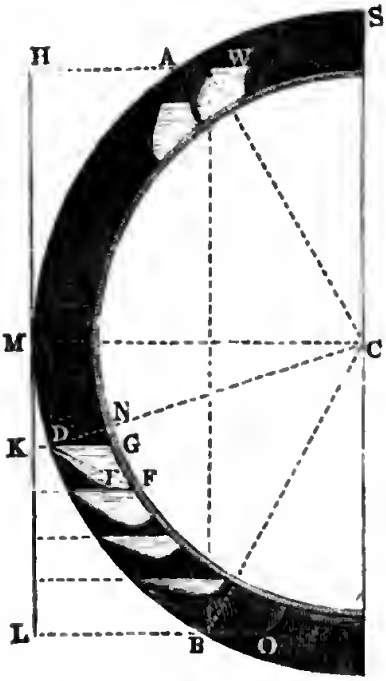
Hat das Rad n Schaufeln oder Zellen und macht es pr Minute u Umdrehungen, so werden dem Wasser in jeder Secunde $\frac{nu}{60}$ Zellen zur Aufnahme der Wassermenge Q dargeboten, und es kommt daher auf eine Zelle das Wasserquantum:

$$V = Q : \frac{nu}{60} = \frac{60\,Q}{nu}.$$

Bezeichnet e, wie früher, die Radweite, ſo folgt der Querſchnitt des Waſſerprismas in einer Zelle:

$$F_0 = \frac{V}{e} = \frac{60\,Q}{nue}. \quad \text{(S. §. 183.)}$$

Fig. 378.



Iſt nun $DEFG$, Fig. 378, diejenige Zelle, bei welcher das Ausgießen anfängt, ſo können wir ſetzen:

$F_0 =$ Segment $DEF +$ Dreieck DFG,

oder da Dreieck $DFG =$ Dreieck DFN — Dreieck DGN iſt,

$F_0 =$ Segment $DEF +$ Dreieck DFN — Dreieck DGN.

Setzen wir nun den Inhalt des Segmentes $DEF = S$, und den des Dreieckes $DFN = D$, ſo haben wir das Dreieck $DGN = S + D - F_0$. Da ſich aber $\triangle DGN$ auch $= \frac{DN.NG}{2} = {}^1/_2 d^2\, tg.\, \lambda$ annehmen läßt, ſo folgt endlich annähernd, und zwar um ſo richtiger, je größer die Anzahl der Schaufeln iſt,

$$tang.\, \lambda = \frac{S + D - F_0}{{}^1/_2 d^2}.$$

Hiernach iſt der Winkel $MCD = \lambda$ beſtimmt, welcher dem Anfangspunkte D des Ausguſſes entſpricht. Eine Zelle wird ferner das Waſſer gänzlich verloren haben, wenn das äußere Schaufelende horizontal liegt; iſt daher Winkel CBO, welchen dieſes Ende, oder nach Befinden, die ganze Stoßſchaufel mit der Richtung des Halbmeſſers CB einſchließt, $= \lambda_1$, ſo wird λ_1 auch zugleich den Winkel MCB angeben, welcher den Endpunkt B des Ausgußbogens beſtimmt. Um nun die Wirkung des Waſſers im Ausgußbogen zu finden, theilen wir die Höhe $KL = a\,(sin.\,\lambda_1 - sin.\,\lambda)$ in eine gerade Anzahl gleicher Theile, geben die den erhaltenen Theilpunkten entſprechenden Schaufelſtellungen an, ſchneiden durch Horizontallinien die Querprofile der Waſſermengen der Zelle bei dieſen verſchiedenen Stellungen an, und beſtimmen die Inhalte $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ dieſer Querprofile. Nun wird der mittlere Werth F dieſer Profile durch die Simpſon'ſche Regel ermittelt, indem man ſetzt:

$$F = \frac{F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{n-2})}{3n},$$

und hieraus erhält man das Verhältniß der mittleren Wassermenge einer Zelle im Ausgußbogen zur Wassermenge einer Zelle vor Anfang des Ausgusses:

$$\xi = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F}{F_0} = \frac{F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots F_{n-2})}{3\,n\,F_0}.$$

Beispiel. Ein 40 Fuß hohes Wasserrad soll pr. Minute 300 Cubikfuß Aufschlagewasser erhalten und innerhalb eben dieser Zeit vier Umdrehungen machen; man sucht die Leistung dieses Rades. Nehmen wir die Radtiefe oder Kranzbreite 1 Fuß an, so können wir die Radweite

$$e = \frac{4 \,.\, 300}{\pi \,.\, 40 \,.\, 1 \,.\, 4} = \frac{30}{4\,\pi} = 2{,}4 \text{ Fuß}$$

machen; geben wir dem Rade 136 Schaufeln, so erhalten wir das Wasserquantum in einer Zelle:

$$V = \frac{300}{4 \,.\, 136} = \frac{75}{136} = 0{,}5515 \text{ Cubikfuß},$$

und demnach den Querschnitt desselben:

$$F_0 = \frac{0{,}5515}{2{,}4} \text{ Quadratfuß} = \frac{144 \,.\, 0{,}5515}{2{,}4} = 33{,}09 \text{ Quadratzoll}.$$

Bei der angewandten und aus Fig. 379 zu ersehenden Schaufelconstruction ergiebt sich durch genaue Messung der Inhalt des Segmentes $A_0 B D$, $S = 24{,}50$ Quadratzoll, und der des Dreieckes $A_0 F D = 102$ Quadratzoll; es folgt daher für den Anfang des Ausgusses:

$$tang.\,\lambda = \frac{24{,}50 + 102 - 33{,}09}{\frac{1}{2} \,.\, 144} = \frac{93{,}41}{72} = 1{,}2973\ldots,$$

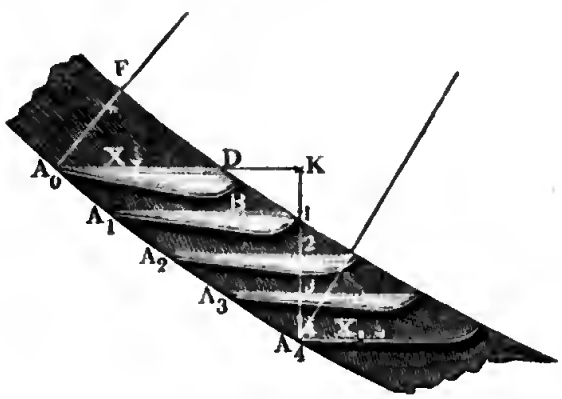
also:

$$\lambda = 52^\circ 22\tfrac{1}{2}'.$$

Der Winkel, unter welchem das äußere Schaufelende den Halbmesser des Rades trifft, ist $\lambda_1 = 62^\circ 30'$, daher die Höhe $K A_4$ des wasserhaltenden Bogentheiles, in welchem das Ausleeren erfolgt,

$$= a\,(sin.\,\lambda_1 - sin.\,\lambda)$$
$$= 20\,(0{,}8870 - 0{,}7920)$$
$$= 1{,}9 \text{ Fuß}.$$

Fig. 379.



Verzeichnet man nun innerhalb dieser Höhe noch drei Schaufelstellungen, so findet man durch Messung und Rechnung die Querschnitte der Wasserkörper einer Schaufel bei diesen Stellungen:

$F_1 = 24{,}50$; $F_2 = 14{,}48$ und $F_3 = 6{,}60$ Quadratzoll.

Da nun noch der Querschnitt am Anfang, $F_0 = 33{,}09$ und der am Ende $F_4 = 0$ ist, so hat man die Verhältnißzahl:

$$\xi = \frac{F}{F_0} = \frac{33{,}09 + 4\,(24{,}50 + 6{,}60) + 2 \,.\, 14{,}48}{12 \,.\, 33{,}09} = \frac{15{,}5375}{33{,}09} = 0{,}469.$$

Wäre nun noch die Höhe des obersten Wasserspiegels über der Radmitte M, $a_1\,cos.\,\theta_1 = 18$ Fuß, so würde die Leistung des Wasserrades durch das Gewicht des Wassers, ohne Rücksicht auf den Stoß und auf die Zapfenreibung betragen:

$$L = (a_1 \cos.\theta_1 + a[\sin.\lambda + 0{,}469\ (\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)])\ Q\gamma$$
$$= [18 + 20\ (0{,}7920 + 0{,}469\,.\,0{,}0950)]\ 5\,.\,61{,}75$$
$$= (18 + 16{,}73)\,.\,308{,}75 = 10723 \text{ Fußpfund} = 22^1/_3 \text{ Pferdekräfte.}$$

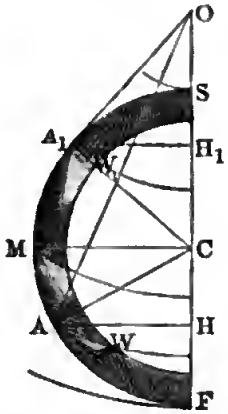
Anmerkung. Die Höhe des wasserhaltenden Bogens von Wasserspiegel zu Wasserspiegel zu messen, ist nur annähernd richtig; eigentlich hat man dieselbe vom Schwerpunkt zum Schwerpunkt des Wassers in einer Zelle zu nehmen.

§. 187 **Einfluss der Centrifugalkraft.** Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit haben kleine Räder eine größere Umdrehungszahl als große; überdies erfordert es oft der gleichförmige Gang oder der Zweck der Maschinen, z. B. bei Sägemühlen, Hammerwerken u. s. w., kleinen Rädern eine mehr große als kleine Geschwindigkeit zu geben. Aus diesen Gründen machen kleine Räder oft eine große Anzahl (25) von Umdrehungen in der Minute. Bei diesem großen Werthe von u fällt aber die Centrifugalkraft des Wassers in den Zellen so groß aus, daß die Neigung der Oberfläche desselben gegen den Horizont (s. Bd. I, §. 354) sehr bedeutend wird, und daher ein viel zeitigeres Austreten erfolgt, als wenn das Rad langsam umginge. Wir haben an dem citirten Orte gefunden, daß die Oberflächen des Wassers in den Radzellen lauter concentrische Cylindermäntel bilden, deren gemeinschaftliche Axe O, Fig. 380, parallel mit der Radaxe läuft und um die Höhe

$$\overline{CO} = k = \frac{g}{\omega^2} = g \cdot \left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß}$$

über der Radaxe C steht. Es wächst also dieser Abstand umgekehrt wie das Quadrat der Umdrehungszahl, und fällt bei einer großen Umdrehungszahl ziemlich klein aus. Man findet nun sogleich, daß nur im Radscheitel S und im Radfuße F der Wasserspiegel horizontal ist, daß er dagegen an einer gewissen Stelle oberhalb des Radmittels M am meisten vom Horizont abweicht. Es ist die Abweichung $HAW = AOC = \chi$ für irgend einen Punkt A, welcher um $ACM = \lambda$ unter dem Radmittel steht,

Fig. 380.



$$tang.\,\chi = \frac{AH}{OH} = \frac{a\cos.\lambda}{k + a\sin.\lambda}.$$

Für einen Punkt A_1 oberhalb M ist λ negativ, daher:

$$tang.\,\chi = \frac{a\cos.\lambda}{k - a\sin.\lambda}.$$

Legt man von O aus eine Tangente OA_1 an den Radumfang, so erhält man im Berührungspunkte A_1 diejenige Stelle, wo der Wasserspiegel am meisten vom Horizonte abweicht, wo also χ ein Maximum, und zwar $= \lambda$ ist, und durch

$$\sin.\,\chi = \frac{a}{k} = \frac{\pi^2 a u^2}{900\,g} = \frac{a u^2}{2850} \text{ bestimmt wird.}$$

Es nimmt alſo die Neigung χ des Waſſerſpiegels mit dem Radhalbmeſſer a und dem Quadrate der Umdrehungszahl u proportional zu.

Beiſpiel. 1. Für ein Rad, welches in der Minute fünf Umdrehungen macht, iſt $k = {}^{2850}/_{25} = 114$ Fuß, wäre nun noch der Radhalbmeſſer $a = 16$ Fuß, und der Ausgußwinkel $\lambda = 50^0$, ſo hätte man für die Ausgußſtelle:

$$tang.\,\chi = \frac{16\,cos.\,50^0}{114 + 16\,sin.\,50^0} = \frac{10{,}285}{126{,}256},$$

daher $\chi = 4^0\,39'$; es wiche alſo an dieſem Punkte der Waſſerſpiegel beinahe $4^1/_3{}^0$ vom Horizonte ab.

2. Für ein Rad mit 20 Umdrehungen hat man:

$$k = \frac{2850}{400} = 7{,}125 \text{ Fuß};$$

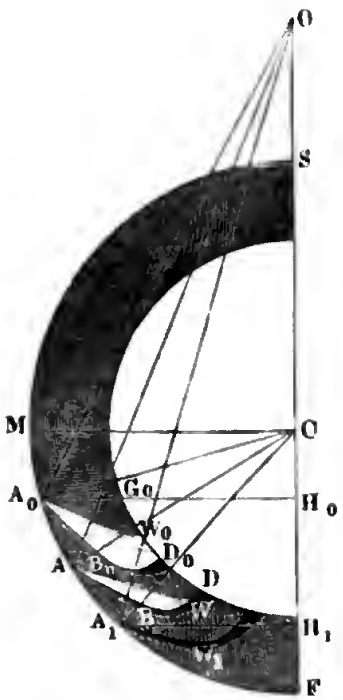
iſt nun noch $a = 5$ Fuß und $\lambda = 0^0$, ſo hat man:

$$tang.\,\chi = \frac{5}{7{,}125}, \text{ daher } \chi = 35^0\,3';$$

endlich $44^0\,34'$ oberhalb des Radmittels iſt dieſe Abweichung ſogar $44^0\,34'$.

Wenn wir nun den Einfluß der Centrifugalkraft berückſichtigen, was bei §. 188
ſchnell umlaufenden Waſſerrädern unbedingt nothwendig iſt, ſo müſſen die oben gefundenen Formeln für den Ausgußbogen durch andere erſetzt werden.

Fig. 381.



Es ſei A_0, Fig. 381, die Anfangsſtelle des Ausguſſes, $M\,C\,A_0 = H_0\,A_0\,C = \lambda$ der Ausgußwinkel, $H_0\,A_0\,W_0 = A_0\,O\,C = \chi$ die Depreſſion des Waſſerſpiegels unter dem Horizonte, alſo:

$$\angle\, G_0\,A_0\,W_0 = \lambda + \chi \text{ und}$$
$$\triangle\, A_0\,G_0\,W_0 = {}^1/_2\,d\,.\,d\,tang.\,(\lambda + \chi)$$
$$= {}^1/_2\,d^2\,tang.\,(\lambda + \chi).$$

Setzen wir nun wieder den Inhalt des Segmentes $A_0\,B_0\,D_0 = S$, den des Dreieckes $A_0\,G_0\,D_0 = D$, und den Querſchnitt des Waſſerkörpers $= F_0$, ſo erhalten wir: $F_0 + {}^1/_2\,d^2\,tang.\,(\lambda + \chi) = S + D$, und daher:

$$1)\quad tang.\,(\lambda + \chi) = \frac{S + D - F_0}{{}^1/_2\,d^2}.$$

Noch iſt aber $\frac{sin.\,A_0\,O\,C}{sin.\,O\,A_0\,C} = \frac{C\,A_0}{C\,O}$, d. i.:

$$\frac{sin.\,\chi}{sin.\,[90^0 - (\lambda + \chi)]} = \frac{a}{k},$$

daher folgt dann:

$$2)\quad sin.\,\chi = \frac{a\,cos.\,(\lambda + \chi)}{k}.$$

Nachdem man durch die erſte Formel $\lambda + \chi$ und durch die zweite die Depreſſion χ gefunden hat, erhält man durch Subtraction dieſer beiden Winkel von einander den Ausgußwinkel:

$$\lambda = (\lambda + \chi) - \chi.$$

Am Ende A_1 des Ausgußbogens fällt das äußere Schaufelende mit dem Waſſerſpiegel $A_1 W_1$ zuſammen, es iſt alſo dort $CA_1 W_1 = \lambda_1 + \chi_1 =$ dem bekannten, durch die Schaufeldeckung beſtimmten Winkel $\delta = 90° - \beta$, daher: $sin.\,\chi_1 = \frac{a\,cos.\,\delta}{k} = \frac{a\,sin.\,\beta}{k}$, und $\lambda_1 = \delta - \chi_1$,

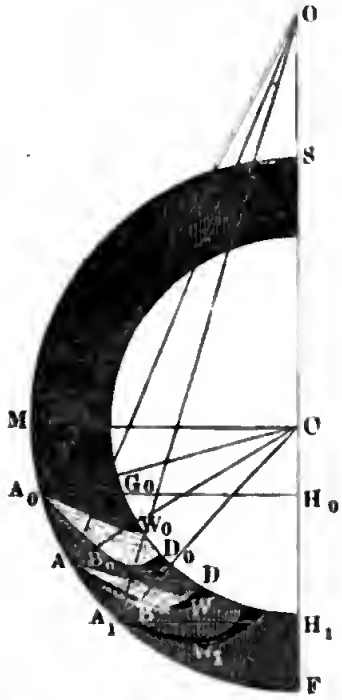
d. i. der Winkel, um welchen das Ende A_1 des Ausgußbogens vom Radmittel M abſteht.

Wenn man nun die ſich auf dieſe Weiſe herausſtellende Höhe

$$H_0 H_1 = h_4 = a\,(sin.\,\lambda_1 - sin.\,\lambda),$$

Fig. 382, des Ausgußbogens in eine paare Anzahl (4 oder 6) gleicher Theile theilt, und die Schaufelfüllungen für die entſprechenden Schaufelſtellen ermittelt, ſo kann man wieder das Verhältniß

Fig. 382.



$$\xi = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F}{F_0}$$

der mittleren Schaufelfüllung während des Ausgießens zur Füllung vor dem Ausgießen finden, und hiernach die Wirkung des Waſſers im Ausgußbogen berechnen. Hierbei ſind natürlich die obigen Formeln umgekehrt zu gebrauchen. Es iſt hier λ gegeben, hiernach

$$tang.\,\chi = \frac{a\,cos.\,\lambda}{k + a\,sin.\,\lambda} \text{ und}$$

$$F = S + D - {}^1/_2\,d^2\,tang.\,(\lambda + \chi).$$

Füllt das Waſſer nicht mehr das ganze Segment aus, iſt alſo $F < S$, alſo

$${}^1/_2\,d^2\,tang.\,(\lambda + \chi) > D,$$

ſo hat man zu ſetzen (ſ. Fig. 382):

$$F = \text{Segment } ABD - \triangle\, ADW,$$

und bei geraden Schaufeln

$$F = S - {}^1/_2\,s^2 . \frac{sin.\,(\lambda + \chi - \delta)\;sin.\,\delta_1}{sin.\,(\lambda + \chi)},$$

wo s die Diagonale AD, und δ_1 den Winkel DAC bezeichnet, welchen dieſelbe mit dem Halbmeſſer CA einſchließt.

Beiſpiel. Das kleine hölzerne Waſſerrad in Fig. 383 hat 12 Fuß Höhe, 1 Fuß Tiefe, 4 Fuß Weite und nimmt bei 17 Umläufen pr. Minute 1080 Cubikfuß Aufſchlag auf, man ſucht die mechaniſche Leiſtung deſſelben. Es iſt hier:

$$a = 6,\ d = 1,\ e = 4,\ a_1 = 5{,}5,\ Q = \frac{1080}{60} = 18 \text{ und } u = 17;$$

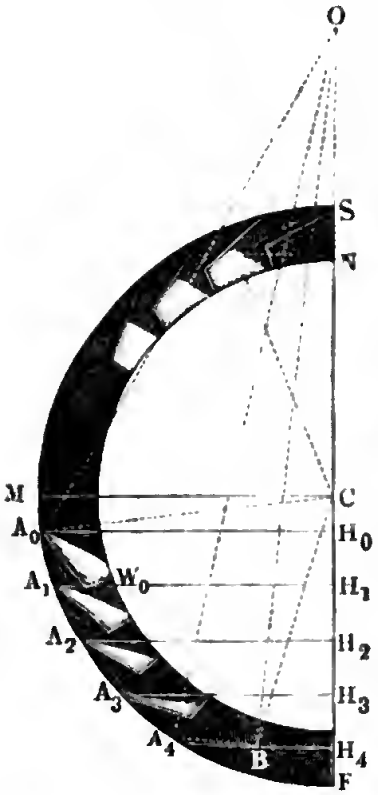
giebt man nun dem Rade 24 Schaufeln, ſo hat man:

$$\varphi^0 = \frac{360^0}{24} = 15^0 \quad \text{und} \quad F_0 = \frac{1080}{24 \,.\, 17 \,.\, 4} = \frac{45}{68} = 0{,}662 \text{ Quadratfuß.}$$

Iſt ferner $D = 0{,}652$ und $S = 0{,}373$, ſo hat man:

$$tang.\ (\lambda + \chi) = \frac{0{,}373 + 0{,}652 - 0{,}662}{1/2} = 0{,}363 \,.\, 2 = 0{,}726,$$

Fig. 383.



daher:

$$\lambda + \chi = 35^0{,}59'.$$

Nun iſt $\overline{C\,O} = k = \frac{2850}{17^2} = 9{,}86$ Fuß, daher:

$$sin.\ \chi = \frac{6\ cos.\ 35^0{,}59'}{9{,}86} = 0{,}4924,$$

hiernach:

$$\chi = 29^0\,30' \text{ und } \lambda = 6^0{,}29'.$$

Es fängt hier alſo der Ausguß ſchon $6^1/_2{}^0$ unter dem Radwinkel an. Um die Stelle zu finden, wo der Ausguß beendigt iſt, hat man in dem vorliegenden Falle, wo ſich noch etwas Waſſer in der Zelle erhält, wenn auch der Waſſerſpiegel das äußere Ende der Schaufel berührt, in der Formel

$$sin.\ \chi_1 = \frac{a\ sin.\ \beta}{k}$$

ſtatt a den Theilkreishalbmeſſer $a_1 = 5{,}5$ und ſtatt β den Eintrittswinkel, welcher hier $= 10^0\,46'$ beträgt, zu ſetzen. Es iſt ſonach:

$$sin.\ \chi_1 = \frac{5{,}5\ sin.\ 10^0\,46'}{9{,}86}, \text{ daher:}$$

$$\chi_1 = 5^0\,59',$$

und der zweite Ausgußwinkel:

$$\lambda_1 = 79^0\,14' - 5^0\,59' = 73^0\,15'.$$

Hiernach iſt nun die Höhe des Ausgußbogens:

$$h_4 = a_1\ sin.\ \lambda_1 - a\ sin.\ \lambda = 5{,}5\ sin.\ 73^0\,15' - 6{,}0\ sin.\ 6^0\,29'$$
$$= 5{,}2666 - 0{,}6775 = 4{,}589 \text{ Fuß.}$$

Dieſe Höhe theilen wir in vier gleiche Theile, und beſtimmen nun durch Zeichnung, genaue Meſſung und Rechnung noch die entſprechenden drei Zwiſchenwerthe von F. Die erlangten Ergebniſſe ſind: $F_1 = 0{,}501$, $F_2 = 0{,}409$, $F_3 = 0{,}195$; daher das geſuchte Querſchnittsverhältniß:

$$\xi = \frac{F}{F_0} = \frac{0{,}662 + 4\,(0{,}501 + 0{,}195) + 2 \,.\, 0{,}409}{12 \,.\, 0{,}662} = 0{,}537,$$

und die mechaniſche Arbeit des Waſſers beim Herabſinken im Ausgußbogen:

$$L_4 = \xi \,.\, h_4\ Q\gamma = 0{,}537 \,.\, 4{,}589 \,.\, 18 \,.\, 61{,}75 = 2739 \text{ Fußpfund.}$$

Fiele das Waſſer mit 20 Fuß Geſchwindigkeit 20^0 unter dem Radſcheitel ſo ein, daß ſeine Richtung um 25^0 von der Tangente am Eintrittspunkte abwiche, ſo hätte man noch die übrige Druckwirkung:

$$L_3 = (5{,}5\ cos.\ 20^0 + 6\ sin.\ 6^0\,29') \ 18 \,.\, 61{,}75 = 5{,}845 \,.\, 1111{,}5$$
$$= 6497 \text{ Fußpfund},$$

und die Stoßwirkung, da die Geſchwindigkeit im Theilriſſe

$$v_1 = \frac{11 \,.\, \pi \,.\, 17}{60} = 9{,}791 \text{ Fuß}$$

iſt:

$$L_1 = 0{,}032\ (20\ cos.\ 25^0 - 9{,}791)\ 9{,}791 \,.\, 18 \,.\, 61{,}75 = 2{,}611 \,.\, 18 \,.\, 61{,}75$$
$$= 2902 \text{ Fußpfund}.$$

Demnach wäre die ganze Leiſtung dieſes Rades:

$$L = L_1 + L_3 + L_4 = 12138 \text{ Fußpfund}.$$

§. 189 **Stärke der Radarme.** Von der Größe und Art der Wirkung eines Waſſerrades hängen auch noch die erforderlichen Querſchnittsdimenſionen der Radarme, ſowie die Stärke der Welle und die der Wellenzapfen ab. Um dieſe Raddimenſionen zu ermitteln, hat man vorzüglich den vierten Abſchnitt des erſten Theiles dieſes Werkes zu Rathe zu ziehen.

In der Regel wird die Kraft des Waſſerrades durch ein Zahnrad weiter fortgepflanzt, und daſſelbe ſitzt entweder

1) auf der Waſſerradwelle, oder
2) auf einem der Armſyſteme (Armgeviere), oder
3) an einem der Radkränze feſt.

Im erſteren Falle wird die Kraft des Waſſers durch die Radarme auf die Welle und von dieſer wieder auf das Transmiſſionsrad übergetragen; im zweiten Falle geht hingegen die Waſſerkraft nur mittels der Radarme auf das Transmiſſionsrad über, und im dritten Falle erfolgt die Uebertragung der Waſſerkraft faſt unmittelbar. Der erſtere Fall iſt bei weitem der häufigere, um ſo mehr, da hierzu auch die Fälle zu rechnen ſind, wo die Transmiſſion nicht durch Zahnräder, ſondern durch Trommeln, Kurbeln u. ſ. w. erfolgt.

Bezeichnet m die Anzahl der Arme des Waſſerrades, ferner b_1 die Breite und h_1 die Dicke eines Armes, jene parallel zur Radaxe und dieſe parallel zum Radumfange gemeſſen, ſo hat man nach der aus Bd. I, §. 236 bekannten Formel

$$Pl = b_1 h_1^2 \,.\, \frac{T}{6},$$

da hier P die Kraft, $\frac{P}{m}$ und l die Länge a eines Radarmes in Zollen bedeuten,

$$\frac{Pa}{m} = 9{,}549\ \frac{L}{mu} = b_1 h_1^2 \cdot \frac{T}{6}$$

zu ſetzen, und iſt nun noch das Dimenſionsverhältniß $\frac{b_1}{h_1} = \mu$ ein beſtimm-

tes, z. B. bei Holz $= 5/7$ und bei Gußeiſen $1/5$, ſo erhält man hiernach für die geſuchte Dicke der Radarme:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{6}{\mu T} \cdot \frac{Pa}{m}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\mu T} \cdot 9{,}549 \frac{L}{mu}} = 3{,}86 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T m u}}.$$

Drückt man, wie gewöhnlich, a in Fuß und L in Pferdekräften (jede zu 480 Fußpfund) aus, ſo erhält man:

$$h_1 = 4{,}16 \sqrt[3]{\frac{Pa}{\mu T m}} = 69{,}2 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T m u}} \text{ Zoll.}$$

Nimmt man nun noch für Holz $\mu = 5/7$ und $T = 1000$ Pfund an (ſ. Bd. I, §. 240), ſo erhält man für hölzerne Arme:

$$h_1 = 0{,}465 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 7{,}74 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Der Sicherheit wegen, und weil die Arme auch noch das Gewicht des Rades aufnehmen müſſen, nimmt man in der Ausführung reichlich das Doppelte, und ſetzt hiernach:

I. $$h_1 = 0{,}95 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Nimmt man dagegen für Gußeiſen $\mu = 1/5$ und $T = 7000$ an, ſo erhält man für gußeiſerne Arme:

$$h_1 = 0{,}372 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 6{,}19 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}}.$$

In der Praxis nimmt man nahe das Doppelte an, nämlich:

II. $$h_1 = 0{,}7 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 12 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Beiſpiel. Wenn ein hölzernes oberſchlägiges Waſſerrad mit 16 Armen in der Minute fünf Umdrehungen machen, und eine Leiſtung von 20 Pferdekraft aufnehmen und mittels ſeiner Welle fortpflanzen ſoll, ſo müſſen deſſen Arme folgende Querſchnittsdimenſionen erhalten:

$$h_1 = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{20}{16 \cdot 5}} = 15{,}5 \sqrt[3]{0{,}25} = 9{,}6 \text{ Zoll}$$

und $b_1 = \mu h_1 = 5/7 \cdot 9{,}6 = 7$ Zoll.

Nach den äußeren Enden zu können natürlich dieſe Dimenſionen etwas abnehmen.

§. 190

Wenn die Kraft eines oberſchlägigen Waſſerrades durch ein am Radumfange angebrachtes Zahnrad fortgepflanzt wird, ſo haben die Radarme hauptſächlich nur das Gewicht des Rades zu tragen, und es iſt daher in dieſem Falle die Stärke der Arme faſt nur von dem Radgewichte abhängig. Da während einer Umdrehung des Rades die Arme deſſelben nach

und nach in alle möglichen Stellungen gegen die Richtung der Schwere kommen, ſo iſt auch die Kraft, welche ein Radarm hierbei aufzunehmen hat, veränderlich, und es ſind daher bei Beſtimmung des Querſchnittes eines Armes verſchiedene Stellungen in Betracht zu ziehen. Setzen wir zunächſt nur ein Armſyſtem mit ſechs Armen CB, CD, CE..., Fig. 384 und Fig. 385, ſowie eine vollkommene Starrheit des Radkranzes voraus. Bei der Stellung in Fig. 384 ſind zwei Arme, CB, CB, verticale, und vier Arme, CD, CE u. ſ. w., unter 30 Grad gegen den Horizont geneigt. Der aufſteigende Arm widerſteht durch ſeine Druck-, der abwärts gerichtete Arm durch ſeine Zug-, und die übrigen Arme widerſtehen durch ihre zuſammengeſetzte Feſtigkeit, und zwar die Arme CD, CD durch Druck- und Biegungs-, dagegen die Arme CE und CE durch Zug- und Biegungsfeſtigkeit. Da die Widerſtände des Druckes und Zuges dem Rade nur eine ſehr kleine verticale Senkung geſtatten, ſo ſind auch die Biegungen der Arme ſehr klein, und wir können deshalb die Kraft, welche die Biegung aufnimmt, ganz außer Betracht laſſen.

Fig. 384.

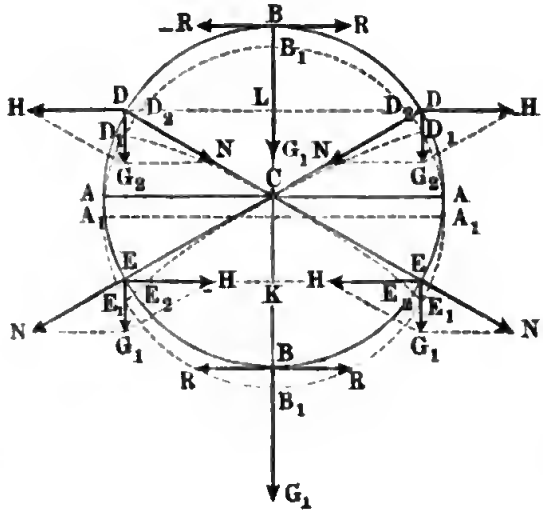
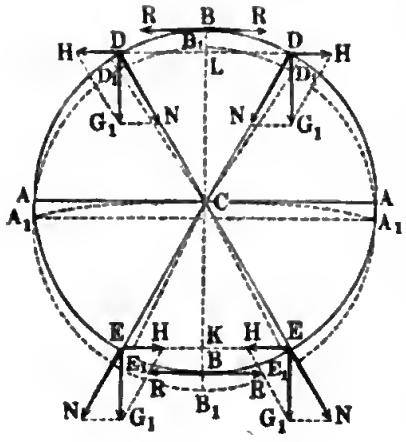


Fig. 385.



Es ſei G derjenige Theil des Radgewichtes, welchen das in Betrachtung zu ziehende Armſyſtem auf die Welle C überzutragen hat, ferner G_1 der Theil des Gewichtes, welchen jeder der beiden verticalen Arme, und G_2 der Theil, welchen jeder der beiden geneigten Arme aufnimmt. Die letztere Kraft zerlegt ſich in eine horizontale Kraft:

$$H = G_2 \, tang. \, 60^0 = \sqrt{3} . G_2,$$

und in eine Kraft nach der Richtung des Armes:

$$N = \frac{G_2}{\cos. 60^0} = 2\,G_2.$$

Da ſich die Horizontalkräfte H, H... gegenſeitig im Rade aufheben, ſo kann natürlich das letztere in Folge der Elaſticität der Radarme nur ſenkrecht, und zwar um die Größe $\overline{BB_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1} \ldots = \sigma$ ſinken. Nun entſpricht aber der Senkung $\overline{DD_1} = \overline{EE_1}$ ...der Armenden D, E... die Verkürzung oder Ausdehnung

$$\overline{DD_2} = \overline{EE_2} = \overline{DD_1}\cos. D_1\,DD_2 = \sigma \cos. 60^0 = {}^1/_2\,\sigma;$$

es iſt daher auch die Kraft N in der Richtung der Arme CD, CE... die Hälfte der Kraft G_1 des ſich um σ verkürzenden Armes CB, ſowie auch des ſich um σ ausdehnenden Armes CB, und folglich

$$G_2 = {}^1/_2\,N = {}^1/_4\,G_1$$

zu ſetzen.

Führen wir dieſen Werth in der Gleichung $2\,G_1 + 4\,G_2 = G$ ein, ſo erhalten wir folgende Ausdrücke für G_1 und G_2:

$$G_1 = {}^1/_3\,G \text{ und } G_2 = {}^1/_{12}\,G.$$

Bezeichnet endlich F den Querſchnitt eines Radarmes und T den Tragmodul deſſelben, ſo erhalten wir hiernach:

$$F = \frac{G_1}{T} = \frac{G}{3\,T},$$

ſowie:

$$F = \frac{N}{T} = \frac{2\,G_2}{T} = \frac{G}{6\,T}.$$

Es iſt natürlich der erſtere Querſchnitt in Anwendung zu bringen.

Bei der Armſtellung in Fig. 385, wo zwei Arme CA, CA horizontal ſind, werden nur die vier Arme CD, CD und CE, CE der Druck- und Zugfeſtigkeit ausgeſetzt, und es iſt die Druck- oder Zugkraft:

$$N = \frac{G_1}{\cos. 30^0} = G_1\sqrt{{}^4/_3} = \frac{G}{4}\sqrt{{}^4/_3},$$

folglich der entſprechende Armquerſchnitt:

$$F = \frac{N}{T} = \frac{G}{4\,T}\sqrt{{}^4/_3} = \frac{G}{3{,}464\,T},$$

alſo kleiner als für die Stellung in Fig. 384.

Der anzuwendende Armquerſchnitt bleibt alſo

$$F = \frac{G}{3\,T}.$$

Bei Anwendung von nur vier Armen iſt

$$F = \frac{G}{2\,T},$$

ſowie bei Anwendung von acht Armen

$$F = \frac{G}{4\,T}$$

zu ſetzen, wie durch eine ähnliche Unterſuchung leicht gefunden werden kann.

Iſt allgemein die Anzahl der Arme eines Rades $= m$ und das ganze Gewicht deſſelben $= G$, ſo beſtimmt ſich hiernach der Querſchnitt eines Radarmes einfach durch die Formel

$$F = \frac{2\,G}{m\,T}.$$

Für hölzerne Arme wäre nach Tabelle I. in §. 212 von Bd. I, $T = 2500$, dagegen für gußeiſerne, $T = 9120$ Pfund und nach Tabelle II, für ſchmiedeeiſerne, $T = 18000$ Pfund; da ſich aber lange Arme auch durch Druckkräfte leicht biegen und die Spannung derſelben während einer Umdrehung ſich unaufhörlich verändert, von dem erſten Werthe nur der zehnte und von den letzteren Werthen nur der fünfte Theil in Anwendung zu bringen, und hiernach

für hölzerne Arme

$$F = \frac{2\,G}{250\,m} = 0{,}008\,\frac{G}{m}$$

und dagegen für gußeiſerne Arme

$$F = \frac{2\,G}{1822\,m} = 0{,}0011\,\frac{G}{m}$$

und für ſchmiedeeiſerne

$$F = \frac{2\,G}{3600\,m} = 0{,}00056\,\frac{G}{m}$$ Quadratzoll

zu ſetzen.

Sind die Radkränze eines Waſſerrades durch ſchmiedeeiſerne Spannſtangen mit der Welle feſt verbunden, ſo wird das Rad nur von denjenigen Armen oder Stangen, welche abwärts gerichtet ſind, getragen. Es iſt daher dann

$$G_1 = {}^2/_3\,G \text{ und } G_2 = {}^1/_6\,G,$$

ſowie auch N und F doppelt ſo groß als bei einem ſteifen Armſyſtem.

Anmerkung. Mit Hülfe der vorſtehenden Theorie läßt ſich auch die erforderliche Stärke eines Radkranzes ermitteln. Jede Radhälfte wird von einem Kräftepaar $(H, -H)$ ergriffen, welches in den Punkten B, B Spannungen $R, -R$ hervorbringt, denen der Radkranz durch ſeine Feſtigkeit widerſtehen muß. Setzt man das Moment $R \cdot 2a$ des Paares $R, -R$, dem Momente Ha des Paares $H, -H$ gleich, ſo erhält man

$$R = {}^1/_2\,H = {}^1/_2\sqrt{3}\;G_2 = {}^1/_{24}\sqrt{3}\;G = 0{,}072\,G$$

und daher den nöthigen Querſchnitt des Radkranzes: $fd = \frac{R}{T}$, ſo wie die Dicke deſſelben:

$$f = \frac{0{,}072\,G}{d\,T}.$$

Um einen möglichſt ſteifen Radkranz zu erhalten, muß man
für hölzerne Kränze $T = 50$,
für gußeiſerner Kränze $T = 350$, und
für ſchmiedeeiſerne Kränze $T = 600$ Pfund annehmen.

Stärke der Waſſerradwelle. Die Stärke der Waſſerradwelle §. 191
beſtimmt ſich aus dem Kraftmomente des Rades bei in Betrachtnahme der Torſionsfeſtigkeit, ſowie aus dem Gewichte deſſelben bei Berückſichtigung der relativen Feſtigkeit. Zieht man bloß das Kraftmoment Pa in Betracht, ſo hat man der Theorie der Torſionsfeſtigkeit zu Folge (ſ. Bd. I, §. 264) für die Stärke einer gußeiſernen cylindriſchen Welle:

$$Pa = 360\, d^3 \text{ Zollpfund}$$

und folglich dieſe Stärke ſelbſt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pa}{360}} = 0{,}1406 \sqrt[3]{Pa},$$

oder, wenn man, wie gewöhnlich, Pa in Fußpfund ausdrückt,

$$d = 0{,}3218 \sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll.}$$

Giebt man die Leiſtung L der Maſchine in Pferdekräften, und die Umdrehungszahl u derſelben pr. Minute, ſo hat man:

$$Pa = \frac{30 . 480 . L}{\pi u} = 4584 \frac{L}{u},$$

und daher die geſuchte Wellenſtärke:

$$d = 0{,}3218 \sqrt[3]{4584} \sqrt[3]{\frac{L}{u}} = 5{,}35 \sqrt[3]{\frac{L}{u}},$$

wofür man jedoch in der Praxis

$$d = 0{,}361 \sqrt[3]{Pa} = 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll} = 16 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter}$$

annimmt.

Für ſchmiedeeiſerne Wellen iſt dagegen im Mittel

$$d = 0{,}301 \sqrt[3]{Pa} = 5 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll} = 13 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter}$$

zu ſetzen.

Hölzerne Waſſerradwellen macht man in der Praxis drei- bis viermal ſo ſtark als gußeiſerne Wellen, wiewohl aus theoretiſchen Gründen die reichliche zweifache Stärke ausreicht.

Für Wellen mit quadratiſchen Querſchnitten iſt die Seitenlänge $s = 0{,}94\, d$ zu ſetzen, und für hohle cylindriſche Wellen von der äußeren Weite d_1 und der inneren Weite d_2, ſtatt

$$d^3 = \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} = d_1^3 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = (1 - \psi^4)\, d_1^3,$$

alſo

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}},$$

wobei ψ das Verhältniß $\frac{d_2}{d_1}$ bezeichnet. Gewöhnlich nimmt man $\frac{d_2}{d_1} = 0{,}6$ an, und hat dann

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - 0{,}13}} = 1{,}05\, d,$$

ſowie

$$d_2 = 0{,}63\, d.$$

Die unmittelbare Anwendung dieſer Formeln ſetzt voraus, daß das Transmiſſionsrad auf der Waſſerradwelle ſitze; iſt aber daſſelbe mit einem Armſyſteme oder einem Radkranze verbunden, ſo wird durch die übrigen Armſyſteme nur ein Theil des ganzen Umdrehungsmomentes auf die Welle übergetragen, und es fällt daher die erforderliche Stärke kleiner aus als im erſteren Falle. Hat in dieſem Falle das Rad zwei Armſyſteme, ſo kann man annehmen, daß durch das zweite Armſyſtem die Hälfte des ganzen Momentes Pa auf die Welle, und von da mittels des anderen Armſyſtemes auf das in ſeiner Ebene befindliche Zahnrad übergetragen werde; hat dagegen das Rad drei Armſyſteme, ſo läßt ſich annehmen, daß das mittlere Armſyſtem zwei und das dritte Armſyſtem ein Viertel des ganzen Momentes mittels der Welle auf das erſte Armſyſtem übertrage; es iſt daher bei Beſtimmung der erforderlichen Wellenſtärke in dieſem Falle ſtatt P, entweder $^1/_2\, P$ oder $^3/_4\, P$, und ebenſo ſtatt L, entweder $^1/_2\, L$ oder $^3/_4\, L$ einzuführen.

Wenn nun das Transmiſſionsrad auf einem zwiſchen den äußerſten Radkränzen mitten innen ſtehenden Kranze aufſitzt, ſowie wenn die Transmiſſion durch zwei auf den äußerſten Radkränzen aufſitzende Zahnräder erfolgt, ſo hat die Welle faſt gar keine Torſion auszuhalten, und es iſt daher deren Stärke aus dem Gewichte des Rades nach der Theorie der Biegungsfeſtigkeit zu berechnen.

Beiſpiel. Wenn ein oberſchlägiges Waſſerrad von 24 Fuß Höhe bei fünf Umdrehungen pr. Minute eine Leiſtung von 20 Pferdekräften verrichtet und die Transmiſſion ſeiner Kraft durch ein auf ſeiner gußeiſernen Welle ſitzendes Zahnrad erfolgt, ſo iſt die erforderliche Stärke dieſer Welle:

$$d = 6\sqrt[3]{\frac{L}{u}} = 6\sqrt[3]{\frac{20}{5}} = 6\sqrt[3]{4} = 9{,}53 \text{ Zoll.}$$

Wollte man ſtatt dieſer Welle eine runde hölzerne Welle anwenden, ſo müßte man ihr mindeſtens die Stärke

$$d = 3 \,.\, 9{,}53 = 28{,}6 \text{ Zoll}$$

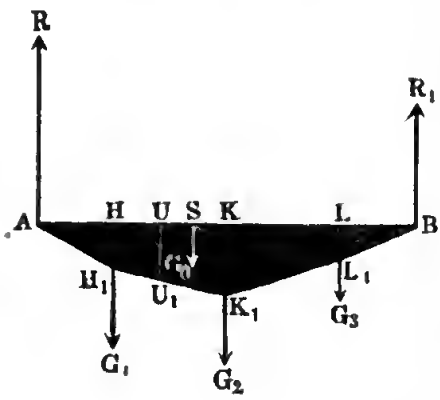
geben, und ſollte dieſe Welle einen quadratiſchen Querſchnitt erhalten, ſo würde die Seite deſſelben

$$s = 0{,}94\, d = 26{,}9 \text{ Zoll}$$

betragen müſſen.

Um die dem Gewichte eines Waſſerrades entſprechende Stärke der Welle beſtimmen zu können, iſt es nöthig, zuerſt die beiden Zapfendrücke der letzteren zu ermitteln. Es ſei in Fig. 386, AKB die Axe der in den Punkten H, K, L durch die Gewichte G_1, G_2, G_3 belaſteten Waſſerradwelle von der Länge $AB = l$; es ſeien ferner l_1, l_2, l_3 die Abſtände der Angriffspunkte H, K, L der Gewichte G_1, G_2, G_3 vom Zapfen A, und es bezeichne endlich R die Größe des Zapfendruckes in A, ſowie R_1 die Größe dieſes Druckes in B. Sehen wir die ganze Welle als einen Hebel mit dem Stützpunkte A an, ſo können wir (nach Bd. I, §. 92) ſetzen:

Fig 386.



§. 192

$$R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3}{l},$$

und wenn wir ſtatt l_1, l_2, l_3; $l - l_1$, $l - l_2$, $l - l_3$, ſowie ſtatt R_1, R einführen:

$$R = \frac{G_1 (l - l_1) + G_2 (l - l_2) + G_3 (l - l_3)}{l} = G_1 + G_2 + G_3 - R_1.$$

Es iſt leicht zu ermeſſen, welche Zuſätze dieſe Formeln erhalten müſſen, wenn die Zahl der Gewichte eine größere iſt. Hat man die Zapfendrücke R_1 und R beſtimmt, ſo kann man nun auch die Biegungsmomente der Welle in Hinſicht auf die verſchiedenen Punkte H, K, L beſtimmen. Für den Punkt H iſt dieſes Moment

$$M_1 = R l_1,$$

und für den Punkt K iſt es:

$$M_2 = R l_2 - G_1 (l_2 - l_1)$$
$$= R l_1 + (R - G_1) (l_2 - l_1),$$

alſo größer oder kleiner als $M_1 = R l_1$, je nachdem R größer oder kleiner als G_1 ausfällt.

Für den Punkt L iſt ferner dies Moment:

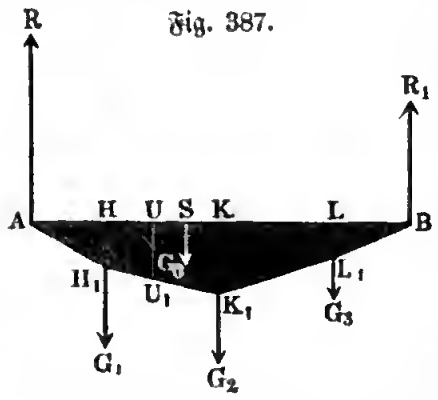
$$M_3 = R l_3 - G_1 (l_3 - l_1) - G_2 (l_3 - l_2)$$
$$= R l_1 + (R - G_1) (l_2 - l_1) + [R - (G_1 + G_2)] (l_3 - l_2),$$

und daſſelbe iſt größer oder kleiner als das in K, je nachdem ſich R größer oder kleiner als $G_1 + G_2$ herausſtellt.

Trägt man dieſe Momente in den entſprechenden Punkten H, K, L als Ordinaten HH_1, KK_1, LL_1 auf, und verbindet man die Endpunkte A, H_1, K_1, L_1, B mit einander durch gerade Linien, ſo meſſen die Ordinaten UU_1 ... derſelben auch die Momente der Zwiſchenpunkte U... Es findet

folglich das größte Biegungsmoment M nur in einem der Angriffspunkte H, K, L ſtatt. Zu den Gewichten G_1, G_2, G_3..., welche die Armſyſteme in beſtimmten Punkten H, K, L auf die Welle übertragen, geſellt ſich auch noch das auf die ganze Axe AB ſtetig vertheilte Gewicht G_0 der Welle ſelbſt. Iſt l_0 der Abſtand AS des Schwerpunktes S der Welle von dem Endpunkte A, ſo hat man die Vergrößerung des Zapfendruckes R_1 in B durch das Gewicht G_0:

Fig. 387.



$$Z_1 = \frac{l_0}{l} G_0,$$

ſowie die des Zapfendruckes R in A:

$$Z = \left(\frac{l - l_0}{l}\right) G_0.$$

In der Regel iſt das Gewicht G_0 der Welle nur ein kleiner Theil vom Gewichte G des Rades und es werden daher auch durch daſſelbe die Zapfendrücke nur wenig vergrößert. Deshalb iſt es daher auch genügend, wenn man die Welle als einen prismatiſchen Körper anſieht, und

$$l_0 = {}^1/_2\, l,$$

ſowie

$$Z_1 = Z = {}^1/_2\, G_0$$

ſetzt. Auch laſſen ſich dann die Gewichte der Wellenſtärke AH, AK, AL...

$$= \frac{l_1}{l} G_0,\ \frac{l_2}{l} G_0,\ \frac{l_3}{l} G_0 \ldots,$$

ſowie ihre Momente in Hinſicht auf die Punkte H, K, L... der Reihe nach

$${}^1/_2\, G_0 \frac{l_1^2}{l},\ {}^1/_2\, G_0 \frac{l_2^2}{l},\ {}^1/_2\, G_0 \frac{l_3^2}{l} \ldots$$

ſetzen, ſo daß zuletzt die durch das Wellengewicht hervorgebrachten Vergrößerungen der Biegungsmomente in Hinſicht auf die Punkte H, K, L der Reihe nach folgen:

$$Zl_1 - {}^1/_2\, G_0 \frac{l_1^2}{l} = {}^1/_2\, G_0 \frac{l_1 (l - l_1)}{l},$$

$$Zl_2 - {}^1/_2\, G_0 \frac{l_2^2}{l} = {}^1/_2\, G_0 \frac{l_2 (l - l_2)}{l},$$

$$Zl_3 - {}^1/_2\, G_0 \frac{l_3^2}{l} = {}^1/_2\, G_0 \frac{l_3 (l - l_3)}{l} \text{ u. ſ. w.}$$

Addirt man nun dieſe Momente zu den oben angegebenen Momenten, welche den Gewichten G_1, G_2, G_3 entſprechen, ſo erhält man die vollſtändigen Biegungsmomente, wonach die erforderlichen Stärken der Welle in H, K, L... zu beſtimmen ſind. Soll die Welle an allen Stellen eine und dieſelbe Stärke erhalten, ſo muß man natürlich dieſelbe nach dem größten dieſer Momente berechnen. Vortheilhafter iſt es aber, die Stärke

der Welle nach den Enden zu, entſprechend der Abnahme der Biegungsmomente, allmälig ſchwächer zulaufen zu laſſen. Zu dieſem Zwecke verſieht man auch die Welle ſehr oft mit Federn oder Rippen, deren Höhe nach den Wellenenden hin allmälig abnehmen.

Beiſpiel. Die Waſſerradwelle AKB, Fig. 387, hat die Länge von 10 Fuß, das Gewicht $G_0 = 3000$ Pfund, und trägt in H und K die Armſyſteme eines Waſſerrades von 20000 Pfund Gewicht, ſowie in L ein Transmiſſionsrad von 2000 Pfund; wenn nun der Abſtand $AH = BL = 2$ Fuß und die Länge HK des Waſſerrades 3 Fuß beträgt, welches ſind die Zapfendrücke und die Biegungsmomente dieſer Welle?

Es iſt hier $G_1 = G_2 = 10000$, $G_3 = 2000$ Pfund, und
$l_1 = 2$, $l_2 = 5$, $l_3 = 8$ und $l = 10$ Fuß,
daher der Zapfendruck in B:

$$R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3}{l} = \frac{20000 + 50000 + 16000}{10} = 8600 \text{ Pfund},$$

ferner der Zapfendruck in A:

$$R = G_1 + G_2 + G_3 - R_2 = 22000 - 8600 = 13400 \text{ Pfund}.$$

Das Biegungsmoment in H iſt:

$$M_1 = Rl_1 = 13400 \,.\, 2 = 26800 \text{ Fußpfund},$$

das in K:

$$M_2 = Rl_1 + (R - G_1)(l_2 - l_1) = 26800 + 3400 \,.\, 3 = 37000 \text{ Fußpfund},$$

und dagegen das in L:

$$M_3 = R_1 (l - l_3) = 8600 \,.\, 2 = 17200 \text{ Fußpfund}.$$

Durch das Wellengewicht wird annähernd jeder der beiden Zapfendrücke um $\frac{1}{2} G_0 = 1500$ vergrößert; es fällt alſo im Ganzen

$$R_1 = 8600 + 1500 = 10100 \text{ Pfund}$$

und

$$R = 13400 + 1500 = 14900 \text{ Pfund}$$

aus.

Ferner ſteigert ſich durch das letzte Gewicht das Biegungsmoment in Hinſicht auf H um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_1 (l - l_1)}{l} = \frac{2 \,.\, 8}{10} \cdot 1500 = 2400 \text{ Fußpfund},$$

in Hinſicht auf K um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_2 (l - l_2)}{l} = \frac{5 \,.\, 5}{10} \cdot 1500 = 3750 \text{ Fußpfund},$$

und in Hinſicht auf L um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_3 (l - l_3)}{l} = \frac{8 \,.\, 2}{10} \cdot 1500 = 2400 \text{ Fußpfund},$$

ſo daß folglich das ganze Moment in Hinſicht auf H:

$$26800 + 2400 = 29200 \text{ Fußpfund},$$

das in Hinſicht auf K:

$$37000 + 3750 = 40750 \text{ Fußpfund},$$

und das in Hinſicht auf L:

$$17200 + 2400 = 19600 \text{ Fußpfund}$$

zu ſetzen iſt.

Es bleibt nun im Folgenden noch anzugeben, wie aus dem gefundenen §. 193 Zapfendrucke und dem größten Biegungsmomente (M) die Wellenſtärken

zu berechnen ſind. Iſt der Querſchnitt der Welle kreisrund und der Durchmeſſer derſelben $= d$, ſo hat man nach Bd. I, §. 236, das zuläſſige Biegungsmoment in dieſem Querſchnitte:

$$M = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^3 T = \frac{\pi d^3}{32} T,$$

und es folgt daher umgekehrt, der dem Momente M entſprechende Wellendurchmeſſer:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,M}{\pi\,T}} = 2{,}17\,\sqrt[3]{\frac{M}{T}},$$

oder, wenn man M nicht in Zollpfund, ſondern in Fußpfund giebt:

$$d = 4{,}97\,\sqrt[3]{\frac{M}{T}}.$$

Führt man aus Bd. I, §. 240, für Gußeiſen $T = 7000$ Pfund ein, ſo erhält man:

$$d = \frac{4{,}97}{\sqrt[3]{7000}}\sqrt[3]{M} = 0{,}260\,\sqrt[3]{M}\ \text{Zoll}.$$

Der Sicherheit wegen nimmt man aber T nur 4500 an, und ſetzt hiernach die geſuchte Stärke gußeiſerner Wellen:

$d = 0{,}131\,\sqrt[3]{M}$, wenn M in Zollpfund, und

$d = 0{,}300\,\sqrt[3]{M}$ Zoll, wenn M in Fußpfund gegeben iſt.

Für ſchmiedeeiſerne Wellen genügt

$$d = 0{,}250\,\sqrt[3]{M}\ \text{Zoll}.$$

Hölzerne Wellen ſind $2\frac{1}{2}$- bis 3mal ſo ſtark zu machen als gußeiſerne.

Für Wellen mit quadratiſchem Querſchnitte iſt die Seitenlänge

$s = 0{,}94\,d$,

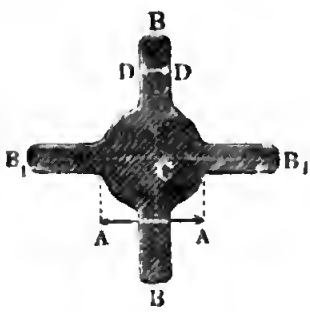
$= 0{,}282\,\sqrt[3]{M}$, wenn dieſelben aus Gußeiſen beſtehen.

Für eine hohle Welle mit den Durchmeſſern d_1 und d_2 iſt wieder ſtatt d

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1-\psi^4}},$$

wo $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ bezeichnet, zu ſetzen.

Fig. 388.



Iſt bei einer gerippten Welle der Durchmeſſer $\overline{AA}$, Fig. 388, des cylindriſchen Kernes $= d_1$, ferner die ganze Höhe $\overline{BB}$ der Rippe $= h_1$ und die Dicke $\overline{DD} = s_1$, ſo hat man das Tragmoment dieſer Welle (vgl. Bd. I, §. 228 u. f. w.):

$$M = \left(\frac{\pi d_1^4}{64} + \frac{(h_1^3 - d_1^3)\, s_1 + (h_1 - d_1)\, s_1^3}{12}\right) \frac{T}{1/2\, h_1},$$

oder, wenn man $h_1 = \mu d_1$ und $s_1 = \nu d_1$ ſetzt,

$$M = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{(\mu^3 - 1)\, \nu + (\mu - 1)\, \nu^3}{3}\right) \frac{d_1^3\, T}{2\, \mu}.$$

Nun iſt aber für die cylindriſche Welle vom Durchmeſſer d dieſes Moment

$$M = \frac{\pi d^3}{32}\, T;$$

ſetzt man daher dieſe Momente einander gleich, ſo folgt die Stärke des cylindriſchen Kernes der gerippten Welle:

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16}{3\pi}\left[(\mu^3 - 1)\, \nu + (\mu - 1)\, \nu^3\right]}}.$$

In den meiſten Fällen iſt ν ſo klein gegen μ, daß man das Glied $(\mu - 1)\, \nu^3$ außer Acht laſſen und einfacher

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16\, (\mu^3 - 1)\, \nu}{3\pi}}}$$ ſetzen kann.

Gewöhnlich nimmt man $\mu = \frac{h_1}{d_1} = 3$ und $\nu = \frac{s_1}{d_1} = 1/3$ an, ſo daß man einfach

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16 \,.\, 26}{9\pi}}} = 0{,}574\, d,$$ ſowie

$h_1 = 1{,}722\, d$ und $s_1 = 0{,}191\, d$ erhält.

Wenn von den beiden Momenten Pa und M das eine viel größer iſt als das andere, ſo kann man das kleinere Moment ganz außer Acht laſſen, folglich die Stärke der Welle nur nach dem größeren Momente berechnen, und zwar nach der Formel

$$d = 0{,}355 \sqrt[3]{Pa},$$

wenn das Torſionsmoment Pa das größere, und dagegen nach der Formel

$$d = 0{,}300 \sqrt[3]{M},$$

wenn das größte Biegungsmoment M das größere iſt. Weichen aber beide Momente nicht bedeutend von einander ab, ſo muß man die Stärke nach der Theorie der zuſammengeſetzten Feſtigkeit (ſ. Bd. I, §. 277) berechnen, welche eine der Grundformeln

$$d^3 = \frac{16}{\pi} \frac{Pa}{T} \left(1 - \frac{32\, M}{\pi d^3\, T}\right)^{-1/4}$$

und

$$d^3 = \frac{32\,M}{\pi\,T}\left[1 - \left(\frac{16\,Pa}{\pi\,d^3\,T}\right)^2\right]^{-1} \text{ giebt.}$$

Nun ist aber die Wellenstärke 1) ohne Rücksicht auf Biegung

$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{Pa}{T}}$, und 2) dieselbe ohne Rücksicht auf Torsion:

$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,M}{\pi\,T}}$, daher läßt sich auch setzen:

$$d^3 = d_1^3\left[1 - \left(\frac{d_2}{d}\right)^3\right]^{-1/2} \text{ und}$$

$$d^3 = d_2^3\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^6\right]^{-1}, \text{ oder annähernd, je nachdem } d_1 \text{ größer}$$

oder kleiner als d_2 ist, entweder

1) $$d = d_1\left[1 + 1/6\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3\right], \text{ oder}$$

2) $$d = d_2\left[1 + 1/3\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^6\right].$$

Mit Hülfe der obigen Formel

$$d = 0{,}300\,\sqrt[3]{M}$$

läßt sich endlich auch die erforderliche Stärke der Zapfen bestimmen, wenn man voraussetzt, daß der Zapfen seine ungünstigste Lage habe, nämlich mit seinem Ende auf dem Lager ruhe. Ist dann l_0 die Länge, d_0 die Stärke des Zapfens und R der nach §. 192 zu bestimmende Zapfendruck, so hat man folglich

$$d_0 = 0{,}300\,\sqrt[3]{R\,l_0}$$

zu setzen.

Nun steht aber die Länge l_0 in einem bestimmten Verhältnisse λ zur Stärke d_0 des Zapfens, daher läßt sich auch

$$d_0^3 = (0{,}300)^3\,.\,R\lambda\,\frac{d_0}{12}$$

setzen, so daß

$$d_0 = \sqrt{\frac{(0{,}300)^3}{12}}\,\sqrt{\lambda\,R} = 0{,}0475\,\sqrt{\lambda\,R} \text{ Zoll}$$

folgt.

Gewöhnlich ist $\lambda = 1$ bis 1,25, und daher die Zapfenstärke

$$d_0 = 0{,}0475\,\sqrt{R} \text{ bis } 0{,}0531\,\sqrt{R} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Wenn das größte Biegungsmoment einer gußeisernen Wasserradwelle, $M = 40750$ Fußpfund beträgt (s. das Beispiel des vorigen Paragraphen), so ist die nöthige Stärke derselben:

$$d = 0{,}300\,\sqrt[3]{M} = 0{,}300\,\sqrt[3]{40750} = 10{,}3 \text{ Zoll,}$$

und wenn die beiden Zapfendrücke dieser Welle $R = 14900$ und $R_1 = 10100$ Pfund betragen, so sind die erforderlichen Zapfenstärken derselben:

$$d_0 = 0{,}0531\sqrt{14700} = 6{,}48 \text{ Zoll}$$

und

$$= 0{,}0531\sqrt{10100} = 5{,}34 \text{ Zoll}.$$

Hätte dieſe Welle nur das Torſionsmoment

$$Pa = \frac{30.480\,L}{\pi u} = \frac{30.480.20}{5\pi} = 18335 \text{ Fußpfund (ſ. Beiſpiel zu §. 191)}$$

aufzunehmen, ſo wäre die nöthige Wellenſtärke

$$d = 0{,}355\sqrt[3]{18335} = 9{,}36 \text{ Zoll},$$

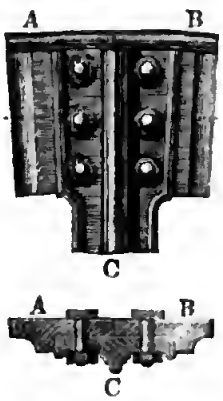
ſetzt man daher in obiger Formel 2) $d_2 = 10{,}30$ und $d_1 = 9{,}36$ ein, ſo giebt dieſelbe die Stärke der Welle, welche das gegebene Biegungs- und Torſionsmoment zugleich aufnimmt:

$$d = d_2\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^6\right] = 10{,}30\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{9{,}36}{10{,}30}\right)^6\right] = 10{,}30 . 1{,}188$$
$$= 12{,}24 \text{ Zoll}.$$

Construction der Waſſerräder. Im Folgenden möge noch etwas ſpecieller von der Zuſammenſetzung und Auflagerung der oberſchlägigen Waſſerräder gehandelt werden. Der Zuſammenſetzung der hölzernen Radkränze aus einer doppelten Lage von Zirkelſtücken (Felgen) iſt ſchon oben (§. 172) gedacht worden. Schmiedeeiſerne Radkränze werden auf gleiche Weiſe zuſammengeſetzt, gußeiſerne Radkränze läßt man dagegen nur in einer Lage von Zirkelſtücken beſtehen. Das Befeſtigungsmittel beſteht bei den hölzernen Radkränzen in Holz- oder Eiſennägeln, bei den ſchmiedeeiſernen in Nieten und bei den gußeiſernen in Schrauben. Die gewöhnlichen ganz oder nahe radial ſtehenden Hauptradarme werden in der Regel auf die Außenflächen der Radkränze aufgeſchraubt. Beſteht der Radkranz aus Gußeiſen, ſo können die Schrauben, wodurch die Radfelgen A, B, Fig. 389, mit einander verbunden werden, auch zugleich zur Befeſtigung des Armes C dienen. Auf gleiche Weiſe werden auch die Arme auf der Roſette geſchraubt. Damit dieſe Schrauben nur einem Widerſtand nach ihren Axenrichtungen zu widerſtehen haben, dürfen die Armenden nicht frei aufliegen, ſondern ſind in Vertiefungen oder zwiſchen Seitenbacken einzulagern. Zu Verhinderungen der Seitenſchwankungen verſieht man auch wohl die Räder mit Diagonalarmen, welche von der Roſette des einen Radkranzes nach dem anderen Radkranze reichen. Auch wendet man ſolche Diagonalarme dann an, wenn das Rad eine größere Weite hat, wo ſie dann, wie der Durchſchnitt des Rades in Fig. 390 (a. f. S.) zeigt, einen mittleren Radkranz DD tragen. Dieſe Arme ſind mit einem Ende durch einen Splint und mit dem anderen Ende durch Schrauben in Hülſen oder Büchſen

§. 194

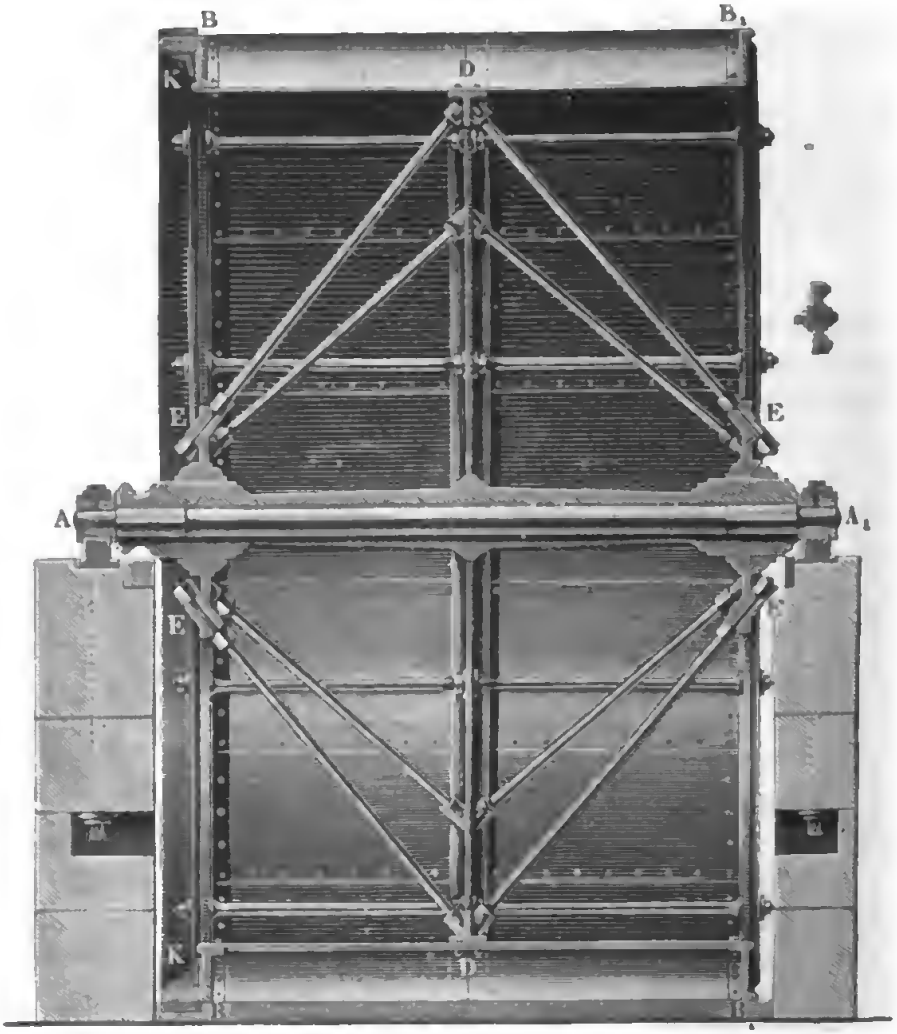
Fig. 389.



befeſtigt, welche theils mit der Roſette EE, theils mit dem Radkranze DD ein Ganzes bilden.

Wenn die Transmiſſion durch ein mit dem Radkranze verbundenes Zahnrad erfolgt, ſo wendet man auch nicht ſelten ſtatt der ſtarken ſteifen Arme

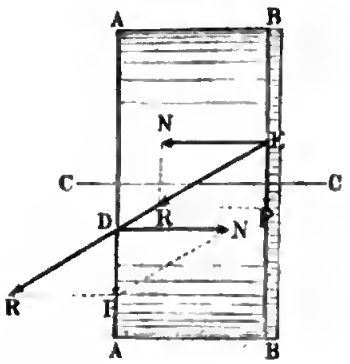
Fig. 390.



aus Holz oder Gußeiſen ſchwache geſpannte Arme aus Schmiedeeiſen an. Dieſelben werden gleich bei ihrem Einſetzen mittels Schrauben oder Keile ſo ſtark geſpannt, daß ſie das Rad nur durch ihre Zugfeſtigkeit tragen. Um einem Rade mit geſpannten Armen die nöthige Steifigkeit zu geben, iſt es nicht allein mit geſpannten Diagonalarmen, ſondern auch noch mit beſonderen Umfangsſtangen auszurüſten. Die letzteren Stangen ſind nicht mit den Zugſtangen (Hängenägeln) zu verwechſeln, wodurch die Radkränze oder Radarme mit einander verbunden werden; ſie ſind am inneren Radumfange herumlaufende, ſchräg gegen die Radkränze ſtehende Stangen, welche

den Zweck haben, die Kraft des einen Radkranzes AA, Fig. 391, auf den anderen, das Transmiſſionsrad tragenden Radkranz BB überzutragen. Es ſei P ein Theil der Kraft des Rades AA, und DE die Umfangsſtange, welche denſelben auf den Kranz BB überzutragen hat. Dieſe Kraft P zerlegt ſich in eine Seitenkraft N parallel zur Radaxe CC und in eine Seitenkraft R in der Richtung der Stange DE. Die letztere pflanzt ſich durch DE hindurch bis zum Ende E im zweiten Kranze BB fort und zerlegt ſich hier wieder in die Seitenkräfte

Fig. 391.

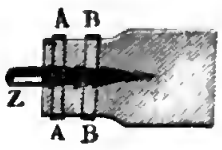


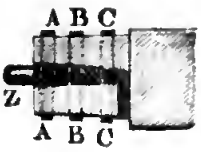
$$\overline{EN} = -N \text{ und } \overline{EP} = P.$$

Den Kräften N, $-N$ widerſteht das ganze Schaufelſyſtem durch ſeine Druckfeſtigkeit, und die Kraft $\overline{EP} = P$ vereinigt ſich mit der Kraft des Kranzes BB, welcher beide zuſammen an das Transmiſſionsrad abgiebt.

Zu den Holzwellen nimmt man am liebſten Eichenholz, jedoch verwendet man hierzu auch oft Tannen- und Fichtenholz. Für Stern- und Roſettenräder bearbeitet man dieſelben polygonal, für Sattelräder aber quadratiſch. Die Zapfen der hölzernen Wellen ſind entweder ſchmiedeeiſerne Spitzzapfen, wie Fig. 392, oder ſchmiedeeiſerne Hakenzapfen, wie Fig. 393, oder gußeiſerne Blattzapfen. Die letzteren beſtehen entweder nur aus einem Blatte, dem ſogenannten Bleuel, wie CD, Fig. 394,

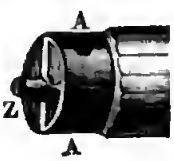
Fig. 392. Fig. 393. Fig. 394.





oder aus mehreren Blättern. Damit der Wellenhals gegen das Aufſpringen geſichert werde, arbeitet man ihn etwas coniſch ab und treibt über denſelben eiſerne Ringe AA, BB ... (Fig. 393) von $1/4$ bis $1/2$ Zoll Dicke und $1\,1/2$ bis 3 Zoll Breite. Statt der drei Ringe wendet man auch wohl einen einzigen Ring AA an, welcher den ganzen Wellenhals umfaßt und mit den vier Flügeln des Zapfens ein Ganzes bildet, wie Fig. 395.

Fig. 395.

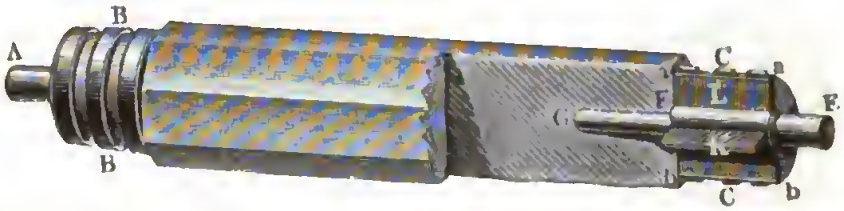


In Fig. 396 (a. f. S.) iſt eine achtſeitige Holzwelle abgebildet. Dieſelbe zeigt links das Zapfenende A und den Hals BB mit den drei Eiſenringen, und rechts die hintere Hälfte des Wellenhalſes CC und den Zapfen EF mit vier Flügeln K, L ... und dem Schwanze FG. Auch bemerkt man in aa und

bb die Keile, welche zwiſchen den Ringen und den Flügeln von der Stirnfläche aus in den Wellenhals eingetrieben werden.

Die gußeiſernen Wellen ſind entweder maſſiv oder hohl. Bei den maſſiven Wellen bilden die übrigens genau abzudrehenden Zapfen mit der

Fig. 396.



Welle ein Ganzes, bei den hohlen Wellen werden dieſelben dagegen an den Wellenkörper an- oder eingeſetzt. Die Wellenköpfe, oder die Stellen, worauf die Hülſen der Roſetten und Zahnräder zu ſitzen kommen, ſind entweder einfach cylindriſch oder gerippt und müſſen an ihrem Umfange genau abgedreht werden. Bei Wellen mit cylindriſchen Köpfen erfolgt die Befeſtigung durch einen oder zwei Keile, welche zur Hälfte in dem Kopfe und zur Hälfte in der Hülſe ſitzen; bei den Wellen mit gerippten Köpfen wird jede Rippe einzeln in der Hülſe verkeilt.

Eine gerippte maſſive Waſſerradwelle mit cylindriſchen Köpfen führt Fig. 397 vor Augen, und eine hohle Waſſerradwelle mit gerippten Köpfen zeigt Fig. 398. In beiden Figuren ſind *A* und A_1 die Zapfen, ſowie *B* und

Fig. 397.

Fig. 398.

B_1 die Tragköpfe. Eine einfache hohle gußeiſerne Welle mit eingeſetzten Zapfen *A*, A_1 iſt in Fig. 390 abgebildet.

Die Wellenzapfen ruhen in Lagern, welche, um das Rad bei ſeiner Umdrehung in ſicherer Lage zu erhalten, auf ſtarken Fundamenten oder Geſtellen befeſtigt ſein müſſen. Jedes Zapfenlager beſteht aus einer Pfanne und aus dem Unterlager oder dem ſogenannten Angewelle (Angewäge). Die Pfanne beſteht in der Regel aus Gußeiſen, ſeltener aus Stein, Holz,

Glas, Rothguß (8 Theile Kupfer und 1 Theil Zinn); ſie iſt entweder mit oder ohne Deckel, ſowie mit oder ohne Metallfutter.

Ein Zapfenlager mit hölzernem Angewäge iſt aus Fig. 354, und ein ſolches mit eiſerner Fußplatte und Deckel aus Fig. 355 erſichtlich. Ein einfaches offenes Zapfenlager zeigt Fig. 399, ein ſolches mit Metallfutter F zum Auswechſeln Fig. 400, und ein geſchloſſenes Zapfenlager mit Metallfutter zeigt Fig. 401. Dieſe Lager werden durch die Schraubenbolzen AA mit ihrer Fußplatte BB entweder unmittelbar auf das Fundament

Fig. 399.

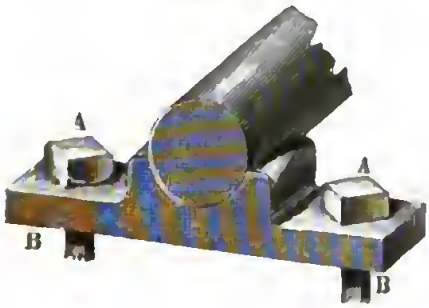


Fig. 400.

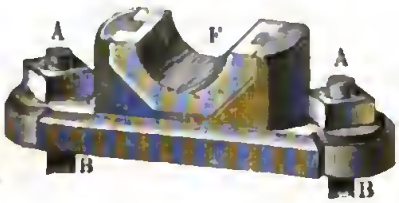
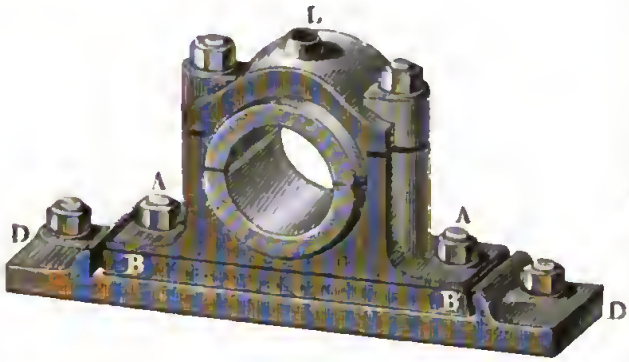


Fig. 401.



oder auf eine mit dem Fundamente feſt verbundene Sohlplatte DD aufgeſchraubt. Im Deckel des Zapfenlagers in Fig. 401 iſt noch ein Schmierloch L angebracht, auf welches eine Schmierbüchſe aufgeſetzt werden kann. Zur beſſeren Vertheilung der durch das Schmierloch zufließenden Schmiere werden Kreuzgerinne in die Innenflächen der Lagerfutter eingeſchnitten.

Zapfenreibung der Waſſerräder. Einen nicht ganz unanſehnlichen Theil der mechaniſchen Leiſtung verliert ein oberſchlägiges Waſſerrad in der durch die Zapfenreibung conſumirten Arbeit. Dieſelbe hängt vorzüglich vom Gewichte G des Rades ab, und iſt $F = \varphi G$, wenn φ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Iſt r der Halbmeſſer des Zapfens und u die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute, ſo läßt ſich die Umfangsgeſchwindigkeit des Zapfens §. 195

$$v = \frac{\pi u r}{30},$$

und daher die Arbeit der Zapfenreibung

$$L_1 = Fv = \varphi G v = \frac{\pi u r}{30} \varphi G = 0{,}1047\, \varphi u G r$$

ſetzen. Hierbei iſt für genau abgedrehte Zapfen, nach Band I, §. 181 $\varphi = 0{,}075$ anzunehmen, wenn dieſelben mit Oel, Talg oder Fett geſchmiert ſind; bei der beſten Abwartung geht jedoch dieſer Coefficient auf $\varphi = 0{,}054$ herab, wogegen er bei ſchlechteren Schmiermitteln, z. B. bei der Graphitſchmiere, auf $\varphi = 0{,}110$ ſteigen kann.

Die Größe und folglich auch das Gewicht eines Waſſerrades hängt jedenfalls auch von der Leiſtung deſſelben ab, und man kann annehmen, wenn es nur auf eine Annäherung ankommt, daß das Gewicht proportional der Leiſtung des Rades wachſe. Außerdem hängt dieſes Gewicht auch noch von dem Grade der Zellenfüllung und der Umdrehungszahl des Rades ab, denn wenn ſich die Zellen noch einmal ſo ſtark füllen, ſo wird dadurch das Gewicht des Rades nur wenig größer, die Leiſtung deſſelben aber ziemlich verdoppelt, und wenn auf daſſelbe Rad noch einmal ſo viel Waſſer geſchlagen wird, ſo macht es bei derſelben Laſt beinahe doppelt ſo viel Umdrehungen und verrichtet alſo auch nahe die doppelte Arbeit. Nehmen wir hiernach an, daß das Radgewicht mit der Leiſtung L, dem Füllungscoefficienten ε und der Umdrehungszahl u gleichmäßig wachſe, und führen wir noch einen Erfahrungscoefficienten ι ein, ſo können wir

$$G = \iota \frac{L}{\varepsilon u}$$

ſetzen.

Nach Redtenbacher iſt für ein kleines eiſernes Rad mit $^1/_3$ Füllung, 9,3 Umdrehungszahl und 3175 Kilogramme Gewicht, die Leiſtung $L = 6{,}3$; es folgt daher hiernach

$$\iota = \frac{\varepsilon u G}{L} = {}^1/_3 \cdot \frac{9{,}3 \,.\, 3175}{6{,}3} = 1560;$$

dagegen iſt für ein Freiberger hölzernes Kunſtrad mit eiſernen Schaufeln $\varepsilon = {}^1/_4$, $u = 5$, $G = 20000$ und $L = 20$, daher

$$\iota = {}^1/_4 \,.\, 5 \,.\, \frac{20000}{20} = 1250.$$

Nehmen wir nun aus beiden Werthen für ι das Mittel, ſo erhalten wir für das Radgewicht die Formel:

$$G = 1400 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Kilogramme,}$$

oder

$$= 2800 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Pfund.}$$

Von dem Gewichte G eines Rades hängt die Zapfenſtärke, und hiervon wieder die Arbeit der Reibung ab; deshalb hat alſo dieſes Gewicht einen zweifachen Einfluß auf die Zapfenreibung. Wir haben die mittlere Zapfenſtärke (§. 193)

$$2r = 0{,}0475 \cdot \sqrt{\frac{G}{2}} \text{ Zoll} = 0{,}00283 \sqrt{G} \text{ Fuß}$$

angegeben, können alſo hiernach $Gr = 0{,}0142 \sqrt{G^3}$, und daher die Arbeit der Zapfenreibung

$$L_1 = 0{,}1047\, u\varphi \cdot 0{,}00142 \sqrt{G^3} = 0{,}00015\, u\varphi \sqrt{G^3}$$

oder, wenn wir die Leiſtung $= L$ Pferdekräfte einführen, dieſe Arbeit

$$L_1 = 0{,}00015\, u\varphi \sqrt{\left(2800 \frac{L}{\varepsilon u}\right)^3} = 22{,}2 \cdot \varphi \cdot \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fußpfund}$$

$$= 0{,}0463\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Pferdekräfte,}$$

und ihr Verhältniß zur übrigen Radleiſtung

$$\frac{L_1}{L} = 0{,}0463\, \varphi \sqrt{\frac{L}{\varepsilon^3 u}} \quad \text{ſetzen.}$$

Beiſpiele. 1. Welche Arbeit conſumirt die Zapfenreibung eines 25000 Pfund ſchweren Waſſerrades mit 6 Zoll dicken Zapfen, wenn daſſelbe pr. Minute 6 Umdrehungen macht? Nimmt man den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}08$ an, ſo hat man die Zapfenreibung $\varphi G = 0{,}08 \cdot 25000 = 2000$ Pfund, ferner das ſtatiſche Moment derſelben $= \varphi Gr = \frac{1}{4} \cdot 2000 = 500$ Fußpfund und endlich ihre Arbeit:

$$L_1 = 0{,}1047 \cdot 6 \cdot \varphi Gr = 314 \text{ Fußpfund.}$$

2. Welchen Arbeitsverluſt giebt die Zapfenreibung eines Waſſerrades von 30 Pferdekräfte Leiſtung bei der relativen Zellenfüllung $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und der Umdrehungszahl $u = 4$? Es iſt derſelbe:

$$L_1 = 0{,}0463 \cdot 0{,}08 \sqrt{\frac{30 \cdot 27}{4}} \cdot L = 0{,}003704 \sqrt{\frac{810}{4}} \cdot L = 0{,}0526 \cdot L,$$

d. i. ungefähr $5\frac{1}{4}$ Procent der Nutzleiſtung, alſo $1\frac{3}{5}$ Pferdekräfte.

Anmerkung. Die Zapfenreibung eines Rades kann noch durch die Art und Weiſe des Anſchließens der übrigen Maſchinerie vergrößert oder herabgezogen werden. Läßt man, wie Fig. 402 vor Augen führt, Kraft P und Laſt Q auf einerlei Seite wirken, ſo wird der Zapfendruck R durch die Laſt Q vermindert; es fällt alſo dann die Zapfenreibung kleiner aus; läßt man aber Kraft und Laſt auf entgegengeſetzten Seiten des Rades wirken, wie Fig. 402 vorſtellt, ſo wird der Zapfendruck R durch die Laſt Q vergrößert, und es wird alſo hier die Zapfenreibung um eben ſo viel größer als im vorigen Falle kleiner. Macht man im erſten Falle noch den Hebelarm CB der Laſt gleich dem Hebelarm CA der

Fig. 402.

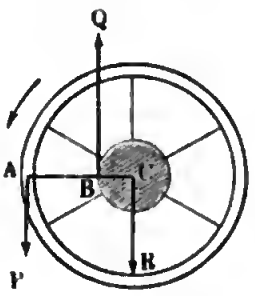
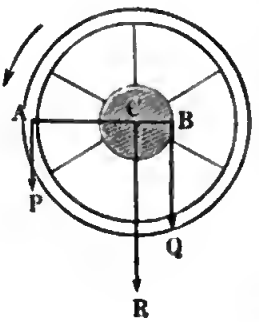


Fig. 403.



Kraft, indem man z. B. die Transmiſſion durch ein mit einem der Radkränze unmittelbar verbundenes Zahnrad bewirkt, wie z. B. Fig. 355, Seite 404 vorſtellt, ſo wird die Wirkung der Kraft auf die Zapfen durch die Laſt faſt ganz aufgehoben. Welche Vorzüge dieſe Conſtruction übrigens hat, iſt ſchon oben (Bd. II, §. 190) angegeben worden.

§. 196 **Totalleistung.** Die Totalleiſtung eines oberſchlägigen Waſſerrades läßt ſich nun

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v$$

ſetzen, oder, wenn man das Waſſer nahe tangential und mit der Geſchwindigkeit $c_1 = 2v_1$ eintreten läßt und annähernd $v_1 = v$ annimmt, ſo daß

$$\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} = \frac{v^2}{g}$$

ausfällt,

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v.$$

Setzen wir, dem vorigen Paragraphen zufolge, das Radgewicht

$$G = 2800 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Pfund},$$

und hiernach die Arbeit der Zapfenreibung:

$$L_1 = 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fußpfund},$$

ſo erhalten wir für die Totalleiſtung des Waſſerrades:

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}}.$$

Da zur Erzeugung der Geſchwindigkeit $c = 2v$ das Gefälle

$$4 \,.\, 1{,}1 \,.\, \frac{v^2}{2g} = \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 = 0{,}000772 \,.\, u^2 a^2$$

nöthig iſt, ſo bleibt vom Totalgefälle h das Druckgefälle $h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2$ übrig, und ſetzen wir nun noch der Einfachheit wegen,

$$h_3 + \xi h_4 = \chi\left[h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right],$$

wo χ ein ächter Bruch (etwa $^2/_3$ oder $^3/_4$ u. ſ. w.) iſt, ſo erhalten wir die Leiſtung des Waſſerrades:

$$L = \left(\frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 + \chi\left[h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right]\right) Q\gamma - 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}},$$

oder annähernd, wenn man $4{,}4\,\chi \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{g} = \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2$ ſetzt:

$$L = \chi\left[h - \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right] Q\gamma - 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}}.$$

Nun können wir aber in dem Ausdrucke für die Arbeit der Reibung annähernd

$$L = \chi h Q \gamma \text{ Fußpfund} = \frac{\chi h Q \gamma}{480} \text{ Pferdekräfte}$$

ſetzen, daher bleibt dann

$$L = \left[h - \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 - 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{\chi h^3 Q\gamma}{(480\,\varepsilon^3)u}}\right]\chi Q\gamma,$$

oder $g = 31{,}25$ Fuß, und $\gamma = 61{,}74$ Pfund geſetzt,

$$L = \left[h - 0{,}0003860\,.\,(ua)^2 - 0{,}01659\varphi\sqrt{\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3 \frac{\chi Q}{u}}\right]\chi Q\gamma \text{ Fußpfd.}$$

Aus der Art und Weiſe, wie u in dieſem Ausdrucke vorkommt, folgt, daß die Leiſtung L weder für $u = 0$, noch für $u = \infty$, ſondern für einen zwiſchen 0 und ∞ liegenden Werth von u ein Maximum wird. Der höhere Calcül giebt dieſen Werth

$$u = \sqrt[5]{\frac{\chi Q\gamma}{480^3}\cdot(5{,}55\,\varphi g)^2\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3\left(\frac{30}{\pi a}\right)^4},$$

oder für das preußiſche Maaß:

$$u = 2{,}585\sqrt[5]{\frac{\chi\varphi^2 Q}{a^4}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3},$$

oder wenn man annähernd $a = {}^1/_2 h$ ſetzt:

$$u = 4{,}50\sqrt[5]{\frac{\chi\varphi^2 Q}{\varepsilon^3 h}}.$$

In der Praxis macht man u meiſt noch etwas größer, um eine möglichſt gleichförmige Umdrehung des Rades zu erlangen.

Setzen wir dieſen Werth für u in den Ausdruck für L ein, ſo erhalten wir die Formel für die Maximalleiſtung des Waſſerrades:

$$L = \left[h - 0{,}002580\sqrt[5]{(\chi Qa)^2\varphi^4\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6} - 0{,}010318\sqrt[5]{(\chi Qa)^2\varphi^4\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}\right]\cdot\chi Q\gamma,$$

$$= \left[h - 0{,}0129\sqrt[5]{(\chi Qa)^2\varphi^4\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}\right]\cdot\chi Q\gamma.$$

Der Wirkungsgrad eines oberſchlägigen Waſſerrades läßt ſich, da die disponible Leiſtung $= Qh\gamma$ iſt, allgemein ſetzen:

$$\eta = \frac{\left(h_1 + \xi h_2 + \frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)v_1}{g}\right)Q\gamma - \varphi\frac{r}{a}Gv}{Qh\gamma};$$

nach dem Vorſtehenden iſt der Maximalwerth deſſelben:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \chi\left(1 - \frac{0{,}0129\sqrt[5]{(\chi Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}}{h}\right).$$

Beiſpiele. 1. Für ein oberſchlägiges Waſſerrad, welches ein Gefälle h von 35 Fuß und ein Aufſchlagequantum $Q = 5$ Cubikfuß benutzt, bei welchem ferner der Füllungscoefficient $\varepsilon = 1/6$, der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$ und der Gefällcoefficient $\chi = 5/6$ iſt, hat man die vortheilhafteſte Umdrehungszahl:

$$u = 4{,}50\sqrt[5]{5/6 \cdot \frac{0{,}01 \,.\, 64 \,.\, 5}{35}} = 4{,}50\sqrt[5]{0{,}0762} = 2{,}69.$$

2. Für $h = 10$, $Q = 15$, $\varepsilon = 1/3$ und $\chi = 4/5$ ſtellt ſich dagegen die geſuchte zweckmäßigſte Umdrehungszahl

$$u = 4{,}50\sqrt[5]{4/5 \cdot \frac{0{,}01 \,.\, 27 \,.\, 15}{10}} = 4{,}58\sqrt[5]{0{,}325} = 3{,}59 \text{ heraus.}$$

§. 197 **Effective Radleistung.** Ueber die Wirkungen oberſchlägiger Waſſerräder ſind zwar von Vielen, namentlich von Smeaton, Nordwall, Morin u. ſ. w. Beobachtungen oder Verſuche angeſtellt worden, es bleibt indeſſen noch ſehr zu wünſchen, daß deren noch mehr angeſtellt werden, und zwar namentlich an recht gut conſtruirten und an ſehr hohen Rädern, weil man die Leiſtungen letzterer erfahrungsmäßig noch gar nicht genau kennt, und weil, wie ſich der Verfaſſer hinreichend überzeugt hat, die Wirkungen derſelben meiſt zu klein angenommen werden. Smeaton machte Verſuche an einem Modellrade von 75 engl. Zoll Umfang mit 36 Zellen, und fand bei einer Umdrehungszahl $u = 20$ den größten Wirkungsgrad 0,74. D'Aubiſſon führt in ſeiner Hydraulik an, daß er an einem $11\frac{1}{3}$ Meter hohen Waſſerrade bei $2\frac{1}{2}$ Meter Umfangsgeſchwindigkeit den Wirkungsgrad 0,76 gefunden habe. Der Verfaſſer fand ihn bei einem hieſigen Pochwerksrade von 7 Meter Höhe, $^6/_7$ Meter Weite und mit 48 Zellen bei 12 Umgängen pr. Minute = 0,78. Bei Kunſt- und anderen Rädern von 10 bis 11 Meter Höhe fand derſelbe, wenn ſie nur 5 Umdrehungen pr. Minute machten, den Wirkungsgrad 0,80 und oft noch höher. Es kann aber auch leicht nachgewieſen werden, daß ſich der Wirkungsgrad eines ſehr hohen oberſchlägigen Waſſerrades, namentlich wenn daſſelbe nur 3 bis 4 Umdrehungen macht, bis auf 0,83 ſteigern läßt, indem vielleicht durch das Eintrittsgefälle 3, durch das zu zeitige Ausleeren 9 und durch die Zapfenreibung 5 Procent an Wirkung verloren gehen. Kleine Räder geben immer einen kleineren Wirkungsgrad, nicht allein weil ſie mehr Umläufe machen, ſondern auch weil ſich bei ihnen der waſſerhaltende Bogen kleiner herausſtellt. Die meiſten und ausführlichſten Verſuche über die Wirkungen der Waſſerräder ſind von Morin (ſ. Expériences sur les roues hydrauliques à aubes planes et

sur les roues hydrauliques à augets. Metz, 1836) angeſtellt worden. Von dieſen Verſuchen können jedoch hier nur die an drei mehr kleinen Rädern angeſtellten Berückſichtigung finden. Das erſte dieſer Räder war von Holz, hatte 3,425 Meter Durchmeſſer und 30 Zellen und gab bei $1^1/_2$ Meter Geſchwindigkeit den Wirkungsgrad 0,65, dagegen den Gefällcoefficienten $\chi = 0{,}775$. Das zweite Rad hatte gar nur 2,28 Meter im Durchmeſſer; es war ebenfalls aus Holz, hatte aber 24 gekrümmte Blechſchaufeln. Der Wirkungsgrad dieſes Rades ſtellte ſich bei ebenfalls 1,5 Meter Radgeſchwindigkeit $\eta = 0{,}69$ und der Gefällcoefficient $\chi = 0{,}762$ heraus. Das dritte war ein hölzernes Hammerrad von 4 Meter Höhe mit 20 Schaufeln und mindeſtens 1 Meter Stoßgefälle über dem Radſcheitel; es gab bei $1^1/_2$ Meter Umfangsgeſchwindigkeit noch den Wirkungsgrad 0,55 bis 0,60, bei der Geſchwindigkeit von $3^1/_2$ Meter, die es bei ſeiner Arbeitsverrichtung wirklich hatte, $\eta = 0{,}40$, und bei 4 Meter Umfangsgeſchwindigkeit, η gar nur 0,25, weil hier die Centrifugalkraft das Waſſer nicht vollſtändig in die Zellen treten ließ. Morin zieht aus ſeinen Verſuchen die Folgerung, daß bei Rädern unter 2 Meter Durchmeſſer, welche höchſtens mit 2 Meter Geſchwindigkeit umgehen, ſowie bei Rädern über 2 Meter Durchmeſſer, die höchſtens mit $2^1/_2$ Meter Geſchwindigkeit umlaufen, der Coefficient χ des Druckgefälles im Mittel $= 0{,}78$, alſo die Leiſtung dieſer oberſchlägigen Räder, ohne Rückſicht auf Axenreibung,

$$Pv = \left(\frac{(c\cos.\alpha - v)v}{g} + 0{,}78\,h\right)Q\gamma$$

zu ſetzen ſei, wenn h die Höhe der Eintrittsſtelle über dem Radtiefſten, alſo $0{,}78\,h$ die mittlere Höhe des waſſerhaltenden Bogens anzeigt. Dieſer Coefficient $\chi = 0{,}78$ iſt jedoch nur zu gebrauchen, wenn der Füllungscoefficient ε noch unter $^1/_2$ iſt; er ſoll dagegen nach Morin in 0,65 umzuändern ſein, wenn ε nahe $^2/_3$ iſt. Sicherlich iſt bei hohen Rädern χ größer, z. B. bei de hieſigen Kunſträdern mindeſtens $= 0{,}9$. Noch folgert Morin, daß für Räder, welche eine ſehr große Umfangsgeſchwindigkeit (über 2 Meter) haben, oder deren Füllungscoefficient über $^2/_3$ iſt, ſich ein beſtimmter Coefficient χ für den waſſerhaltenden Bogen nicht angeben läßt, weil hier kleine Veränderungen oder Abweichungen in χ und ε ſchon bedeutende Einflüſſe auf die Größe der Leiſtung haben. Es iſt jedoch hierbei zu bemerken, daß es nicht die Geſchwindigkeit, ſondern die Umdrehungszahl u (ſ. Bd. II, §. 187) iſt, welche dieſe Grenze beſtimmt, denn hohe Räder geben bei 2 Meter Umfangsgeſchwindigkeit noch eine hohe und ziemlich beſtimmte Wirkung.

Anmerkung. Wenn hier und in der Folge der umfänglichen Verſuche Nordwall's (ſ. deſſen Maſchinenlehre, Berlin 1804) nicht gedacht wird, ſo hat dies lediglich ſeinen Grund darin, daß dieſelben nur an größtentheils unvollkom-

mene Conſtructionen nachahmenden Modellen angeſtellt worden ſind. Der Verfaſſer ſtimmt hierin ganz dem bei, was Langsdorf in ſeiner Maſchinenlehre, Theil I, Abtheilung 2, §. 518, hierüber ausſpricht.

§. 198 **Rückenſchlägige Waſſerräder.** Noch hat man ſogenannte rückenſchlägige Räder (franz. roues par derrière; engl. high-breast wheels), die ſich von den oberſchlägigen Rädern nur durch die Beaufſchlagung unterſcheiden; während bei den oberſchlägigen Rädern das Waſſer nahe am Radſcheitel eintritt, befindet ſich bei den rückenſchlägigen Rädern die Eintrittsſtelle zwiſchen dem Scheitel und dem Radmittel, jedoch dem erſteren näher, als dem letzteren. Dort liegt das Aufſchlaggerinne über, hier aber neben dem Rade; dort iſt die Radhöhe kleiner, hier aber iſt ſie in der Regel größer, als das Totalgefälle; dort geht endlich das Rad in der Richtung um, in welcher es durch das Gerinne zugeführt wird, hier iſt jedoch die Umdrehungsrichtung die umgekehrte. Man wendet rückenſchlägige Räder beſonders dann an, wenn der Waſſerſtand im Ab- oder Aufſchlagsgraben ſehr veränderlich iſt, weil hier das Rad in der Richtung umgeht, in welcher das Waſſer abfließt, alſo das Waten im Waſſer von wenigem oder gar keinem Nachtheile iſt, und weil hier Schutzvorrichtungen zur Anwendung kommen können, bei denen die Ausmündung ſtellbar iſt, und daher auch immer um eine gewiſſe Höhe unter die Oberfläche des Aufſchlagwaſſers gerückt werden, und ſelbſt bei verſchiedenen Waſſerſtänden die Ausfluß- oder Eintrittsgeſchwindigkeit immer dieſelbe bleiben kann. Schützen für rückenſchlägige Räder ſind in Fig. 404 und Fig. 405 abgebildet; man nennt ſie gewöhnlich Couliſſenſchützen. Bei der Schütze in Fig. 404 iſt das Schutzbrett AB concen-

Fig. 404.

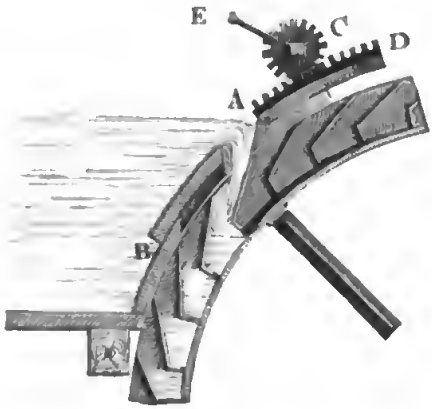
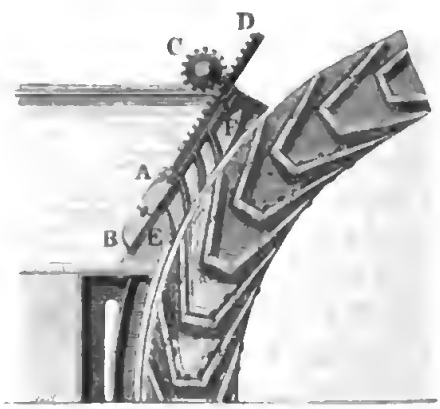


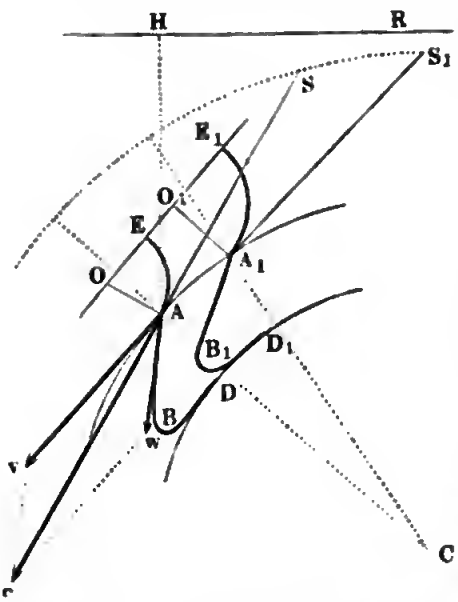
Fig. 405.



triſch mit dem Radumfange gekrümmt, damit die Mündung A bei allen Stellungen des Schutzbrettes das Waſſer gehörig in die Radzellen leitet. Die Bewegung dieſes Schutzbrettes erfolgt durch eine Zahnſtange AD und ein Getriebe C mit Hülſe einer Kurbel CE. Bei der Schütze in Fig. 405

fließt das Waſſer über dem Kopfe A des Schutzbretes ab, das auf ähnliche Weiſe wie das vorige geſtellt wird; damit aber das Waſſer in beſtimmter Richtung zum Rade gelangt, wird ein feſtes Leitſchaufelſyſtem EF zwiſchen das Rad und das Schutzbret gebracht, über welchem dann das Letztere hingleitet. Die Leitſchaufeln müſſen eine beſtimmte Stellung erhalten, damit ſich das Waſſer nicht beim Eintritt an die äußeren Schaufelenden ſtoße. Iſt Aw, Fig. 406, die Richtung des äußeren Radſchaufelendes, ſowie $\overline{Av}$ Größe und Richtung der Geſchwindigkeit eben dieſes Endes A, ſo ergiebt ſich genau wie in §. 178 die erforderliche Richtung $\overline{Ac}$ des eintretenden Waſſers, wenn man $\overline{vc}$ parallel zu $\overline{Aw}$ zieht und $\overline{Ac}$ der durch den Waſſerſtand über A beſtimmten Eintrittsgeſchwindigkeit c gleich macht. Iſt h die Tiefe AH des Punktes A unter dem Waſſerſpiegel HR im Aufſchlaggerinne, ſo läßt ſich mindeſtens $c = 0{,}82\sqrt{2gh}$ ſetzen, wie beim Ausfluſſe durch kurze Anſatzröhren (ſ. Bd. I, §. 421), wenn jedoch die von den Leitſchaufeln gebildeten Canäle nach innen abgerundet ſind, ſo fällt der Ausflußcoefficient noch größer aus, ſo daß $c = 0{,}90\sqrt{2gh}$ geſetzt werden kann. Wendet man gerade Leitſchaufeln an, ſo bringt man ſie in die Richtung cAS, bedient man ſich aber gekrümmter Schaufeln AE, was den Vortheil gewährt, daß hier das Waſſer allmälig aus der Richtung im Gerinne in die Richtung $\overline{Ac}$ übergeht, ſo läßt man dieſelben mit AS in A tangiren, indem man z. B. AO winkelrecht auf AS ſetzt, und einen Kreisbogen AE aus O beſchreibt.

Fig. 406.



Da verſchieden tief liegenden Eintrittspunkten verſchiedene Druckhöhen (h) und alſo auch verſchiedene Geſchwindigkeiten (c) zukommen, ſo hat man die Conſtruction für jede Leitſchaufel beſonders zu machen. Gewöhnlich macht man die Eintrittsgeſchwindigkeit $c = 9$ bis 10 Fuß und die Radgeſchwindigkeit $= {}^1/_2\, c$ bis höchſtens ${}^2/_3\, c$. Man führt dieſe Conſtruction für den mittleren Waſſerſtand im Aufſchlaggerinne aus, damit die Abweichungen beim höchſten und tiefſten Waſſerſtande nicht zu groß ausfallen.

Die Luft kann bei dieſen Schützen weniger leicht entweichen, als bei den Spannſchützen; weshalb dann entweder die Schütze ſchmäler zu machen iſt, als das Rad, oder dieſes beſonders zu ventiliren, d. h. mit Luftlöchern im Rad-

boden (ſ. Fig. 405) zu verſehen iſt. Auch iſt es nicht rathſam, die Radſchaufeln zu ſcharf zu decken, ſondern das Waſſer lieber durch einen Mantel im Rade zurück zu erhalten, als durch die Schaufeln, weil bei großen Deckungswinkeln die Leitſchaufeln einen zu großen Bogen vom Rade einnehmen oder zu enge Canäle bilden, und das nöthige Stoßgefälle zu groß ausfällt.

Was endlich noch den Wirkungsgrad der rückenſchlägigen Räder anlangt, ſo kommt dieſer mindeſtens dem der oberſchlägigen Räder gleich; wegen der zweckmäßigen Waſſereinführung iſt er ſogar oft größer, als bei einem oberſchlägigen Rade unter übrigens gleichen Verhältniſſen. Morin fand bei einem Rade von 9,1 Meter Höhe mit 96 Zellen, wo der Eintritt des Waſſers 50° vom Radſcheitel abſtand, bei $1\frac{1}{2}$ Meter Umfangs- und $2\frac{1}{2}$ Meter Eintrittsgeſchwindigkeit $\eta = 0{,}69$, die Höhe χh des waſſerhaltenden Bogens aber $= 0{,}78 \,.\, h$.

§. 199 **Ventilirte rückenſchlägige Waſſerräder.** Sind die rückenſchlägigen Waſſerräder ventilirt, kann alſo die Luft durch Canäle DE, $D_1 E_1$, Fig. 407, aus den Zellen A, A_1 u. ſ. w. entweichen, ſo kann man die Schaufeln näher an einander rücken, alſo auch eine größere Anzahl der Zellen anwenden, als bei unventilirten rückenſchlägigen Waſſerrädern, wodurch man unter übrigens gleichen Umſtänden mehr Faſſungsraum erhält als bei den oberſchlägigen Rädern, ſo daß ſich der Füllungscoefficient $\varepsilon = \frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ anwenden läßt.

Für die gewöhnliche Schaufelconſtruction hat man annähernd den Querſchnitt des Faſſungsraumes einer Zelle $ABDF$, Fig. 408:

Fig. 407.

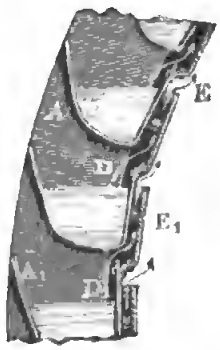
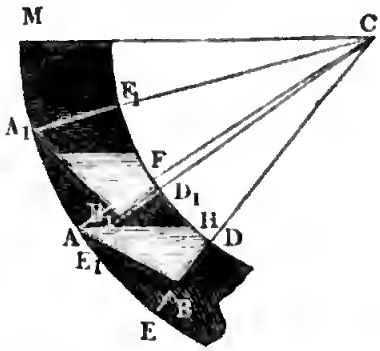


Fig. 408.



$ABDH =$ Viereck $AEDF$ minus Dreieck ABE minus Dreieck AFH
$= \psi a_1 d - \frac{1}{4} \psi a_1 d - \frac{1}{2} d^2 \, tang. \lambda,$

wobei ψ den Schaufelwinkel ACB und λ den Ausgußwinkel $CAH = ACM$ bezeichnen und $\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{DE} = \frac{d}{2}$ vorausgeſetzt wird. Dagegen iſt der ganze Querſchnitt einer Zelle:

$$EDD_1 E_1 = \varphi a_1 d,$$

wovon φ den Theilwinkel $ACA_1 = ECE_1$ bezeichnet. Hiernach folgt der Füllungscoefficient:

$$\varepsilon = \frac{\text{Fläche } ABDH}{\text{Fläche } EDD_1E_1} = \frac{{}^3/_4\,\psi a_1 - {}^1/_2\,d\,tang.\,\lambda}{\varphi a_1},$$

und daher:

$$tang.\,\lambda = ({}^3/_4\,\psi - \varepsilon\varphi)\,\frac{2a_1}{d}.$$

Die größte Raumbenutzung würde dann stattfinden, wenn der eben zum Ausguß gelangende Wasserspiegel AH die folgende Schaufel in B_1 berührte; dies vorausgesetzt, so hätte man, da $BD = BE$, also auch:

$B_1D_1 = B_1E_1$, und $B_1H = B_1A$ und $D_1H = D_1F$, d. i.:

$${}^1/_2\,d\,tang.\,\lambda = (\psi - \varphi)\,a_1, \text{ also auch:}$$

$$tang.\,\lambda = (\psi - \varphi)\,\frac{2a_1}{d}.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Ausdrücke für λ resultirt nun die einfache Formel:

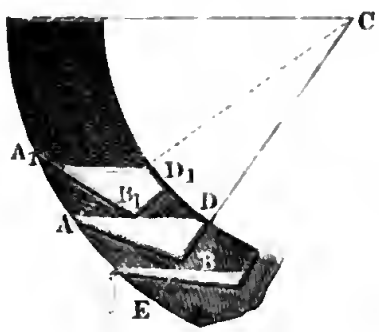
$${}^3/_4\,\psi - \varepsilon\varphi = \psi - \varphi, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\psi}{4(1-\varepsilon)}.$$

Nimmt man $\varepsilon = {}^1/_2$ an, so erhält man endlich

$$\varphi = \frac{\psi}{2},$$

und es bildet der Querschnitt des den Ausguß beginnenden Wasserkörpers ein Dreieck ABD, Fig. 409, dessen Seiten AB und BD von den beiden Schaufelbreiten gebildet werden.

Fig. 409.



Der Schaufelwinkel $ACB = \psi$ bestimmt sich aus dem Eintrittswinkel $BAE = \beta$ mittels der bekannten trigonometrischen Formel:

$$sin.\,ABC = \frac{CA\,sin.\,CAB}{CB}, \text{ d. i.}$$

$$1)\quad cos.\,(\beta - \psi) = \frac{a\,cos.\,\beta}{a - {}^1/_2\,d}.$$

Hieraus ergiebt sich der Schaufelwinkel ACB:

$$2)\quad \psi = \beta - (\beta - \psi),$$

ferner nach der oben gefundenen Formel:

$$3)\quad \varphi = \frac{\psi}{4(1-\varepsilon)}$$

und endlich die Schaufelzahl:

$$4)\quad n = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{360^0}{\varphi^0}.$$

Beiſpiel. Für ein rückenſchlägiges Rad von 15 Fuß Halbmeſſer, 1 Fuß Kranzbreite und mit einem Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad, iſt

$$cos.(\beta - \psi) = \frac{15\, cos.\, 20^0}{14{,}5},\quad log.\, cos.(\beta - \psi) = 0{,}98771 - 1,$$

hiernach ergiebt ſich

$$\beta - \psi = 13^0\, 34',$$

und der Schaufelwinkel

$$\psi = 20^0 - 13^0\, 34' = 6^0\, 26';$$

endlich folgt für $\varepsilon = 1/2$, der Theilwinkel

$$\varphi^0 = \frac{6^0\, 26'}{2} = 3^0\, 13'$$

und die Schaufelanzahl

$$n = \frac{360\,.\,60}{3\,.\,60 + 13} = \frac{21600}{193} = 112.$$

Für den Ausgußpunkt iſt

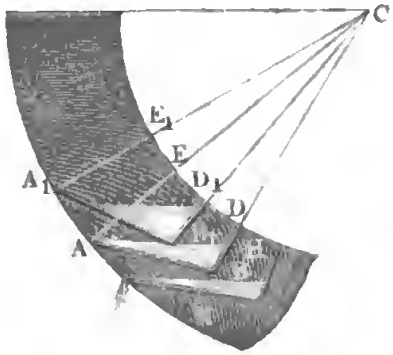
$$tang.\,\lambda = (\psi - \varphi)\,\frac{2\,a_1}{d} = 30\, arc.\, 3^0\, 13' = 1{,}684,$$

und hiernach

$$\lambda = 59^0\, 18'.$$

§. 200 Wenn der Füllungscoefficient ε noch unter $1/2$ iſt, ſo füllt das den Ausguß beginnende Waſſer einer Zelle noch nicht den Raum ABD, Fig. 410, über den beiden Schaufeln BA und BD aus, und es läßt ſich dann die Formel für den waſſerhaltenden Bogen auf folgende Weiſe finden. Es iſt der Querſchnitt des Waſſerraumes einer Zelle

Fig. 410.



$$\triangle ABH = \triangle ANH - \triangle ANB, \text{ d. i.:}$$
$$= 1/2\, AN\,(NH - NB);$$

nun kann man aber

$$AN = CA\ sin.\, ACB = a\ sin.\,\psi,$$
$$NB = AN\ cotang.\, ABN = a\ sin.\,\psi\ tang.(\beta - \psi) \text{ und}$$
$$NH = AN\, cotang.\, AHN = a\ sin.\,\psi\ cotang.(\lambda + \psi)$$

ſetzen; daher folgt dann:

$$\triangle ABH = 1/2\, a^2\, sin.\,\psi^2\,[cotang.(\lambda + \psi) - tang.(\beta - \psi)],$$

und der Füllungscoefficient:

$$\varepsilon = \frac{\triangle ABH}{AEE_1A_1} = \frac{1/2\, a^2\, sin.\,\psi^2\,[cotang.(\lambda + \psi) - tang.(\beta - \psi)]}{d\,a\,\varphi}.$$

Umgekehrt iſt demnach hier

$$cotang.(\lambda + \psi) = tang.(\beta - \psi) + \frac{2\,\varepsilon\,\varphi\,d}{a\ sin.\,\psi^2}.$$

Soll auch hier die Oberfläche des abfließenden Waſſers von der folgenden Schaufel berührt werden, ſo hat man annähernd

$$tang.\,\lambda = (\psi - \varphi)\,\frac{2a}{d};$$

und es laſſen ſich daher mittels beider Gleichungen φ und λ beſtimmen. Es iſt (ſ. „Ingenieur“ Seite 157, Formel XX)

$$cotang.\,(\lambda + \psi) = \frac{cotang.\,\lambda\ cotang.\,\psi - 1}{cotang.\,\lambda + cotang.\,\psi} = \frac{1 - tang.\,\lambda\ tang.\,\psi}{tang.\,\psi + tang.\,\lambda};$$

daher den letzten Werth für $tang.\,\lambda$ eingeſetzt,

$$cotang.\,(\lambda + \psi) = \frac{1 - (\psi - \varphi)\,\frac{2a}{d}\,tang.\,\psi}{tang.\,\psi + (\psi - \varphi)\,\frac{2a}{d}} = \frac{d - 2a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2a\,(\psi - \varphi)},$$

wenn man noch annähernd $tang.\,\psi = \psi$ ſetzt. Hiernach folgt:

$$\frac{d - 2a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2a\,(\psi - \varphi)} = tang.\,(\beta - \psi) + \frac{2\,\varepsilon\,\varphi\,d}{a\,\psi^2},$$

und daher der geſuchte Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{a\,\psi^2}{2\,\varepsilon\,d}\left(\frac{d - 2a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2a\,(\psi - \varphi)} - tang.\,(\beta - \psi)\right),$$

woraus nun die Schaufelzahl $n = \frac{6{,}28}{\varphi}$ zu finden iſt.

Beiſpiel. Wenn wir im vorigen Beiſpiele den Füllungscoefficienten $\varepsilon = 1/4$ annehmen, ſo haben wir den Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{15\,.\,0{,}1123^2}{2\,.\,1/4}\left(\frac{1 - 30\,.\,0{,}1123\,(0{,}1123 - \varphi)}{0{,}1123 + 30\,(0{,}1123 - \varphi)} - 0{,}2413\right)$$

$$= 30\,.\,0{,}012611\left(\frac{1 - 3{,}369\,(0{,}1123 - \varphi)}{0{,}1123 + 30\,.\,(0{,}1123 - \varphi)} - 0{,}2413\right)$$

$$= 0{,}37833\left(\frac{0{,}62166 + 3{,}369\,\varphi}{3{,}4813 - 30\,\varphi} - 0{,}2413\right).$$

Nimmt man ferner annähernd $\varphi = 1/20 = 0{,}05$ an, ſo erhält man genauer:

$$\varphi = 0{,}3783\left(\frac{0{,}62166 + 0{,}16845}{3{,}4813 - 1{,}5} - 0{,}2413\right)$$

$$= 0{,}3783\,.\,0{,}1575 = 0{,}0596,$$

ſetzt man dagegen $\varphi = 0{,}04$, ſo folgt

$$\varphi = 0{,}3783\left(\frac{0{,}62166 + 0{,}13476}{3{,}4813 - 1{,}20} - 0{,}2413\right)$$

$$= 0{,}3783\,(0{,}3316 - 0{,}2413) = 0{,}3783\,.\,0{,}0903 = 0{,}0342.$$

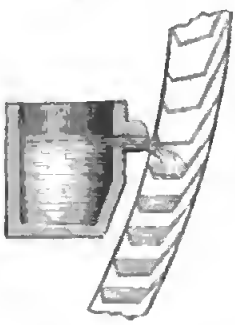
Man kann hiernach $\varphi = 0{,}044$, oder $\varphi^0 = 2^0\,31'$ ſetzen. Die entſprechende Schaufelzahl iſt hiernach:

$$n = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{6{,}283}{0{,}044} = 143,$$

wofür vielleicht der leichteren Vertheilung wegen, $n = 136$ zu nehmen sein möchte.

§. 201 **Mittelschlägige Wasserräder.** Die mittelschlägigen Wasserräder sind entweder gemein mittelschlägige, oder Kropfräder. Die ersteren sind Zellenräder wie die ober- und rückenschlägigen Räder; die letzteren aber sind mit einem Mantel oder Kropfe umgebene Schaufelräder (s. Bd. II, § 170). Da durch das zu zeitige Austreten des Wassers aus den Zellen der größte Gefäll- oder Arbeitsverlust in der unteren Radhälfte statt hat, so ist leicht zu ermessen, daß bei gleichen Verhältnissen und unter gleichen Umständen die mittelschlägigen Räder weniger Wirkungsgrad haben, als die ober- und rückenschlägigen Räder. Aus diesem Grunde hat man denn auch bei den ersteren Rädern das Gefälle noch mehr zusammenzuhalten und dafür Sorge zu tragen, daß das Wasser möglichst lange im Rade zurück gehalten werde; man deckt daher solche Räder gern sehr stark oder führt wohl das Wasser von innen in das Rad, wie z. B. Fig. 411 vorstellt, oder, was das Beste ist, man umgiebt das Rad mit einem Mantel oder Kropfe, und läßt die Schaufeln nur aus einem Stück bestehen. Der Kropf soll vom Radumfange nicht mehr als $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll abstehen, damit durch den übrig bleibenden Zwischenraum so wenig wie möglich Wasser entweichen kann. Was die Schaufeln bei Kropfrädern anlangt, so kann man diese ganz radial stellen, da sie nicht den Zweck haben, das Wasser in dem Rade zurückzuhalten; damit sie aber beim Austritte aus dem Unterwasser kein Wasser mit emporwerfen, ist es rathsam, wenigstens den Theil der Schaufel, welcher ins Unterwasser eingetaucht ist, so schief zu stellen, daß er bei dem Austritte aus demselben eine verticale Lage annimmt. Was die Schaufelzahl betrifft, so ist es hier ebenfalls zweckmäßig, dieselbe groß zu machen, nicht allein, weil dadurch der Wasserverlust durch den Spielraum zwischen Rad und Mantel kleiner ausfällt, sondern auch weil bei einer engeren Schaufelstellung das Stoßgefälle kleiner und also das Druckgefälle größer wird. Gewöhnlich macht man die äußere Entfernung zwischen je zwei Schaufeln der Kranzbreite d gleich, oder nimmt sie 10 bis 15 Zoll, auch wendet man zur Bestimmung der Schaufelzahl wohl eine der oben (Bd. II, §. 175) gegebenen Regeln an. Wesentlich nothwendig ist es aber, daß die mittelschlägigen Räder hinreichend ventilirt werden, weil hier der eintretende Wasserstrahl beinahe den ganzen Querschnitt der Zellen ausfüllt, so daß die Luft nach außen nicht entweichen kann. Man muß deshalb in dem Radboden Spalten zum Entweichen der Luft aufsparen, damit dieselbe nicht dem Eintritte des Wassers entgegen-

Fig. 411.

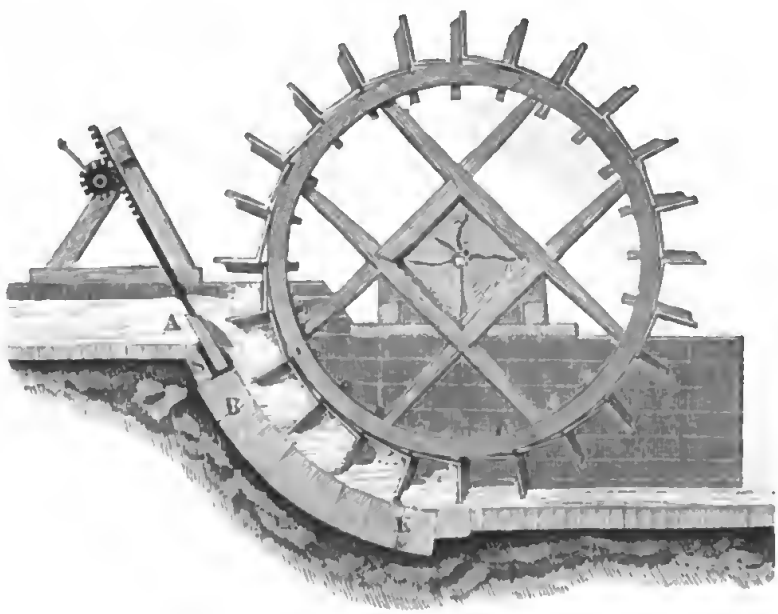


wirkt. Dies iſt bei dieſen Rädern um ſo nöthiger, da man ſie bis zur Hälfte oder gar bis zwei Drittel ihrer Capacität anfüllen läßt. Uebrigens kommen die mittelſchlägigen Räder vorzüglich bei einem Gefälle von 5 bis 15 Fuß und bei einem Aufſchlagsquantum von 5 bis 80 Cubikfuß pr. Secunde in Anwendung.

Anmerkung. Theoretiſche Unterſuchungen und Verſuche über mittel- und unterſchlägige Waſſerräder, welche von innen beaufſchlagt werden, ſind in Schweden angeſtellt worden, worüber ausführlich gehandelt wird in dem Werke: Hydrauliska Försök etc. of Lagerhjelm, of Forselles och Kallstenius, Andra Delen, Stockholm, 1822. Egen beſchreibt ein ſolches Rad in ſeinen Unterſuchungen über den Effect einiger Waſſerwerke ꝛc., Berlin 1831. Dieſes Rad wurde vom Grafen de Thiville auf der Saline Neuwerk bei Werl erbaut, in der Erwartung, durch daſſelbe einen großen Wirkungsgrad zu erlangen. Egen fand jedoch den Wirkungsgrad nur 59 Proc., obgleich dieſes Rad ein Gefälle von 13,42 Fuß benutzte. Nach dieſem Rade wurde ein anderes, aber nur 2 Meter hohes Rad in Frankreich erbaut (ſ. Bulletin de la société d'encouragement Nro. 282), und von Mallet unterſucht; nach genauer Berechnung dieſer Verſuche ſcheint hiernach der Wirkungsgrad nicht größer als 60 Proc. ausgefallen zu ſein. Egen ſagt nun ſehr recht, daß die Räder mit innerer Beaufſchlagung nur in wenigen Fällen zu empfehlen ſein möchten, weil ſie nur eine geringe Breite (unter 4 Fuß) zulaſſen, und ohne dies eine große Feſtigkeit und Stabilität nie beſitzen können.

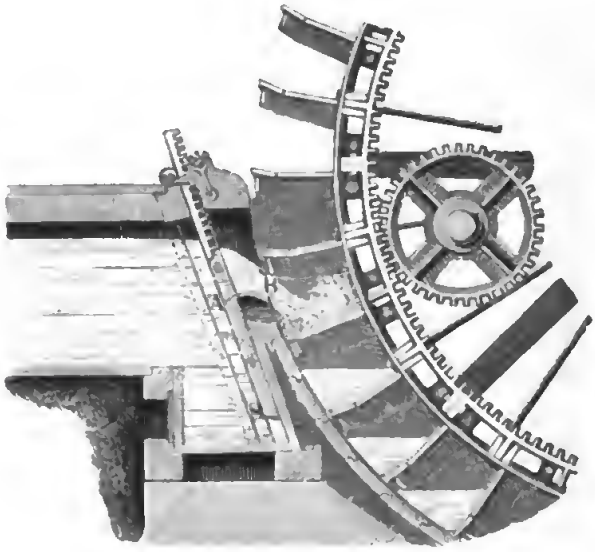
Ueberfallſchützen. Die Waſſereinführung bei mittelſchlägigen §. 202
Waſſerrädern iſt ſehr mannigfaltig, entweder wird das Waſſer durch eine Ueberfallſchütze, oder durch eine Leitſchaufelſchütze, oder durch eine Spannſchütze dem Rade zugeführt, ſelten fließt es aber ganz frei zu. Bei den Ueberfallſchützen AS, welche in den Figuren 412 und 413 (a. f. S.)

Fig. 412.



abgebildet ſind, fließt das Waſſer über den Kopf A des Schutzbrettes; damit es aber in der gehörigen Richtung eintrete, iſt es nöthig, den Schützenkopf abzurunden, oder an denſelben eine abgerundete Leitſchaufel AB, Fig. 413, anzuſetzen. Dieſe Leitſchaufel AB, Fig. 414, iſt nach der Parabel zu krümmen, welche die tiefſten Waſſerelemente bei ihrer freien Bewegung beſchreiben, denn wollte man ſie mehr krümmen, ſo würde ihr der Waſſerſtrahl gar nicht folgen, und gäbe man ihr weniger Krümmung, ſo würde entweder die Leitſchaufelbreite und alſo auch die Reibung des Waſſers auf der Leitſchaufel größer ausfallen oder das Waſſer nicht in der erforderlichen Richtung an das Rad gelangen.

Fig. 413.

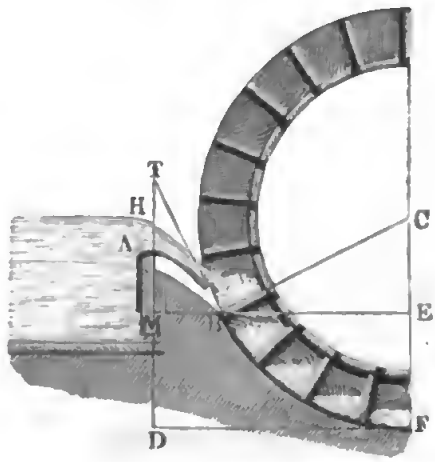


Der Theorie des Ausfluſſes durch Ueberfälle zufolge, hat man (ſ. Bd. I, §. 411) die Ausflußmenge, wenn e_1 die Mündungsweite ſowie h_0 die Druckhöhe $\overline{HA}$, Fig. 414, über der Schwelle bezeichnet, und μ den Ausflußcoefficienten ausdrückt:

$$Q = {}^2/_3 \mu e_1 h_0 \sqrt{2gh_0};$$

iſt aber das Aufſchlagquantum Q und die Mündungsweite e_1, da ſie wenige (3 bis 4) Zoll kleiner als die Radweite e gemacht wird, gegeben, ſo folgt dann die Druckhöhe für den Ausfluß:

Fig. 414.



$$h_0 = \left(\frac{{}^3/_2 Q}{\mu e_1 \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

$$= 0{,}3302 \left(\frac{Q}{\mu e_1}\right)^{2/3}.$$

Nun iſt noch die Geſchwindigkeit c des bei B eintretenden Waſſers durch ihr Verhältniß $\varkappa = \frac{c}{v}$ zur Radgeſchwindigkeit v beſtimmt, daher folgt auch das nöthige Gefälle zur Erzeugung dieſer Geſchwindigkeit:

$$\overline{HM} = h_1 = \frac{c^2}{2g} = \frac{(\varkappa v)^2}{2g},$$

oder wegen des Verluſtes beim Ausfluß, wie oben,

$$h_1 = 1{,}1 \cdot \frac{(\varkappa v)^2}{2g}.$$

Gewöhnlich macht man $\varkappa = 2$, und daher iſt

$$h_1 = 4{,}4 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

zu ſetzen. Aus h_0 und h_1 folgt nun die Höhe $\overline{AM}$ der Kröpfung der Leitſchaufel,

$$x = h_1 - h_0;$$

und iſt nun das Totalgefälle $\overline{HD} = h$, ſo bleibt für das Druckgefälle im Rade:

$$\overline{MD} = \overline{EF} = h_2 = h - h_1$$

übrig. Noch hat man, der Theorie der Wurfbewegung zufolge, den Neigungswinkel $TBM = \nu$ des Leitſchaufelendes gegen den Horizont beſtimmt durch die Formel:

$$x = \frac{c^2 \sin.\nu^2}{2g}, \text{ folglich iſt}$$

$$\sin.\nu = \sqrt{\frac{x}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_1}}$$

und die Länge der Kröpfung der Leitſchaufel:

$$\overline{MB} = y = \frac{c^2 \sin.2\nu}{2g} = h_1 \sin.2\nu.$$

Endlich iſt, wenn man noch die Forderung macht, daß das Waſſer tangential an das Rad gelangt, der Radhalbmeſſer $\overline{CB} = \overline{CF} = a$ beſtimmt durch die Gleichung:

$$a(1 - \cos.\nu) = h - h_1,$$

alſo

$$a = \frac{h - h_1}{1 - \cos.\nu}.$$

Umgekehrt hat man für den Centriwinkel $BCF = \theta$ des waſſerhaltenden Bogens:

$$\cos.\theta = 1 - \frac{h - h_1}{a},$$

und, wenn man der letzten Bedingung nicht Genüge leiſtet, alſo ν nicht $= \theta$ macht, ſo hat man die Abweichung der Richtung des eintretenden Strahles von der Bewegungsrichtung der von ihm geſtoßenen Schaufel:

$$a = \theta - \nu.$$

Beiſpiel. Wenn bei einem mittelſchlägigen Rade mit Ueberfallſchütze das Aufſchlagwaſſerquantum $Q = 6$ Cubikfuß, das Totalgefälle $h = 8$ Fuß, die Umfangsgeſchwindigkeit $v = 5$ Fuß iſt, und das Füllungsverhältniß $\frac{2}{5}$ betragen ſoll, ſo hat man bei 1 Fuß Radtiefe die erforderliche Radweite:

$$c = {}^{5}/_{3} \cdot \frac{Q}{dv} = \frac{5 \,.\, 6}{2 \,.\, 1 \,.\, 5} = 3 \text{ Fuß},$$

und wenn man nun hiernach die Weite des Ueberfalles $= 2^{3}/_{4}$ Fuß macht und $\mu = 0{,}6$ setzt, so erhält man die Wasserstandshöhe:

$$h_0 = 0{,}3302 \left(\frac{6}{0{,}6 \,.\, 11/4}\right)^{2/3} = 0{,}3302 \left(\frac{4}{1{,}1}\right)^{2/3} = 0{,}781 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man $x = {}^{8}/_{5}$ an, so erhält man das Gefälle zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = {}^{8}/_{5} \,.\, 5 = 8 \text{ Fuß}, \quad h_1 = 1{,}1 \,.\, 0{,}016 \,.\, 8^2 = 1{,}126 \text{ Fuß},$$

und daher die Höhe der Schaufelkröpfung:

$$x = 1{,}126 - 0{,}781 = 0{,}345 \text{ Fuß} = 4^{1}/_{7} \text{ Zoll},$$

ferner für den Neigungswinkel des Leitschaufelendes:

$$\sin. \nu = \sqrt{\frac{0{,}345}{1{,}126}} = 0{,}5539;$$

hiernach $\nu = 33^0\,38'$, und die Länge der Leitschaufelkröpfung:

$$y = 1{,}126 \sin. 67^0\,16' = 1{,}039 \text{ Fuß} = 12^{1}/_{2} \text{ Zoll}.$$

Um das Wasser tangential einzuführen, müßte das Rad den großen Halbmesser

$$a = \frac{h - h_1}{1 - \cos. \nu} = \frac{8 - 1{,}126}{1 - \cos. 33^0\,38'} = \frac{6{,}874}{0{,}1674} = 41{,}06 \text{ Fuß}$$

erhalten; wenn man es aber nur 25 Fuß hoch macht, also $a = 12{,}5$ Fuß annimmt, so erhält man für den Centriwinkel θ des wasserhaltenden Bogens:

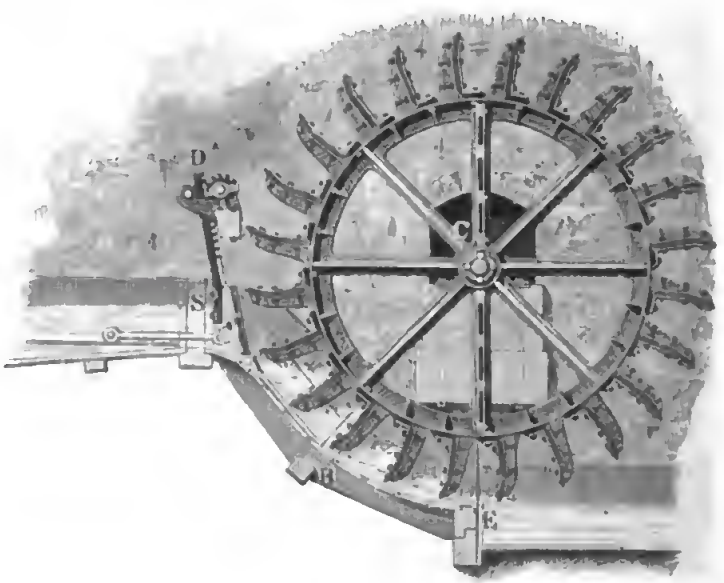
$$\cos. \theta = 1 - \frac{6{,}874}{12{,}5} = 0{,}450,$$

also $\theta = 63^0\,16'$ und die Abweichung der Bewegungsrichtung des Wassers von der des Rades an der Eintrittsstelle:

$$\alpha = \theta - \nu = 63^0\,16' - 33^0\,38' = 29^0\,38'.$$

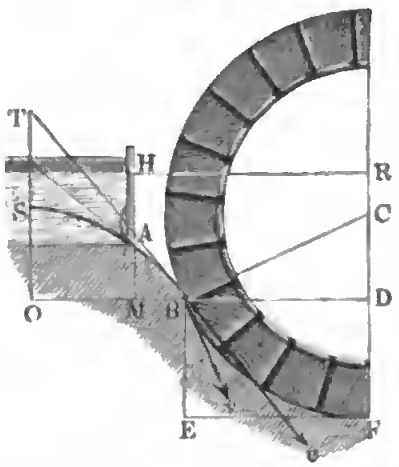
§. 203 Spann- und Coulissenschützen. Die Beaufschlagung eines mittelschlägigen Rades durch eine Spannschütze führt Fig. 415 vor Augen.

Fig. 415.



Es ist hier das übrigens so nahe wie möglich an das Rad gerückte Schutzbrett AD unten sehr dick und gut abgerundet, damit das Wasser in gehöriger Richtung und ohne Contraction durch die Schutzöffnung fließe. Aus demselben Grunde ist auch das Ende A des Gerinnbodens paraboliſch zu formen. Die Höhe $\overline{BE} = \overline{DF} = h_2$, Fig. 416, des Kropfes bestimmt sich aus dem Totalgefälle $\overline{RF} = h$ und der Geschwindigkeitshöhe

Fig. 416.



$$\overline{MH} = h_1 = 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1{,}1 \cdot \frac{\varkappa^2 v^2}{2g}$$

durch die Formel $h_2 = h - h_1$, folglich der entsprechende Centriwinkel

$$BCF = \theta,$$

indem man setzt:

$$\cos.\theta = \frac{CD}{CB} = \frac{a - h_2}{a}$$

$$= 1 - \frac{h - h_1}{a}.$$

Wenn man nun das Wasser tangential einführen will, so muß man die Neigung $TBO = \nu$ des Wasserstrahles gegen den Horizont $= \theta$ setzen, und hiernach die Coordinaten $\overline{SO} = x$ und $\overline{OB} = y$ des Parabelscheitels S durch die Formeln

$$x = \frac{c^2 \sin.\theta^2}{2g} \text{ und } y = \frac{c^2 \sin.2\theta}{2g}$$

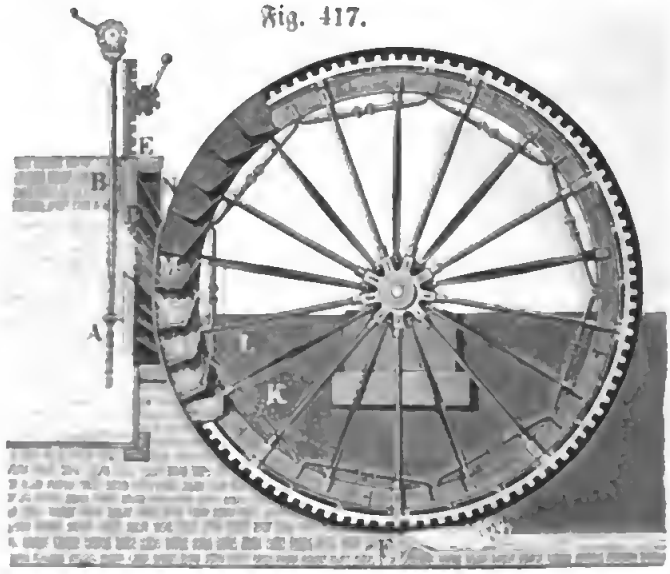
bestimmen.

Man hat aber nicht nöthig, die Schutzöffnung genau in den Parabelscheitel S zu legen, sondern man kann dieselbe nach jedem anderen Punkte A des Parabelbogens SB versetzen, nur muß dafür gesorgt werden, daß die Mündungsaxe tangential an die Parabel zu liegen komme (s. Bd. II, §. 181).

Eine dritte Wassereinführung besteht in der Schütze mit Leitschaufeln oder in der Couliſſenschütze AB, Fig. 417 (a. f. S.). Man wird diese besonders dann mit großem Vortheil anwenden, wenn der Wasserstand im Aufschlaggerinne sehr veränderlich ist. Der in Fig. 417 abgebildete Apparat besteht aus zwei Schutzbrettern A und B, wovon jedes für sich gestellt und dadurch nicht allein die Druckhöhe, sondern auch die Ausflußöffnung verändert werden kann. Eine tangentiale Einführung des Wassers in das Rad ist durch den Leitschaufelapparat DE nicht möglich, man muß sich vielmehr damit begnügen, die Richtungen der Leitschaufeln noch 20 bis 30 Grad von den Tangentialrichtungen abweichen zu lassen. Das Wasser läuft zwischen den Leitschaufeln hindurch nach demselben Gesetze, wie es durch kurze Ansatzröhren ausfließt; es ist daher in der Regel der Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}82$

und nur bei genauer Abrundung von innen, $\mu = 0{,}90$ anzunehmen. Aus dieſem Grunde fällt denn auch der Widerſtandscoefficient größer aus, als bei der Ueberfall- und bei der Spannſchütze. Nehmen wir für μ den Mittel-

Fig. 417.



werth 0,85 an, ſo erhalten wir die zur Erzeugung der Geſchwindigkeit c nöthige Druckhöhe:

$$h_1 = \left(\frac{1}{0{,}85}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1{,}384\ \frac{c^2}{2g},$$

und es iſt hiernach die von dem Totalgefälle h übrigbleibende Höhe des Kropfes oder waſſerhaltenden Bogens:

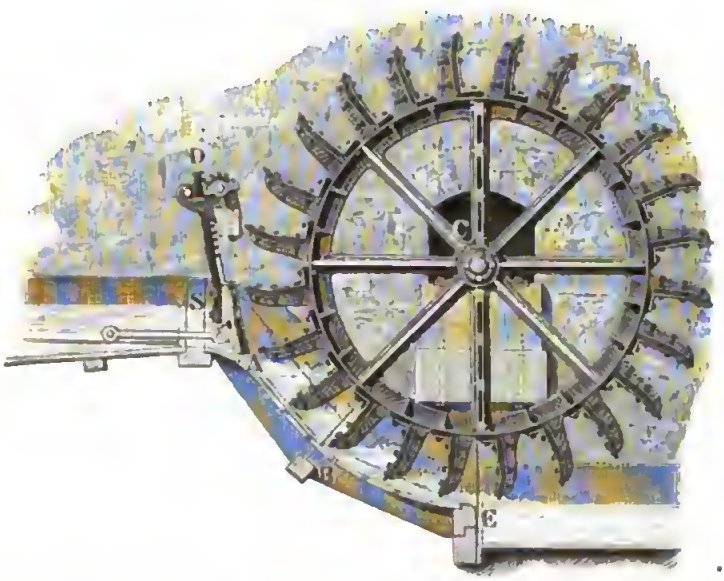
$$h_2 = h - h_1 = h - 1{,}384\ \frac{x^2 v^2}{2g}.$$

Bei veränderlichem Waſſerſtande macht man die Anordnung für den mittleren Waſſerſtand, indem man das äußerſte Ende M der mittleren Leitſchaufel um die letzte Höhe h_2 über den Fuß F des Rades legt. Um ſämmtliche Leitſchaufeln, deren Normalabſtand etwa 3 Zoll gemacht wird, unter gleichen Winkeln gegen den Radumfang zu ſtellen, legt man ſie tangential an einen zum Radumfange concentriſchen Kreis KL, der durch die Richtung DK der erſten Leitſchaufel beſtimmt wird.

§. 204 **Kropf- und Radconſtructionen.** Der Mantel oder ſogenannte Kropf, womit man die mittelſchlägigen Räder umgiebt, um das Waſſer in denſelben ſo lange wie möglich zurückzuhalten, wird entweder von Steinen (ſ. Fig. 412) oder von Holz (ſ. Fig. 415) gebildet. Jedenfalls wird der Zweck eines Kropfes um ſo mehr erfüllt, je kleiner der Spielraum zwiſchen den äußerſten Kanten der Radſchaufeln und der von dem Kropfboden gebil-

deten Cylinderfläche ist, weil durch diesen Spielraum dem Wasser Gelegenheit zum Entweichen gegeben wird. Bei den besten Constructionen macht man diesen Zwischenraum $^1/_2$ Zoll, doch findet man ihn auch 1 und nicht selten sogar 2 Zoll weit. Bei hölzernen Rädern und hölzernen Kröpfen genügt deshalb ein Spielraum von $^1/_2$ Zoll Weite nicht, weil diese leichter und öfters unrund werden, so daß endlich gar ein Anstreifen des Rades am Kropfe zu befürchten ist. Bei eisernen Rädern und Kropfgerinnen aus Quadersteinen fallen bedeutende Deformationen nicht vor, weshalb man hier allerdings dem Spielraume nur $^1/_2$ Zoll Weite geben soll. Räder mit enganschließenden Kröpfen können durch feste Körper, wie z. B. durch Holz- oder Eisstücke, die durch das Wasser zugeführt werden, bedeutende Beschädigungen erleiden; deshalb ist es denn auch nöthig, diese durch Rechen, welche vor der Schütze aufzustellen sind, von dem Zutritte zum Rade abzuhalten. Wenn dies, freilich zum Nachtheile der Wirkung des Rades, nicht oder nur unvollkommen geschieht, so ist allerdings der Spielraum des Rades im Kropfe sehr weit zu machen. Zu steinernen Kröpfen wählt man gern sehr große Sandsteinquader und verbindet dieselben durch Cement oder hydraulischen Kalk; hölzerne Kröpfe AE, Fig. 418, werden aus Kropfschwellen

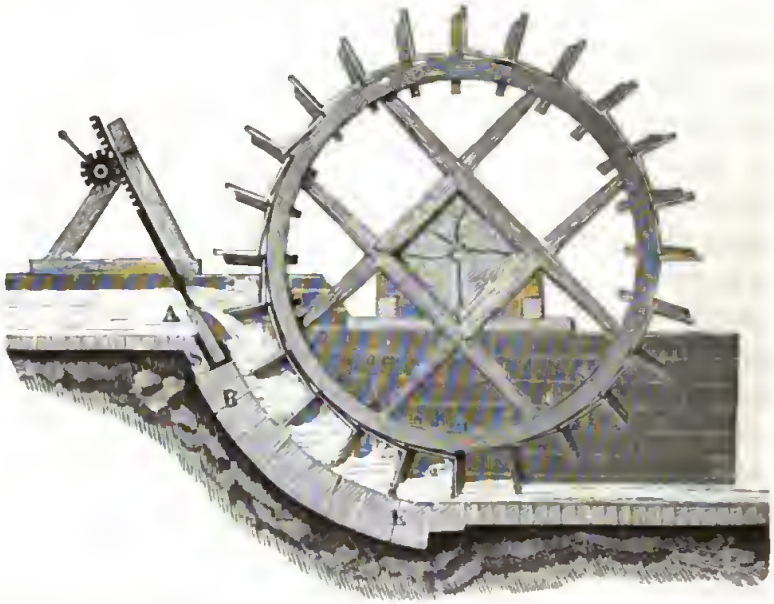
Fig. 418.



A, B, E, Kropfballen AB, BE und aus Kropfdielen, welche quer über die letzteren zu liegen kommen, gebildet. In der Regel befestigt man noch besondere Wasserbänke auf die Kropfdielen, welche das Rad zu beiden Seiten umfassen, um dadurch das seitliche Entweichen des Wassers zu verhindern. Wenn das Wasser im Abzugscanale mit derselben Geschwindigkeit abfließen kann, mit welcher das Rad umläuft, so kann man den

Kropf AE, Fig. 419, unter dem Untertheile des Rades, in der Sohle EH des Abzugscanales auslaufen laſſen; wenn aber das Waſſer langſamer abfließt, als das Rad umläuft, oder wenn gar Aufſtauungen des Unterwaſſers

Fig. 419.



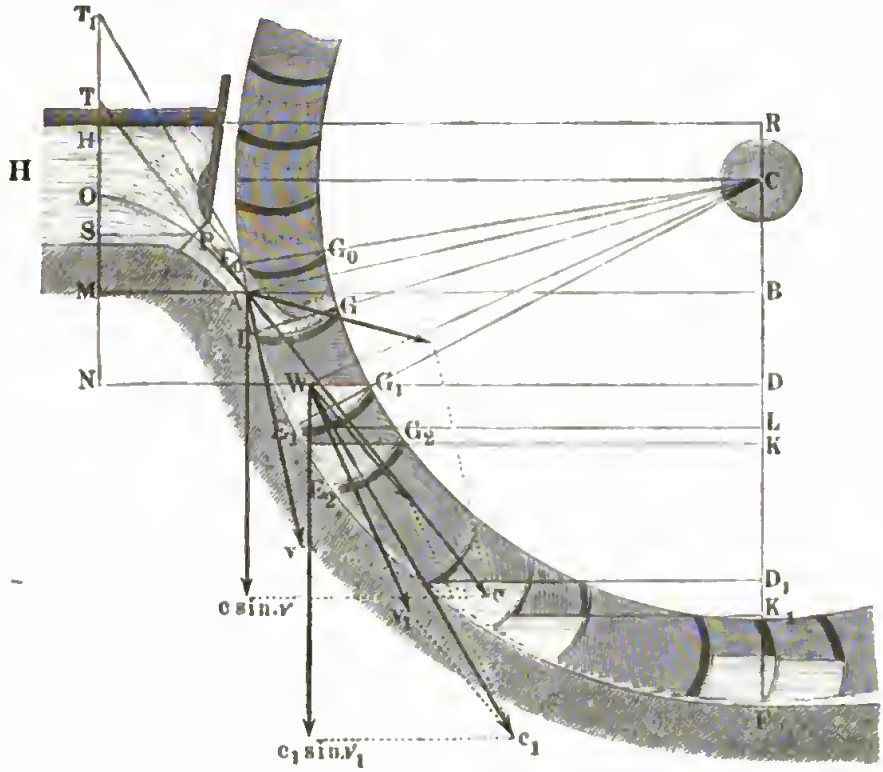
zu befürchten ſind, ſo muß man einen Abſatz E, Fig. 418, zwiſchen dem Kropfe und dem Abzugscanale herſtellen.

Was endlich die Radconſtructionen anlangt, ſo findet ein Unterſchied zwiſchen den ober- und mittelſchlägigen Rädern ſchon darin ſtatt, daß jene nur Zellen-, dieſe aber in der Regel bloße Schaufelräder ſind; nächſtdem weichen dieſe Räder auch in der Art und Weiſe der Verbindung der Schaufeln mit den Kränzen von einander ab. Man unterſcheidet hiernach Staberäder und Strauberäder von einander, und rechnet nun zu den Staberädern diejenigen, bei welchen die Schaufeln zwiſchen zwei Kränzen befeſtigt ſind, zu Strauberädern aber diejenigen, deren Schaufeln auf kurzen Armen (Kolben oder Schaufelarmen) aufſitzen, welche radial aus dem Radkranze hervorragen. Fig. 417 iſt ein Staberad, Fig. 418 und 419 aber ſind Strauberäder; Fig. 419 iſt ein hölzernes und Fig. 418 ein eiſernes Strauberad. Schmale Strauberäder haben nur einen, weite aber haben, wie die Staberäder, zwei Kränze. Die Kränze der Strauberäder ſind jedoch ſchmäler als die der Staberäder. Bei den hölzernen Rädern ſind die Schaufelarme durch die aus zwei Felgenlagen gebildeten Kränze hindurchgeſteckt, oder zwiſchen denſelben ſchwalbenſchwanzförmig eingelegt; bei den eiſernen Rädern aber werden ſie entweder mit den einzelnen Kranzſegmenten aus einem Stücke gegoſſen oder auf dieſe aufgeſchraubt. Die Schaufeln ſind gewöhnlich von Holz, und werden auf ihre Arme aufgeſchraubt. Der

Radboden liegt hier auf dem äußeren Umfang des Radkranzes und umſchließt das Rad nicht vollſtändig, indem in ihm Spalten zum Entweichen der Luft ausgeſparrt ſind, wie die Figuren 418 und 419 vor Augen führen. Uebrigens ſind auch dieſe Räder entweder Stern- oder Sattelräder (ſ. §. 172).

Einführung des Waſſers. Die Regeln über die Einführung des Waſſers in ein Kropfrad, Fig. 420, ſind im Allgemeinen dieſelben wie §. 205

Fig. 420.



bei den Zellenrädern. Aus der Geſchwindigkeit $c = \varkappa v$ des bei A eintretenden Waſſers folgt das nöthige Gefälle zur Erzeugung derſelben:

$$h_1 = 1{,}1\,\frac{c^2}{2g},$$

und daher das übrigbleibende, der Kropfhöhe gleiche Druckgefälle im Rade:

$$FB = h_2 = h - h_1 = h - 1{,}1\,\frac{c^2}{2g}.$$

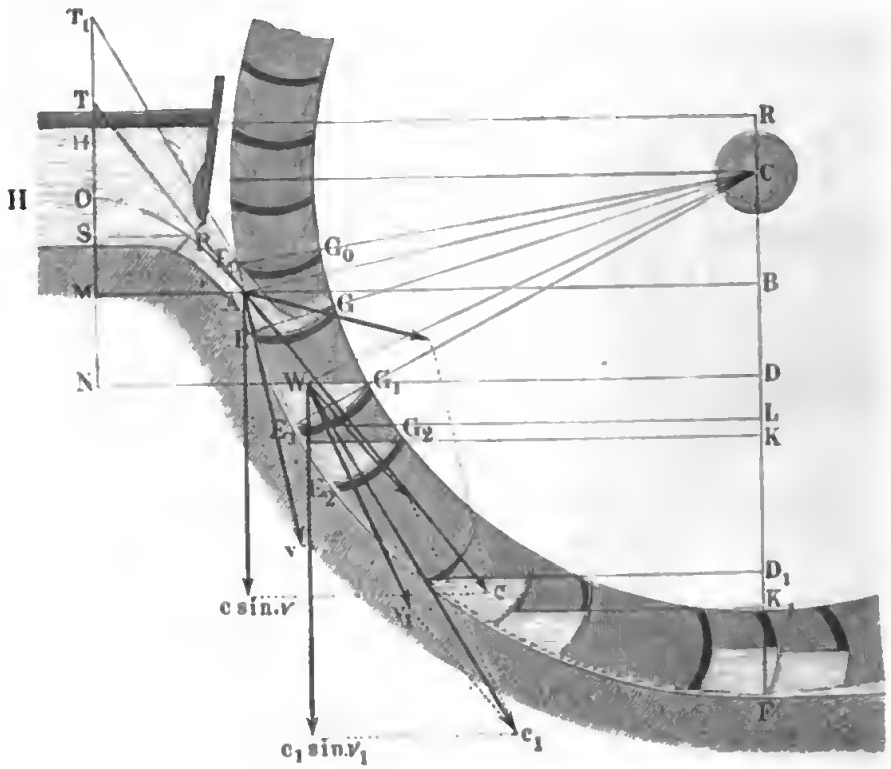
Giebt man noch den Radhalbmeſſer $CA = CF = a$, ſo läßt ſich der Winkel $ACF = \theta$, um welchen die Eintrittsſtelle A vom Radtiefſten F abſteht, durch die Formel

$$\cos.\,ACF = \frac{CB}{CA} = \frac{CF - FB}{CA},\quad \text{d. i.}$$

$$cos.\,\theta = \frac{a - h_2}{a} = 1 - \frac{h_2}{a}$$ berechnen.

Da der Zutrittswinkel $vAc = \alpha$ (10 bis 20 Grad) als gegeben an-

Fig. 421.



zuſehen iſt, ſo kann man hier auch den Neigungswinkel des in A eintretenden Waſſerſtrahles:

$$cAB = v = \theta - \alpha$$

beſtimmen, woraus ſich wieder die Coordinaten des Scheitels O von dem einfallenden Parabelbogen:

$$\overline{OM} = x = \frac{c^2\ sin.\ v^2}{2\,g}$$ und

$$\overline{MA} = y = \frac{c^2\ sin.\ 2\,v}{2\,g}$$ ergeben.

Legt man nun die Mitte P der Schützenmündung um $\overline{MS} = z$ über die Eintrittsſtelle A, ſo erhält man die Coordinaten von P in Hinſicht auf O:

$$\overline{OS} = x_0 = x - z$$ und

$$\overline{SP} = y_0 = y\sqrt{\frac{x - z}{x}} = y\sqrt{1 - \frac{z}{x}},$$

ſowie für die Neigung der Axe des Strahles beim Austritt P:

$$tang.\ v = \frac{2\,x_0}{y_0} = \frac{2\sqrt{x\,(x-z)}}{y}.$$

Kennt man die ſenkrechte Tiefe $\overline{MN} = z_1$, um welche das Waſſer im Rade ſinkt, bis es vollſtändig zum Stoße gelangt, ſo hat man für die Coordinaten des Punktes W, wo dieſer Stoß beendigt iſt,

$$\overline{ON} = x_1 = x + z_1, \text{ und}$$

$$\overline{NW} = y_1 = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}},$$

ſowie für den Neigungswinkel DWc_1 des Waſſerſtrahles in W gegen den Horizont:

$$tang.\ v_1 = \frac{2\,x_1}{y_1} = \frac{2\sqrt{x\,(x+z_1)}}{y}.$$

Ferner folgt für den Winkel $WCF = \theta_1$, um welchen der Punkt W vom Radfuße F abweicht, wenn a_1 den mittleren Radhalbmeſſer CW bezeichnet,

$$cos.\,\theta_1 = \frac{CD}{CW} = \frac{a\,cos.\,\theta + z_1}{a_1};$$

und der Winkel $c_1 W v_1 = \alpha_1$, um welchen die Richtung der Endgeſchwindigkeit c_1 des Waſſers in W von der der Radgeſchwindigkeit v_1 daſelbſt abweicht,

$$\alpha_1 = \theta_1 - v_1.$$

Endlich iſt, wie oben, die Geſchwindigkeit, mit welcher das Waſſer in W aufſchlägt,

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2gz_1}.$$

Die letzteren Beſtimmungen ſetzen voraus, daß die Fallhöhe $\overline{MN} = z_1$ bekannt ſei. Dieſe iſt daher vorher, und zwar auf dem im Folgenden angegebenen Näherungsweg zu finden.

In der Zeit $t = \frac{EE_1}{v} = \frac{s}{v}$ legt die Schaufel EG, welche der Schaufel $E_0 G_0$ unmittelbar vorausgeht, einen Weg $\overline{EE_1} = s$ zurück, während das von $E_0 G_0$ abgeſchnittene Einfallwaſſer den Weg $\overline{AW}$ macht, deſſen Verticalprojection $= \overline{MN} = z_1$ iſt. Da die Verticalprojectionen der Geſchwindigkeit des Waſſerſtrahles in A und W

$$c\ sin.\ v \quad \text{und} \quad c_1\ sin.\ v_1$$

ſind, ſo folgt die mittlere Geſchwindigkeit, mit welcher z_1 durchlaufen wird:

$$\frac{c\ sin.\ v + c_1\ sin.\ v_1}{2}, \text{ und daher auch}$$

$$t = \frac{2\,z_1}{c\ sin.\ v + c_1\ sin.\ v_1}.$$

Hiernach iſt

$$\frac{s}{v} = \frac{2 z_1}{c \sin. v + c_1 \sin. v_1},$$

und daher der Weg, welchen die Schaufel während der Füllung durchläuft:

$$s = \frac{2 z_1 v}{c \sin. v + c_1 \sin. v_1}.$$

Nimmt man nun erſt für z_1 einen Näherungswerth an, und berechnet mit Hülfe dieſer Formel s, ſo kann man auch die entſprechende Stelle der Schaufel $E_1 G_1$ aufzeichnen; und trägt man über dieſelbe den Querſchnitt $F = \frac{V}{e} = \frac{60 Q}{n u e}$ des Waſſerkörpers zwiſchen je zwei Schaufeln, ſo kann man unterſuchen, ob die Oberfläche W des letzteren die angenommene Tiefe $\overline{MN} = z_1$ unter dem Eintrittspunkte A hat. Iſt dies nicht der Fall, ſo muß man ein anderes z_1 annehmen, s von Neuem beſtimmen, und die vorige Probe wiederholen. Findet auch dann noch keine Uebereinſtimmung zwiſchen den angenommenen und beſtimmten Werthen von z_1 ſtatt, ſo iſt dieſes Verfahren nochmals anzuwenden.

§. 206. **Leiſtung der Kropfräder.** Die Leiſtung der Räder im Kropfgerinne zerfällt, wie bei einem oberſchlägigen Rade, in eine Stoß- und in eine Druckleiſtung; es iſt auch die Formel für die Leiſtung beider genau dieſelbe, nur macht die Beſtimmung des Waſſerverluſtes verſchiedene Rechnungen nöthig, denn während dort dieſer Verluſt in dem allmäligen Ablaufen des Waſſers aus den Zellen ſeinen Grund hat, entſteht er hier durch das Entweichen des Waſſers in dem Zwiſchenraume zwiſchen dem Rade und dem Kropfe. Wir haben alſo hier zu unterſuchen, auf welche Weiſe und in welcher Menge das Waſſer in dieſem Zwiſchenraume, den man deshalb auch den ſchädlichen Raum nennen kann, erfolgt, und müſſen hiernach die Wirkung, welche dadurch dem Rade entzogen wird, berechnen. Setzen wir nun, wie bei den oberſchlägigen Rädern, die Eintrittsgeſchwindigkeit des Waſſers in den Theilkreis des Rades $= c_1$, die Geſchwindigkeit des Rades in Theilkreiſe, $= v_1$ und den Winkel $c_1 W v_1$, Fig. 422, zwiſchen den Richtungen dieſer Geſchwindigkeiten, $= \alpha_1$, ſo haben wir wieder die Stoßleiſtung:

$$= \frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} \cdot Q \gamma.$$

Bezeichnen wir ferner den Niveauabſtand DK_1 zwiſchen dem Eintrittspunkte W und der Oberfläche des Unterwaſſers durch h_3, und nehmen wir an, daß von dem Aufſchlagquantum Q nur der Theil $Q_1 = \xi Q$ im

Kropfe zur Wirkung gelange, ſo können wir die Druckleiſtung des Waſſers $= h_1 Q\gamma$, und genau wie bei einem oberſchlägigen Rade die Totalleiſtung

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)v_1}{g} + \xi h_3\right) Q\gamma \text{ ſetzen.}$$

Um mit Hülfe der vorſtehenden Formel die Leiſtung des Kropfrades berechnen zu können, iſt noch nöthig das Verhältniß $\xi = \frac{Q_1}{Q}$ zu ermitteln.

Der Arbeitsverluſt, welcher aus dem Entweichen des Waſſers durch den Spielraum (franz. jeu; engl. back-lash) des Rades im Kropfe hervorgeht, iſt bei dem Stoße des Waſſers unbedeutend, da der eintretende Waſſerſtrahl dieſen Spielraum in der Regel nicht unmittelbar trifft; anders iſt es aber bei dem Drucke deſſelben, denn hier findet ein ununterbrochener Waſſerverluſt ſtatt, während eine Schaufel $E_1 G_1$ (Fig. 418) nach und nach in tiefere Stellungen $E_2 G_2$, $E_3 G_3$ u. ſ. w. kommt, ehe ſie die tiefſte Stelle F erreicht. Es bildet hier der Spielraum Ausflußöffnungen $E_1, E_2 \ldots$, durch welche das Waſſer mit veränderlichen Druckhöhen ausfließt.

Bezeichnen wir wieder die Radweite durch e, und ſetzen die Weite des Spielraumes oder den kürzeſten Abſtand der Radſchaufeln vom Kropfboden durch σ, ſo können wir den Querſchnitt der Oeffnung, durch welche das Waſſer aus einer Zelle in die nächſt tiefere fließt, $= \sigma e$ ſetzen; und ſind nun während des allmäligen Niederganges der Zelle die Druckhöhen, oder Tiefen $\overline{DL}$ der Ausflußmündung unter den darüber ſtehenden Waſſerſpiegeln nach und nach l_1, l_2, u. ſ. w, ſo folgen die entſprechenden Ausflußgeſchwindigkeiten

$$v_1 = \sqrt{2gl_1};\quad v_2 = \sqrt{2gl_2} \text{ u. ſ. w.,}$$

und Ausflußmengen innerhalb eines Zeitelementes τ

$$V_1 = \sigma e \tau \sqrt{2gl_1},\quad V_2 = \sigma e \tau \sqrt{2gl_2} \text{ u. ſ. w.;}$$

oder, wenn man noch einen Ausflußcoefficienten μ einführt,

$$V_1 = \mu\sigma e \tau \sqrt{2gl_1},\quad V_2 = \mu\sigma e \tau \sqrt{2gl_2} \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſe Waſſermengen ſinken unbenutzt von den Höhen $\overline{DK} = k_1, k_2$ u. ſ. w. herab, um welchen je zwei benachbarte Waſſerſpiegel in den Radzellen von einander abſtehen; es ſind daher die durch die Waſſerverluſte V_1, V_2 u. ſ. w. herbeigeführten Arbeitsverluſte:

$$V_1 k_1 \gamma = \mu\sigma e \tau \sqrt{2gl_1}.k_1\gamma,\quad V_2 k_2 \gamma = \mu\sigma e \tau \sqrt{2gl_2}.k_2\gamma, \text{ u. ſ. w.}$$

Die Summe dieſer Verluſte giebt den Arbeitsverluſt der Radzelle

$$A_1 = \mu\sigma e \tau \sqrt{2g}.\gamma(k_1\sqrt{l_1} + k_2\sqrt{l_2} + \cdots).$$

Nun iſt aber die Länge des Kropfes $= \theta a$, und die Zeit, während eine Schaufel denſelben mit der Geſchwindigkeit v durchläuft:

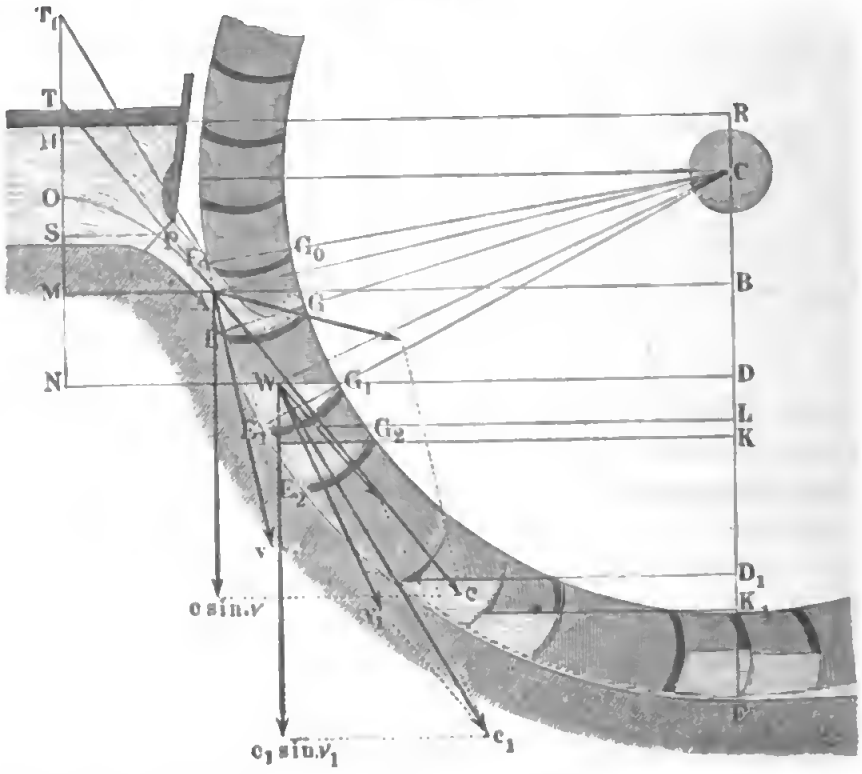
$$t = \frac{\theta a}{v};$$

ſetzt man daher $\tau = \frac{t}{n_1}$, ſo folgt

$$A_1 = \mu\sigma e \frac{\theta a}{v} \sqrt{2g}\,\gamma \left(\frac{k_1\sqrt{l_1} + k_2\sqrt{l_2} + \cdots}{n_1}\right),$$

zieht man dieſen Arbeitsverluſt von der Arbeit $A = Vh_3\gamma = Fch_3\gamma$ ab, welche das Waſſer einer Schaufel beim Herabſinken von der Kropfhöhe ver-

Fig. 422.



richten würde, wenn kein Waſſerverluſt ſtatt hätte, ſo erhält man die wirkliche Arbeit des Waſſers einer Schaufel

$$A - A_1 = Fch_3\gamma\left(1 - \mu\sigma\frac{\theta a}{Fv}\sqrt{2g}\cdot\frac{k_1\sqrt{l_1} + k_2\sqrt{l_2} + \cdots}{n_1 h_3}\right);$$

und daher die entſprechende Arbeit des Waſſers durch Druck

$$L_2 = \frac{nu}{60}(A - A_1) = \frac{nu}{60}Fch_3\gamma\left(1 - \frac{\mu\sigma\theta a\sqrt{2g}}{Fv}\frac{(k_1\sqrt{l_1} + k_2\sqrt{l_2}\cdots)}{n_1 h_3}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\mu\sigma\theta a\sqrt{2g}}{Fv}\frac{k_1\sqrt{l_1} + k_2\sqrt{l_2} + \cdots}{n_1 h_3}\right) Qh_3\gamma;$$

oder mit Anwendung der Simpſon'ſchen Regel:

$$L_2 = \left(1 - \frac{\mu\sigma\theta a\sqrt{2g}}{Fv}\cdot\frac{k_0\sqrt{l_0}+4k_1\sqrt{l_1}+2k_2\sqrt{l_2}+4k_3\sqrt{l_3}+k_4\sqrt{l_4}}{12\,h_3}\right)Qh_3\gamma.$$

Es fällt folglich die Druckleiſtung des Waſſers im Kropfe um ſo größer aus, je größer die Radgeſchwindigkeit v und je größer der Querſchnitt F des Waſſers einer Zelle, d. i. je ſtärker die Radfüllung iſt.

Um die Rechnung ausführen zu können, hat man den Bogen E_1F in n_1, z. B. in vier gleiche Theile zu theilen, durch die Theilpunkte Schaufeln zu legen, über dieſelben die Querſchnittsfläche aufzutragen und die Höhen k_1, $k_2\ldots$ ſowie l_1, $l_2\ldots$ mit dem Zirkel abzunehmen. Hierbei iſt nicht außer Acht zu laſſen, daß an den Stellen, wo das Waſſer aus einer Zelle unter dem Waſſer der vorausgehenden ausfließt, die Werthe l_1, $l_2\ldots$ in die von k_1, $k_2\ldots$ übergehen (ſ. Band I, §. 399).

Auch fließt noch Waſſer ſeitwärts durch den Raum zwiſchen den Radkränzen und dem Kropfboden ab, weil die Einfaſſungswände oder ſogenannten Waſſerbänke nicht genau an den äußeren Stirnflächen der Radkränze anſchließen, ſondern 1 bis 2 Zoll davon abſtehen. Der Inhalt der Ausflußöffnung iſt hier $b\sigma$, wenn b den Bogen bezeichnet, in welchem das Waſſer einer Zelle den Kropf berührt, die Druckhöhen ſind die veränderlichen Abſtände m_1, m_2 u. ſ. w. der Oberfläche des Waſſers in der niedergehenden Zelle über der unteren Kante der Schaufel, welche dieſe Zelle bildet, und das verlorene Gefälle iſt der veränderliche Abſtand p_1, p_2 u. ſ. w. dieſes Waſſerſpiegels von dem tiefſten Waſſerſpiegel K_1. Aus dieſen Höhen m_1, $m_2\ldots$ und p_1, $p_2\ldots$ folgt der Arbeitsverluſt, welcher aus dem Entweichen des Waſſers auf dieſem Wege hervorgeht,

$$A_2 = {}^2/_3\,\mu\sigma b\frac{\theta a}{v}\sqrt{2g}.\gamma\left(\frac{p_1\sqrt{m_1}+p_2\sqrt{m_2}+\cdots}{n_1}\right),$$

und es iſt daher bei Inbetrachtnahme von beiden Waſſerverluſten, wenn man nur drei Schaufelſtellungen in Betracht zieht, die Druckleiſtung

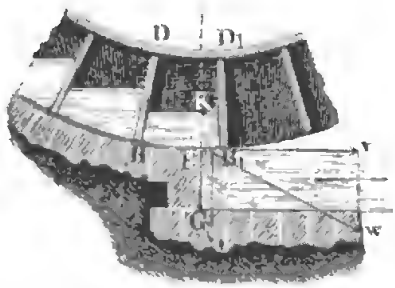
$$L_2 = \left[1 - \frac{\mu\sigma\theta a\sqrt{2g}}{6\,Fvh_3}\left(k_0\sqrt{l_0}+4\,k_1\sqrt{l_1}+k_2\sqrt{l_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,{}^2/_3\frac{b}{e}\left(p_0\sqrt{m_0}+4\,p_1\sqrt{m_1}+p_2\sqrt{m_2}\right)\right)\right]Qh_3\gamma.$$

Setzt man dieſe Arbeit $L_2 = \xi Qh_3\gamma$, ſo hat man folglich

$$\xi = \left[1 - \frac{\mu\sigma\theta a\sqrt{2g}}{6\,Fvh_3}\left(k_0\sqrt{l_0}+4\,k_1\sqrt{l_1}+k_2\sqrt{l_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,{}^2/_3\frac{b}{e}\left(p_0\sqrt{m_0}+4\,p_1\sqrt{m_1}+p_2\sqrt{m_2}\right)\right)\right].$$

§. 207 **Andere Arbeitsverluste.** Ein weiterer Verluſt tritt noch dann ein, wenn die Oberfläche des Unterwaſſers nicht mit der Oberfläche des Waſſers in der tiefſten Zelle in einerlei Niveau ſteht, wie z. B. in Fig. 423 vor Augen geführt wird; denn hier fließt ſogleich Waſſer aus der Zelle BDD_1B_1, wenn die Schaufel B_1D_1 die Schwelle FG überſchritten hat, es nimmt alſo daſſelbe außer der Radgeſchwindigkeit v noch eine Geſchwindigkeit an, welche durch den Niveauabſtand FK erzeugt wird. Dieſer Niveauabſtand iſt aber veränderlich, er hat im erſten Augenblicke, wenn die Schaufel über die Schwelle weggegangen und die Oeffnung bei F entſtanden iſt, ſeinen größten Werth, wird aber immer kleiner und kleiner, je mehr Waſſer aus dem Raume BDD_1B_1 gefloſſen iſt, und fällt endlich Null aus, wenn beide Waſſerſpiegel in einerlei Niveau gekommen ſind, alſo der Ausfluß durch B_1F beendigt iſt. Der mittlere Werth dieſes Niveauabſtandes läßt ſich $\frac{1}{2}h_4$ ſetzen, wenn h_4 die anfängliche Tiefe des Waſſers in der unterſten Zelle iſt, und daher die Geſchwindigkeit des abfließenden Waſſers nicht $\frac{v^2}{2g}$, ſondern $\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2}h_4$; da wir indeſſen den der Geſchwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ entſprechenden Verluſt an Leiſtung ſchon beim Stoße in Abzug gebracht haben, ſo bleibt daher nur noch die Leiſtung

Fig. 423.



$$L_4 = \tfrac{1}{2}Qh_4\gamma$$

von der gefundenen Nutzleiſtung abzuziehen. Man erſieht hieraus, daß es nicht vortheilhaft iſt, unter dem Kropfrade einen Abfall anzubringen, daß ſich daher nur dann ſeine Anwendung rechtfertigen läßt, wenn man einen veränderlichen Unterwaſſerſtand hat, ſo daß bei hohem Waſſer zu befürchten iſt, daß das Rad im Waſſer watet, indem das Waſſer im Untertheile des Rades tiefer ſteht als im Abzugsgraben.

Außerdem laſſen ſich noch mehrere Arbeitsverluſte des Kropfrades angeben. Zunächſt haben wir zu berückſichtigen, daß das Waſſer bei ſeiner Bewegung im Kropfgerinne eine Reibung zu überwinden hat, deren Coefficient ζ nach Band I, §. 476 für Geſchwindigkeiten von 4 bis 6 Fuß 0,00769 geſetzt werden kann. Der entſprechende Gefällverluſt iſt (Bd. I, §. 475):

$$h_5 = \zeta \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

daher hier, wo l die Länge des Kropfes, p den Umfang und F den Inhalt des Waſſerprofiles bezeichnet, alſo

$$\frac{p}{F} = \frac{e+d}{{}^1/_2\, de} \text{ und annähernd } = \frac{2}{d}$$

geſetzt werden kann,

$$h_5 = \zeta \cdot \frac{2\,l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}0002461\, \frac{l}{d} v^2,$$

und der entſprechende Verluſt an mechaniſcher Arbeit:

$$L_5 = 0{,}0002461\, \frac{l v^2}{d} Q\gamma.$$

Endlich müſſen wir auch den Widerſtand der Luft gegen die Bewegung der Schaufeln, und vielleicht auch noch den, welchen die Radarme zu überwinden haben, berückſichtigen. Der Widerſtandscoefficient der Luft iſt hier nach Band I, §. 512, $\zeta = 1{,}25$, und die Formel für dieſen Widerſtand

$$= \zeta F \gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wo F die Fläche, ſowie γ die Dichtigkeit der Luft bezeichnet. Führen wir nun nach Band I, §. 393, für $\gamma = 0{,}0800$ Pfund ein, ſo erhalten wir dieſen Widerſtand

$$= 0{,}0016\, F v^2,$$

oder, wenn wir die Fläche gleich ſetzen dem Inhalte $n \,.\, de$ ſämmtlicher n Schaufeln des Rades, denſelben

$$= 0{,}0016\, n\, de\, v^2,$$

und demnach den entſprechenden Verluſt an mechaniſcher Leiſtung:

$$L_6 = 0{,}0016\, n\, de\, v^3.$$

Bei den gewöhnlichen Verhältniſſen betragen alle dieſe Verluſte zuſammen nur wenige Procente der ganzen Radleiſtung, wie wir auch in einem Beiſpiele weiter unten ſehen werden.

Leistungsformel. Wir können nur einen Ausdruck für die vollſtändige Leiſtung eines Kropfrades angeben, wenn wir außer den im vorigen Paragraphen gefundenen Arbeitsverluſten auch die Arbeit der Zapfenreibung in Betracht ziehen. Nach dem Vorſtehenden iſt die Druckwirkung des Waſſers $= \xi Q h_3 \gamma$ und wenn wir, wie bei den oberſchlägigen Waſſerrädern, die Arbeit der Zapfenreibung $\varphi \frac{r}{a} \cdot Gv$ ſetzen, ſo bleibt die Nutzleiſtung §. 208

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1) v_1}{g} + \xi h_3 \right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} Gv$$

übrig.

Bezeichnen wir das Totalgefälle, vom Waſſerſpiegel des Oberwaſſers bis zur Oberfläche des Unterwaſſers gemeſſen, durch h, ſo können wir wieder

$$h_3 = h - 1{,}1\,\frac{c_1^2}{2g}$$

ſetzen, und erhalten nun:

$$L = \left[\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + \xi\left(h - 1{,}1\,\frac{c_1^2}{2g}\right)\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,G\,v.$$

Um nun denjenigen Werth der Eintrittsgeſchwindigkeit c_1 zu finden, bei welchem die Leiſtung am größten ausfällt, haben wir nur zu unterſuchen, wenn

$$\left(\frac{c_1\,v_1 \cos.\alpha_1}{g} - 1{,}1\cdot\xi\,\frac{c_1^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{1{,}1\,.\,\xi\,.\,c_1}{2g}\left(\frac{2\,v_1 \cos.\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi} - c_1\right) Q\gamma$$

oder

$$c_1\left(\frac{2\,v_1 \cos.\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi} - c_1\right)$$

ein Maximum wird. Es iſt hier derſelbe Fall wie in Bd. I, §. 500, und daher wie dort

$$c_1 = \frac{v_1 \cos.\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi}$$

zu ſetzen. Die entſprechende Maximalleiſtung iſt:

$$L = \left[\xi h - \left(2 - \frac{\cos.\alpha_1^2}{1{,}1\,.\,\xi}\right)\frac{v_1^2}{2g}\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,G\,v.$$

Die Formel $c_1 = \frac{v_1 \cos.\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi}$ giebt uns, da α_1 klein, alſo $\cos.\alpha_1$ nahe 1 und ebenſo $1{,}1\,.\,\xi$ nahe $= 1$ iſt, auch c_1 nahe $= v_1$; wegen der leichteren und ſichereren Einführung des Waſſers in die Zellen macht man aber $c_1 \cos.\alpha_1 = 2\,v_1$, läßt alſo das Waſſer noch einmal ſo ſchnell in das Rad eintreten, als dieſes umläuft, weshalb man die effective Radleiſtung

$$L = \left[\xi h - \left(\frac{4{,}4\,\xi}{\cos.\alpha_1^2} - 2\right)\frac{v_1^2}{2g}\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,G\,v$$

erhält.

Da dieſer Ausdruck für die Leiſtung eines rückenſchlägigen Rades nicht weſentlich verſchieden iſt von dem für die eines oberſchlägigen, ſo iſt ohne weitere Unterſuchung leicht einzuſehen, daß auch die vortheilhafteſte Umdrehungszahl (ſ. §. 196) nahe dieſelbe ſein werde.

§. 209 **Effective Leistungen der Kropfräder.** Ueber die Wirkungen mittelſchlägiger Kropfräder ſind von Morin an ziemlich gut conſtruirten Rädern mehrfache Verſuche angeſtellt worden. Morin vergleicht die Ergebniſſe ſeiner Verſuche mit den entſprechenden Werthen, welche die theoretiſche Formel

$$Pv = \left(\frac{(c \cos.\alpha - v)\,v}{g} + h_2\right) Q\gamma$$

giebt, und findet nun, daß eine ziemlich gute Uebereinstimmung sich herausstellt, wenn man den letzten Ausdruck durch einen Erfahrungscoefficienten χ multiplicirt, also

$$Pv = \chi \left(\frac{(c \cos. \alpha - v) v}{g} + h_2 \right) Q\gamma$$

setzt. Das erste von den Rädern dieser Art, welches Morin in Untersuchung zog, war aus Gußeisen, hatte hölzerne, schief gegen die Schütze gestellte Schaufeln und befand sich in einem sehr eng anschließenden eisernen Kropfe. Es hatte eine Höhe von $6^1/_2$ Meter, eine Breite von $1^1/_2$ Meter, ein Gefälle von $1^2/_3$ Meter, 50 Schaufeln und ging mit 1 bis 2,4 Meter Geschwindigkeit um, während das Wasser mit 2,8 bis 3,2 Meter Geschwindigkeit durch eine unter einem geneigten Schutzbrete befindliche Mündung eintrat. Der Coefficient χ ergab sich im Mittel 0,75 und der Wirkungsgrad, mit Einschluß der Zapfenreibung, ungefähr 0,60. Das zweite Rad, an welchem Morin Versuche angestellt hat, war ebenfalls eisern und ging in einem sehr eng anschließenden Kropfe aus Sandsteinquadern; seine Höhe, wie seine Weite, war 4 Meter, die Schaufelzahl betrug 32 und das Gefälle 2 Meter. War die Geschwindigkeit des Rades 47 bis 100 Proc. von der des durch einen Ueberfall zugeführten Wassers und zwar innerhalb der Grenzen 0,5 bis 1,8 Meter, so blieb der Coefficient χ ziemlich derselbe, nämlich 0,788, und der Wirkungsgrad fiel 0,70 aus. Mit einem dritten Rade wurden zwei Versuchsreihen angestellt, die eine bei einem Wassereinlaufe mit Spannschütze und die andere bei einer Wasserzuführung durch eine Ueberfallschütze. Dieses Rad war größtentheils aus Holz und hing in einem eng anschließenden Kropfe, seine Höhe betrug 6 Meter und seine Schaufelzahl 40. Bei der Spannschütze ergab sich im Mittel $\chi = 0{,}792$, bei der Ueberfallschütze dagegen 0,809. Der Wirkungsgrad aber war im ersten Falle 0,54 und im zweiten 0,67. Nimmt man nun aus diesen Angaben Mittelwerthe, so erhält man für mittelschlägige Kropfräder mit Spannschützen die Leistung:

$$L = 0{,}77 \left(\frac{(c \cos. \alpha - v) v}{g} + h_2 \right) Q\gamma$$

und für die mit Ueberfallschützen:

$$L = 0{,}80 \left(\frac{(c \cos. \alpha - v) v}{g} + h_2 \right) Q\gamma,$$

wovon jedoch die Arbeit der Zapfenreibung abzuziehen ist. Die größere Wirkung bei der Ueberfallschütze hatte ihren Grund darin, daß hier das Wasser langsamer eintrat, als bei der Spannschütze, und deshalb fast nur durch Druck wirkte. Noch folgt aus den Versuchen Morin's, daß der Wirkungsgrad abnimmt, wenn das Wasser mehr als die Hälfte oder zwei Drittel der Räume zwischen den Schaufeln ausfüllt, daß die Wirkung sich

nicht ſehr verändert, wenn die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades innerhalb der Grenzen 0,5 und 2,0 Meter bleibt.

Egen hat Verſuche (ſ. die oben angeführte Abhandlung deſſelben) an einem 23 Fuß hohen und $4\frac{1}{3}$ Fuß weiten Kropfrade angeſtellt. Dieſes Rad hatte noch zwei Eigenthümlichkeiten; es waren nämlich die 69 übrigens gut ventilirten Schaufeln deſſelben genau ſo gedeckt, wie bei oberſchlägigen Rädern, und es beſtand die Schütze aus zwei Theilen, wovon, je nachdem es der Waſſerſtand erforderte, bald die eine oder obere, bald die andere oder untere gezogen werden konnte. Obgleich der Kropf ſehr genau an das Rad anſchloß, ſo fand Egen den Wirkungsgrad dieſes Rades im günſtigſten Falle doch nur 0,52, und im Mittel, bei 6 Cubikfuß Aufſchlag pr. Secunde und bei 4 Umdrehungen pr. Minute, denſelben gar nur 0,48.

Verſuche mit einem mittelſchlägigen Kropfrade werden noch in Bulletin de la Societé indust. de Mulhouse T. XVIII, (ſ. Polytechn. Centralblatt, Bd. IV, 1844) mitgetheilt. Dieſes Rad war von Holz, hatte eine Höhe von 5 Meter und eine Weite von 4 Meter, und beſtand aus drei Abtheilungen, welche durch zwei Mittelkränze hervorgebracht wurden. Das Kropfgerinne ſchloß ſich an ein paraboliſches Gerinne von 0,2 Meter Höhe an und das Waſſer trat in dieſes durch eine Ueberfallſchütze mit ebenfalls 0,2 Meter Höhe; es war daher die Eintrittsgeſchwindigkeit c ungefähr 2,8 Meter. Das ganze Gefälle betrug 2,7 Meter, und die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades $1\frac{1}{2}$ bis 3 Meter. Die Waſſerfüllung war $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$, und der Wirkungsgrad fiel bei größerer Zellenfüllung größer aus, als bei kleinerer Füllung der Zellen; nämlich bei ſtarker Füllung 0,80, bei mittlerer aber nur 0,73 und bei ſchwacher Füllung gar nur 0,52. Die Verſuche über die Leiſtungen bei verſchiedenen Füllungen ließen ſich hier, da jede der Abtheilungen des Rades beſonders beaufſchlagt werden konnte, ſehr bequem und ſicher ausführen.

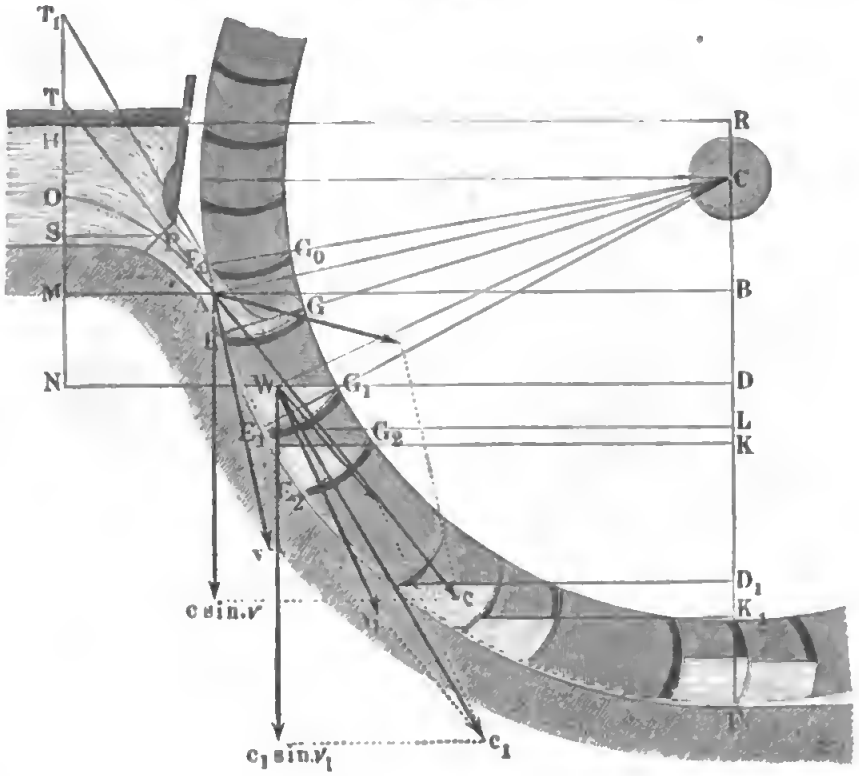
Durch Bremsverſuche an einem eiſernen mittelſchlägigen Waſſerrade von 20 ſächſiſche Fuß Höhe, 3 Fuß Breite und mit 48 Schaufeln, welches das durch eine Couliſſenſchütze zugeführte Waſſer in der Höhe des Radmittels auffing, wurde vom Verfaſſer in Verbindung mit den Herren Profeſſoren Brückmann, Zeuner u. ſ. w. (ſ. „Civilingenieur“ Bd. II) Folgendes gefunden.

Bei dem Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und dem Geſchwindigkeitsverhältniſſe $\varkappa = \frac{1}{2}$ machte das Rad 8 bis 9 Umdrehungen pr. Minute und leiſtete $12\frac{1}{2}$ bis 12 Pferdekräfte, wogegen die disponible Leiſtung $Qh\gamma = 19$ Pferdekräfte betrug; es war folglich der Wirkungsgrad dieſes Rades:

$$\eta = \frac{12{,}5}{19} = 0{,}65 \text{ bis } \frac{12}{19} = 0{,}63.$$

Beiſpiel. Es ſei für einen Aufſchlag $Q = 20$ Cubikfuß pr. Secunde und für ein Gefälle $h = 9$ Fuß die Anordnung und Berechnung eines mittelſchlägigen Kropfrades, Fig 424, von 16 Fuß Höhe und mit 8 Fuß Umfangsgeſchwindigkeit zu vollziehen.

Fig. 424.



Nehmen wir die Radtiefe oder Kranzbreite $d = 1\frac{1}{4}$ Fuß an, und laſſen wir die Radzellen halb füllen, ſo erhalten wir zunächſt die Radweite:

$$e = \frac{2\,Q}{d\,v} = \frac{2\,.\,20}{5/4\,.\,8} = 4 \text{ Fuß}.$$

Laſſen wir nun das Waſſer mit der Geſchwindigkeit

$$c = \varkappa v = 3/2\,v = 3/2\,.\,8 = 12 \text{ Fuß}$$

eintreten, ſo erhalten wir das zur Erzeugung dieſer Geſchwindigkeit nöthige Gefälle:

$$\overline{MH} = \overline{BR} = h_1 = 1{,}4 \cdot \frac{c^2}{2\,g} = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,12^2 = 2{,}54 \text{ Fuß}.$$

Ziehen wir dieſes Gefälle von dem Totalgefälle ab, ſo bleibt für das Gefälle im Kropfe:

$$\overline{BF} = h_2 = h - h_1 = 9 - 2{,}54 = 6{,}46 \text{ Fuß},$$

und es folgt für den Winkel $ACF = \theta$, um welchen die Eintrittsſtelle A über dem Radtiefſten F ſteht,

$$\cos.\theta = 1 - \frac{h_2}{a} = 1 - \frac{6{,}46}{8} = 1 - 0{,}8075 = 0{,}1925,$$

und hiernach

$$\theta = 78^0\,54'.$$

Laſſen wir nun den zutretenden Waſſerſtrahl um den Winkel $\alpha = \overline{cAc} = 25^1/_2$ Grad vom Radumfange abweichen, ſo erhalten wir die Neigung des Waſſerſtrahles in A gegen den Horizont:

$$BAc = \nu = \theta - \alpha = 78^0\,54' - 25^0\,30' = 53^0\,24',$$

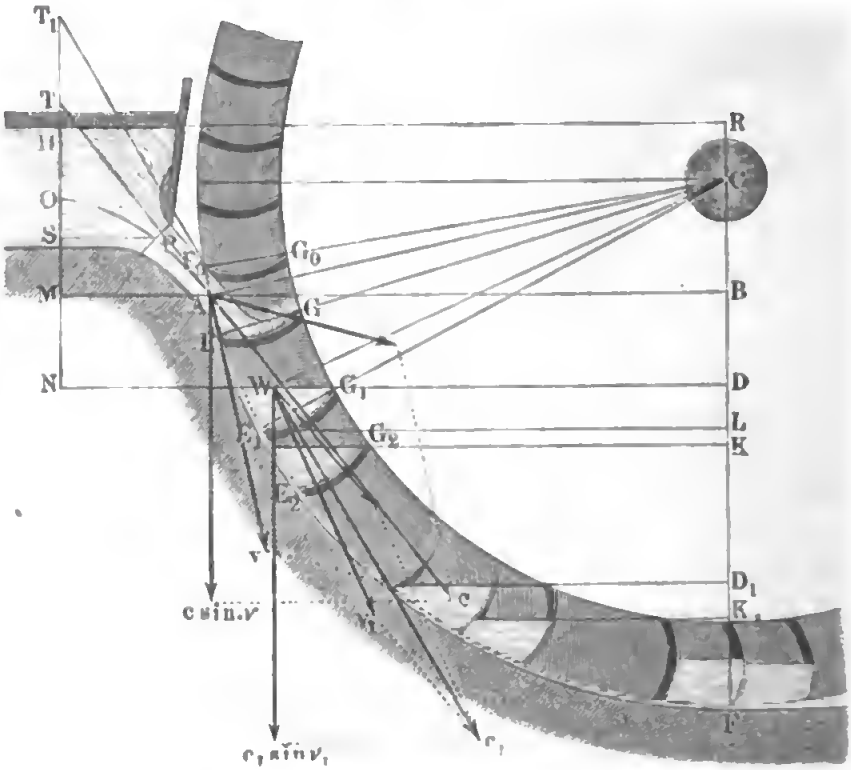
und es ſind nun die Coordinaten des Scheitels O, der Parabel, in welcher das Waſſer dem Rade zuzuführen iſt:

$$\overline{OM} = x = \frac{c^2 \sin.\nu^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 144\,(\sin. 53^0\,24')^2 = 1{,}48 \text{ Fuß}$$

und

$$\overline{MA} = y = \frac{c^2 \sin. 2\nu}{2g} = 0{,}016 \,.\, 144 \sin. 73^0\,12' = 2{,}21 \text{ Fuß}.$$

Fig. 425.



Die Mitte P der Schützenmündung iſt auf dem Parabelbogen OA, und zwar möglichſt nahe am Rade anzunehmen, übrigens aber ſo zu formen, daß ihre Are die Tangente an dieſem Bogen bildet. Legt man dieſe Mündungsmitte P um 0,54 Fuß über A, ſo folgt die Druckhöhe für dieſelbe:

$$h_0 = h_2 - 0{,}54 = 2{,}54 - 0{,}54 = 2 \text{ Fuß},$$

daher die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$c_0 = 0{,}95\,\sqrt{2gh_0} = 0{,}95\,\sqrt{125} = 10{,}62 \text{ Fuß},$$

und nimmt man noch die Mündungsweite $e_0 = e - 0{,}25 = 3{,}75$ Fuß an, ſo folgt die Mündungshöhe:

$$d_0 = \frac{Q}{c_0 e_0} = \frac{20}{10{,}62 \,.\, 3{,}75} = 0{,}502 \text{ Fuß}.$$

Geben wir dem Rade 48 Schaufeln, so erhalten wir den äußeren Abstand zwischen je zwei Schaufeln

$$b = \frac{2\pi a}{n} = \frac{2\pi . 8}{48} = \frac{3{,}1416}{3} = 1{,}047 \text{ Fuß}.$$

Nehmen wir an, daß die Schaufel EG den Weg $EE_1 = s = 0{,}9$ Fuß zurücklege, während sie noch Wasser aufnimmt und zeichnen wir hiernach nicht allein die Stellung E_1G_1 der Schaufel, sondern auch den Querschnitt des Wasserkörpers in dem entsprechenden Augenblick der Zellenfüllung auf, so können wir nun auch die Tiefe $MN = z_1$ des Wasserspiegels W unter der Eintrittsstelle A abmessen. Man findet auf diese Weise $z_1 = 1{,}25$ Fuß, und es ist hiernach die Geschwindigkeit des bei W auffallenden Wassers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2gz_1} = \sqrt{141 + 62{,}5 . 1{,}25} = \sqrt{222} = 14{,}9 \text{ Fuß},$$

sowie die Abscisse des Punktes W:

$$x_1 = \overline{ON} = x + z_1 = 1{,}48 + 1{,}25 = 2{,}73 \text{ Fuß},$$

die Ordinate desselben

$$y_1 = \overline{NW} = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = 2{,}21\sqrt{\frac{2{,}73}{1{,}48}} = 3{,}00 \text{ Fuß}$$

und für den Neigungswinkel $c_1 WD = \nu_1$ des in W einfallenden Wassers

$$tang.\,\nu_1 = \frac{2x_1}{y_1} = \frac{5{,}46}{3{,}00} = 1{,}82, \text{ wonach}$$
$$\nu_1 = 61^0\,13' \text{ folgt.}$$

Da nun

$$c\,sin.\,\nu = 12\,sin.\,53^0\,24' = 9{,}634 \text{ und}$$
$$c_1\,sin.\,\nu_1 = 14{,}9\,sin.\,61^0\,13' = 13{,}059 \text{ ist, so folgt}$$
$$\frac{2z_1}{c\,sin.\,\nu + c_1\,sin.\,\nu_1} = \frac{2 . 1{,}25}{22{,}693} = \frac{2{,}5}{22{,}693} = 0{,}1102,$$

während

$$\frac{s}{v} = \frac{0{,}9}{8} = 0{,}1125 \text{ giebt.}$$

Jedenfalls ist die Differenz zwischen diesen Werthen von $\frac{2z_1}{c_1\,sin.\,\nu + c_1\,sin.\,\nu_1}$ und $\frac{s}{v}$ klein genug um $s = 0{,}9$ und $z_1 = 1{,}25$ Fuß als die richtigen ansehen zu können.

Ferner ist für den Winkel $WCF = \theta_1$, um welchen der Anfangspunkt W des wasserhaltenden Bogens WF vom Radtiefsten F absteht,

$$cos.\,\theta_1 = \frac{CD}{CW} = \frac{CB + z_1}{a_1} = \frac{1{,}54 + 1{,}25}{7{,}6} = 0{,}3671,$$

wonach $\theta_1 = 68^0\,28'$, und die Abweichung der Richtung des Wasserstrahles von der Bewegungsrichtung des Rades in W:

$$\alpha_1 = \theta_1 - \nu_1 = 68^0\,28' - 61^0\,13' = 7^0\,15' \text{ folgt.}$$

Da das wirksame Druckgefälle im Rade

$$\overline{FD} = h_3 = h_2 - z_1 = 6{,}46 - 1{,}25 = 5{,}21 \text{ Fuß},$$

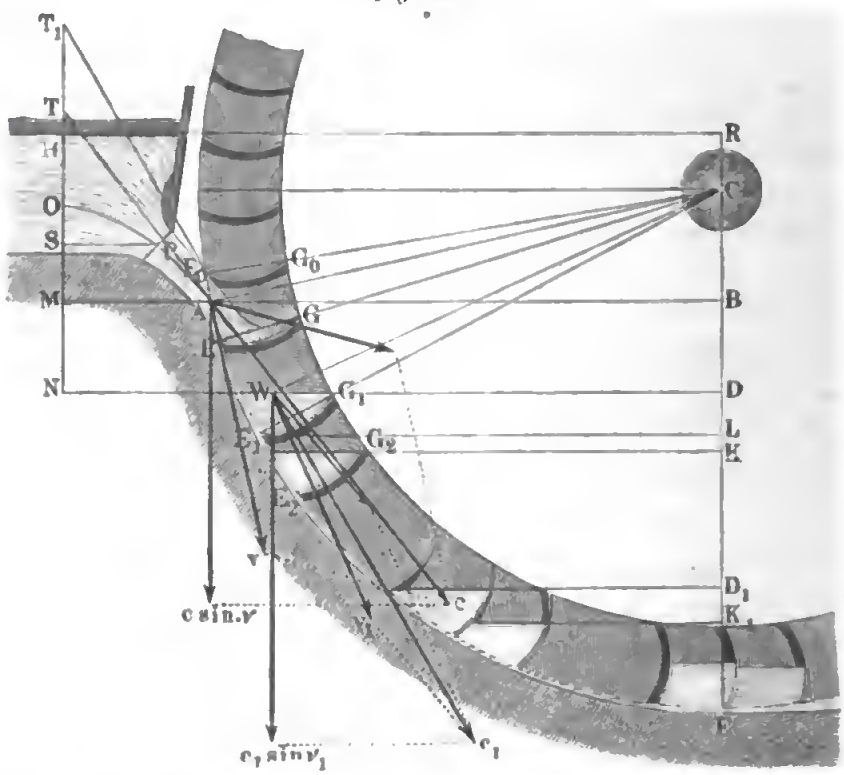
und die Geschwindigkeit des Rades W:

$$v_1 = \frac{a_1}{a}v = \frac{7{,}6}{8} \cdot 8 = 7{,}6 \text{ Fuß ist},$$

so folgt die Leistung dieses Kropfrades ohne Rücksicht auf die Wasserverluste u. s. w.:

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + h_3\right) Q\gamma$$
$$= [0{,}032\ (14{,}9 \cos. 7^0\,15' - 7{,}6) . 7{,}6 + 5{,}21]\ 20 . 61{,}75$$
$$= (0{,}032 . 7{,}10 . 7{,}6 + 5{,}21) . 1235 = (1{,}75 + 5{,}21) . 1235$$
$$= 6{,}96 . 1235 = 8596 \text{ Fußpfund.}$$

Fig. 426.



Iſt die Weite des Spielraumes im Kropfe $\sigma = 1/2$ Zoll und nimmt man $\mu = 0{,}7$ an, ſo hat man

$$\mu \sigma \theta a \sqrt{2g} = 0{,}7 . 1/24 . 8 . 7{,}906\ arc.78^0{,}54 = \frac{0{,}7 . 7{,}906}{3} \cdot 1{,}377 = 2{,}54.$$

Da ferner

$$Fv = \frac{60\,Q}{nue} \cdot \frac{2\pi ua}{60} = \frac{2\pi a Q}{ne} = \frac{6{,}28 . 8 . 20}{48 . 4} = 5{,}23$$

und $h_3 = 5{,}21$ iſt, ſo folgt

$$\frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{Fv h_3} = \frac{2{,}54}{5{,}23 . 5{,}21} = 0{,}0932.$$

Iſt noch der mittlere Werth von $k\sqrt{l} = 0{,}5$, ferner $b = 1$ und der mittlere Werth von $2/3\, p\sqrt{m} = 1{,}0$, ſo folgt

$\xi = 1 - 0{,}0932\ (0{,}5 + 1/4 . 1) = 1 - 0{,}0932 . 0{,}75 = 1 - 0{,}070 = 0{,}930$

und daher die effective Radleiſtung

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + \xi h_3\right) Q\gamma = (1{,}75 + 0{,}930 . 5{,}21) . 1235$$
$$= 6{,}595 . 1235 = 8145 \text{ Fußpfund.}$$

Wenn hiervon die übrigen Nebenhinderniſſe, der Luftwiderſtand und die Zapfenreibung 645 Fußpfund verzehren, ſo iſt die Nutzleiſtung dieſes Rades

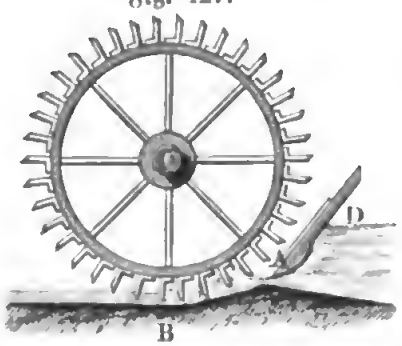
$L = 7500$ Fußpfund $= 15\frac{1}{2}$ Pferdekräfte,

und der Wirkungsgrad deſſelben:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \frac{7500}{20.9.61{,}74} = \frac{25}{37} = 0{,}68.$$

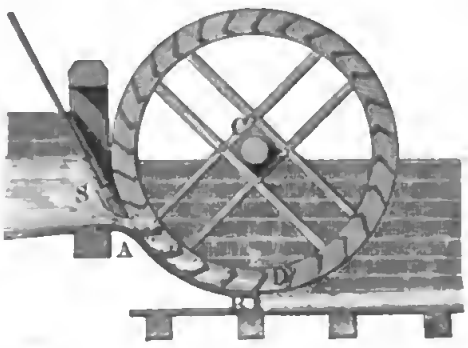
Unterſchlägige Waſſerräder. Die unterſchlägigen Waſſerräder hängen in der Regel in einem Gerinne, welches mit ſeinem Boden und mit ſeinen Seitenwänden das Rad möglichſt genau umſchließen ſoll, damit ſich ſo wenig wie möglich Waſſer der Wirkung deſſelben auf das Rad entziehen kann. Aus dieſem Grunde iſt auch die Anwendung von einem Kropfgerinne, welches das Rad längs eines kleinen Bogens concentriſch umfaßt, zweckmäßiger, als die Anwendung von einem Schnurgerinne, welches das Rad nur tangirt. Ueberdies gewährt das Kropfgerinne, wenn es ſich nur auf der einen Seite des Rades befindet, noch den Nutzen, daß das Waſſer in ihm noch eine Druckwirkung hervorbringen kann, welche beim Schnurgerinne ganz ausfällt. Die Berechnung eines ſolchen unterſchlägigen Rades im Kropfgerinne (Fig. 427) iſt, wenn der Kropf AB wenigſtens 3 bis 4 Schaufeln umfaßt, genau ſo durchzuführen, wie die eines §. 210

Fig. 427.



mittelſchlägigen Kropfrades. Auch ſind die mittel- und unterſchlägigen Kropfräder nach gleichen Regeln zu conſtruiren, da ſie ſich weſentlich nicht von einander unterſcheiden. Man wendet auch hier meiſt einfache radial geſtellte Schaufeln an; zuweilen neigt man ſie jedoch unten etwas nach der Schütze zu, damit ſie auf der anderen Seite des Rades kein Waſſer mit empor nehmen. Nicht ſelten ſetzt man ſie ſogar aus zwei Theilen BD und DE, Fig. 428, ſo zuſammen, daß dieſelben einen Winkel BDE von 100 bis 120° einſchließen. Es laſſen ſich hier große Oeffnungen im Boden ausſparen, ohne befürchten zu müſſen, daß das Waſſer durch dieſelben nach innen überfließt, und deshalb läßt man die Zellen dieſer Räder auch in der Regel zur Hälfte oder zwei Drittel vom Waſſer anfüllen, wendet alſo den Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ an. Um das Ueberlaufen des Waſſers

Fig. 428.



nach innen zu verhindern, oder um einen größeren Faſſungsraum zu erhalten, wendet man hier oft größere Radtiefen von $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Fuß an. Die tangentiale Einführung des Waſſers iſt hier noch leichter zu bewerkſtelligen als bei mittelſchlägigen Rädern. Um die Schützenmündung möglichſt nahe an das Rad legen zu können, wendet man ein geneigtes Schutzbrett S, Fig. 428, an, deſſen untere Kante noch abgerundet wird, um die partielle Contraction des Waſſerſtrahles zu verhindern.

§. 211 **Unterſchlägige Kropfräder.** Jedenfalls iſt die Leiſtung unterſchlägiger Kropfräder noch kleiner als die mittelſchlägiger, wo das Druckgefälle immer ein größeres iſt. Der Grund hiervon iſt leicht zu ermeſſen, da bei der Wirkung des Waſſers durch den Stoß mindeſtens die Hälfte der disponiblen Leiſtung verloren geht, während bei der Druckwirkung durch das Entweichen des Waſſers im ſchädlichen Raume höchſtens $\frac{1}{4}$ an der zu Gebote ſtehenden Leiſtung verloren wird. Die hierüber angeſtellten Verſuche haben dies auch zur Genüge bewieſen. Das eine Rad, an welchem Morin Verſuche angeſtellt hat, war 6 Meter hoch und 1,6 Meter lang und hatte 36 radial geſtellte Schaufeln. Das Schutzbret war $34\frac{1}{2}^0$ gegen den Horizont geneigt und die Mündung unter demſelben ſtand noch 0,78 Meter vom Anfange des Kropfgerinnes ab. Das Totalgefälle betrug im Mittel 1,9 Meter, die Druckhöhe vor der Ausflußmündung im Mittel 1,4 Meter, es war demnach das Druckgefälle ungefähr 0,5 Meter. Die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades war 2 bis 4 Meter, und die Geſchwindigkeit des eintretenden Waſſers 5 bis $5\frac{1}{2}$ Meter. So lange $\frac{v}{c}$ den Werth $= 0{,}63$ nicht übertraf, ergab ſich der Wirkungsgrad im Mittel $\eta = 0{,}41$, wenn aber $\frac{v}{c}$ zwiſchen den Grenzen 0,5 und 0,8 war, ſo ſtellte ſich η im Mittel nur 0,33 heraus. Wenn die ſchon früher gebrauchten Bezeichnungen c, v, Q und h auch hier gelten, ſo hat man hiernach für die Leiſtung dieſes Rades, ohne Rückſicht auf Zapfenreibung, im erſten Falle:

$$Pv = 0{,}74 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2 \right) Q\gamma,$$

und im zweiten:

$$Pv = 0{,}60 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2 \right) Q\gamma.$$

Das zweite Rad, mit welchem Morin noch Verſuche angeſtellt hat, war beinahe 4 Meter hoch, ungefähr 0,8 Meter weit, 0,3 Meter tief und hatte nur 24 Schaufeln. Das Waſſer floß aus der Mündung eines verticalen Schutzbrettes, und gelangte von da durch ein 0,8 Meter langes horizontales Gerinne bis zum Rade. Dieſes Gerinne ſowie der Kropf war von Quader-

steinen, und es hatte der schädliche Raum nur 0,005 Meter Weite. Das Gefälle betrug im Mittel 0,78 bis 1 Meter, die Druckhöhe des Wassers hinter der Schütze aber war 0,15 bis 0,45 Meter. Die Versuche wurden bei sehr verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten des Rades angestellt, bei sehr kleinen Geschwindigkeiten war der Wirkungsgrad auch sehr klein, bei der mittleren Geschwindigkeit von 1,5 Meter aber war er am größten, und wenn dann die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers hiervon nicht viel verschieden war, so stellte sich der größte Wirkungsgrad 0,49 heraus. Für die Geschwindigkeitsverhältnisse innerhalb der Grenzen $\frac{v}{c} = 1/4$ und $\frac{v}{c} = 2/4$ hat sich im Mittel genau wie beim vorigen Rade $\eta = 0{,}74$ herausgestellt, daher auch hier die Formel

$$Pv = 0{,}74 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2 \right) Q\gamma$$

gilt.

Morin macht nun mit den Resultaten seiner Versuche an Kropfrädern überhaupt folgende Zusammenstellung. Für diese Räder läßt sich setzen:

$\eta = 0{,}40$ bis $0{,}45$, wenn $h_1 = 1/4\, h$
$\eta = 0{,}42$ bis $0{,}49$, wenn $h_1 = 2/5\, h$
$\eta = 0{,}47$, wenn $h_1 = 2/3\, h$ und
$\eta = 0{,}55$, wenn $h_1 = 3/4\, h$ ist.

Beispiel. Man soll die Leistung eines unterschlägigen Kropfrades von 15 Fuß Höhe angeben, welches in der Minute 8 Umdrehungen macht, ein Gefälle von 4 Fuß und ein Wasserquantum von 20 Cubikfuß benutzt. Die Umfangsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{nua}{30} = \frac{n \,.\, 8 \,.\, 15}{60} = 6{,}283 \text{ Fuß};$$

und wenn nun die Wassergeschwindigkeit doppelt so groß ist, so hat man die Druckhöhe des Wassers vor dem Schutzbrete, oder das sogenannte Stoßgefälle

$$= 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1{,}1 \,.\, 0{,}016 \,.\, 12{,}566^2 = 2{,}779 \text{ Fuß};$$

daher bleibt für Druckgefälle $h_2 = 4 - 2{,}779 = 1{,}221$ Fuß übrig, und es ist nun die theoretische Leistung:

$L = (0{,}032 \,.\, 6{,}283^2 + 1{,}221) \,.\, 20 \,.\, 61{,}75 = (1{,}263 + 1{,}221) \,.\, 1235 = 3067$ Fußpfd.

Nun hat man aber hier h_1 nur:

$$\frac{1{,}221}{4} h = 0{,}3\, h,$$

daher möchte der Coefficient η nur 0,42 zu setzen, also die Leistung

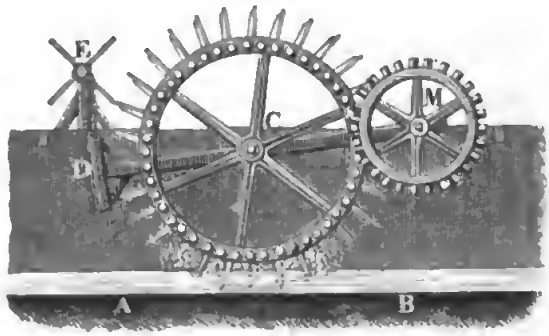
$$L = 0{,}42 \,.\, 3279 = 1288 \text{ Fußpfund}$$

anzunehmen, und hiervon selbst noch die Arbeit der Zapfenreibung abzuziehen sein.

Räder im Schnurgerinne. Die schwächsten Leistungen liefern die §. 212
unterschlägigen Räder im Schnurgerinne, weil dieselben nur durch den

Waſſerſtoß in Umdrehung geſetzt werden, und weil ſie überdies noch ein bedeutendes Waſſerquantum unbenutzt fortgehen laſſen. Sie kommen nur bei unbedeutenden Gefällen von noch nicht 4 Fuß vor, weil hier die Anwendung eines Kropfes noch keine weſentlichen Vortheile gewährt. Wegen ihrer geringen Leiſtung erſetzt man ſie gern durch Ponceleträder, oder durch Turbinen, wovon in der Folge die Rede ſein wird. Man giebt dieſen Rädern nur 12 bis 24 Fuß Höhe, und verſieht ſie mit 24 bis 48, meiſt radial oder unten wenig nach der Schütze zu ſchräg geſtellten Schaufeln. Die Schaufeln müſſen dreimal ſo breit gemacht werden, als der ankommende Waſſerſtrahl dick iſt, weil das Waſſer nach vollbrachtem Stoße mit dem Rade eine Geſchwindigkeit annimmt, die bei der größten Wirkung 35 bis 40 Procent der Geſchwindigkeit des Waſſers vor dem Stoße iſt, daher der fortfließende Waſſerſtrom $2\frac{1}{2}$ bis 3 mal ſo dick iſt, als der ankommende Waſſerſtrahl. In der Regel iſt der ankommende Waſſerſtrahl 4 bis 6 Zoll dick, daher die Höhe des fortgehenden Waſſers 10 bis 18 Zoll, und die nöthige Schaufelbreite, damit das Waſſer nicht nach innen überfließe, 12 bis 20 Zoll. Das Schnurgerinne, in welchem ein gemeines unterſchlägiges Rad hängt, iſt entweder horizontal, wie AB, Fig. 429, oder geneigt, wie AB, Fig. 430. Damit ſo wenig wie möglich Waſſer unbenutzt durchgehe, darf der Zwiſchenraum zwiſchen Rad und Gerinne nur 1 bis 2 Zoll, beſſer ſoll er aber noch weniger betragen. Aus demſelben Grunde iſt es auch beſſer, wenn man, wie Fig. 431 vor Augen führt, eine ſchwache Krümmung in das Gerinne legt, und wenn man das Rad eng ſchaufelt, ſo daß immer 4 bis 5 Schaufeln in das Waſſer eingetaucht ſind. Die Spannſchütze legt man gern ſchief, um die Ausflußmündung der Eintrittsmündung möglichſt nahe zu bringen und die Contraction des Waſſerſtrahles möglichſt zu beſeitigen. Unter dem Rade bringt man oft einen Abfall an, weil hier ein Rückſtau des Waſſers bis zum Rade den Gang des Rades ſehr ſtören oder ganz verhindern kann. Auch wendet man in ſolchen Fällen noch beſondere Vorrichtungen zum Heben oder Senken des Rades und nach Befinden auch des Gerinnes an. Man nennt dieſe Vorrichtungen Panſterzeuge, und unterſcheidet in den Werken über Mühlenbaukunſt Stock- und Ziehpanſter. Bei den erſteren wird das Angewelle (Angewäge) durch Hebeladen (ſ. Bd. I, §. 135), bei den zweiten aber durch Ketten u. ſ. w. gehoben oder geſenkt.

Fig. 429.



In Fig. 429 iſt ein Ziehpanſter abgebildet. Die Axe M des Hebels MD fällt hier mit der Umdrehungsaxe der Welle, welche die Bewegung fortpflanzt,

Fig. 430.

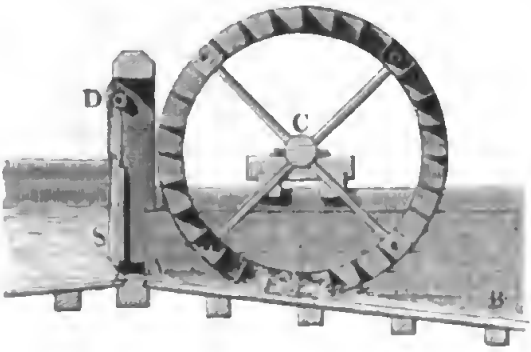
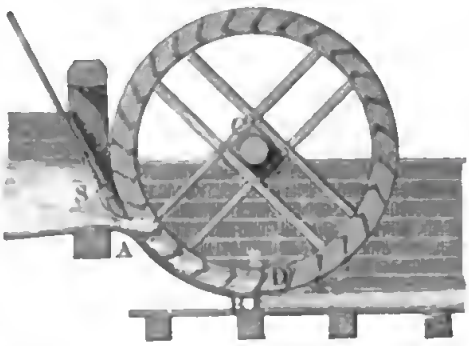


Fig. 431.



zuſammen, damit ſich der Eingriff zwiſchen Rad und Getriebe beim Heben oder Senken des Rades nicht ändert. In C trägt dieſer Hebel das Rad, und in D wird derſelbe mittels eines Kreuzhaspels E und einer Kette DE auf- oder niedergelaſſen. Um dieſe unvollkommenen und ſchwerfälligen Vorrichtungen nicht nöthig zu haben, wendet man in neuerer Zeit bei veränderlichem Waſſerſtande lieber Turbinen ſtatt unterſchlägiger Waſſerräder an, um ſo mehr, da dieſe auch mehr Leiſtung geben, als dieſe Räder.

Waſſerverluſt im Schnurgerinne. Iſt c die Geſchwindigkeit des Waſſers und v die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades, ſo hat man für die Leiſtung eines unterſchlägigen Rades im Schnurgerinne die theoretiſche Formel: §. 213

$$Pv = \frac{(c - v)\,v}{g}\,Q_1\,\gamma,$$

und alſo die Umdrehungskraft:

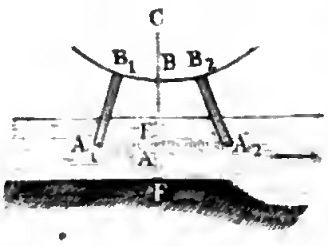
$$P = \frac{c - v}{g}\,Q_1\,\gamma = 1{,}976\,(c - v)\,Q_1$$

(ſ. Bd. I, §. 501). Hier bezeichnet allerdings Q_1 das wirklich zum Stoße gelangende Waſſerquantum; es iſt daher noch zu unterſuchen, in welchem Verhältniſſe daſſelbe zum ganzen Aufſchlagsquantum ſteht. Der Waſſerverluſt bei einem Rade im Schnurgerinne iſt ein doppelter. Erſtens geht Waſſer unbenutzt durch den Zwiſchenraum zwiſchen Rad und Gerinne hindurch, und es findet zweitens ein Waſſerverluſt dadurch ſtatt, daß gewiſſe, namentlich tiefere Waſſerelemente, gar nicht zum Stoße gegen die vorausgehende Schaufel gelangen.

Betrachten wir zunächſt den Waſſerverluſt durch den Spielraum unter dem Radtiefſten. Die Höhe des Spielraumes unter dem Rade iſt veränder-

lich; ſteht die Schaufel AB, Fig. 432, am tiefſten Punkte, ſo iſt dieſe Höhe dem kürzeſten Abſtande $\overline{AF} = \sigma$ des Rades vom Gerinne gleich, ſtehen aber zwei benachbarte Schaufeln A_1B_1 und A_2B_2 um gleichviel vom Tiefſten F ab, ſo iſt die Höhe EF des ſchädlichen Raumes am größten. Setzen wir den Radhalbmeſſer $\overline{CA} = a$, und die Schaufelzahl des Rades $= n$, ſo haben wir die halbe Entfernung $EA_1 = EA_2$ je zweier Schaufeln von einander:

Fig. 432.



$$= \frac{2\pi a}{2n} = \frac{\pi a}{n},$$

und daher die Bogenhöhe:

$$\overline{EA} \text{ annähernd} = \frac{\overline{EA_1}^2}{2a} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2};$$

es ſtellt ſich folglich die größte Höhe des ſchädlichen Raumes

$$\overline{EF} = \sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2}$$

heraus, und es läßt ſich ſonach der mittlere Werth deſſelben

$$= \sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}$$

ſetzen. Multipliciren wir hiermit die ganze Gerinneweite e_1, ſo erhalten wir den Querſchnitt des ſchädlichen Raumes:

$$= e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}\right],$$

und es iſt nur noch die Geſchwindigkeit w zu ermitteln, mit welcher das Waſſer durch denſelben entweicht. Steht die Oberfläche des Unterwaſſers in gleichem Niveau mit der Oberfläche des ankommenden Strahles, ſo kann das Waſſer ungehindert mit der Geſchwindigkeit c durch EF hindurchgehen, und es iſt daher die unter dem Rade unbenutzt hinwegfließende Waſſermenge:

$$Q_2 = \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] e_1 c;$$

ſteht aber die Oberfläche des Unterwaſſers höher als die des anſtoßenden, welcher Fall allemal eintritt, wenn das Abzugsgerinne AB, Fig. 433, unter oder nahe hinter dem Rade keinen Abfall hat, ſo iſt die Geſchwindigkeit des entweichenden Waſſers kleiner, weil hier ein Gegendruck vom Unterwaſſer dem Ausſtrömen entgegenwirkt. Setzen wir die Strahldicke $AD = d_1$ und die Höhe AE des abfließenden Waſſers $= d_2$, ſo haben wir

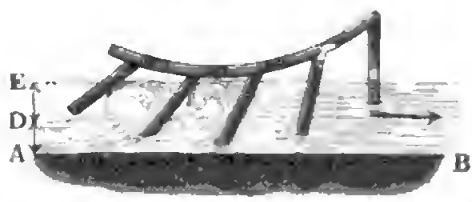
aus bekannten Gründen $d_1 c = d_2 v$, und daher

$$d_2 = \frac{d_1 c}{v},$$

sowie den Niveauabstand

$$d_2 - d_1 = \left(\frac{c - v}{v}\right) d_1.$$

Fig. 433.



Hiernach folgt für diesen Fall die Geschwindigkeit des durch den Spielraum unter dem Rade entweichenden Wassers:

$$w = \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1},$$

also der Wasserverlust:

$$Q_2 = e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1}.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch, wie der obere, noch mit einem Ausflußcoefficienten μ zu multipliciren, der wie beim Kropfrade, $= 0{,}7$ gesetzt werden kann. Noch etwas Wasser fließt durch den Spielraum zur Seite der Radkränze ab. Der Querschnitt des Wassers, welches auf diese Weise verloren geht, ist $d_1 \sigma_1$ zu setzen, und daher für den ersten Fall diese Abflußmenge:

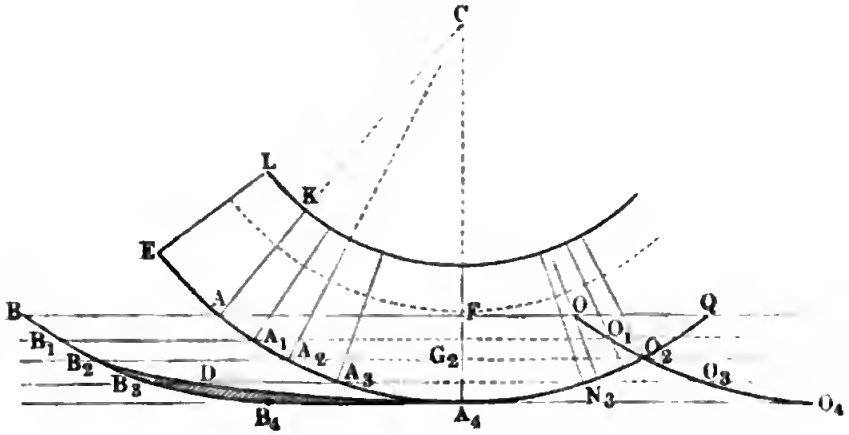
$$Q_3 = 2\mu d_1 \sigma_1 c,$$

im zweiten aber:

$$Q_3 = 2\mu d_1 \sigma_1 \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1}.$$

Gerstner's Formel. Das Wasserquantum, welches zwischen den Schaufeln durchgeht, ohne zum Stoße zu gelangen, läßt sich, wenn auch nur annähernd, nach Gerstner auf folgende Weise ermitteln. Aus der Entfernung $\overline{AE} = b$, Fig. 434, je zweier Schaufeln von einander §. 214

Fig. 434.



ergiebt ſich mit Hülfe der Geſchwindigkeiten c und v des Waſſers und des Rades, die Länge $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ u. ſ. w. derjenigen Waſſerfäden, welche in dem Zwiſchenraume zwiſchen je zwei Schaufeln Platz finden, $l = \frac{c}{v}\,b$. Wenn nun von dem Waſſerfaden AB das erſte Element A die Schaufel AK in A trifft, ſo wird das letzte Element B deſſelben dieſe in einem Punkte O treffen, deſſen Entfernung $\overline{AO}$ von A beſtimmt iſt durch die Gleichung:

$$\frac{AO}{v} = \frac{BO}{c}, \text{ oder } \frac{AO}{v} = \frac{AO}{c} + \frac{BA}{c},$$

es folgt hiernach:

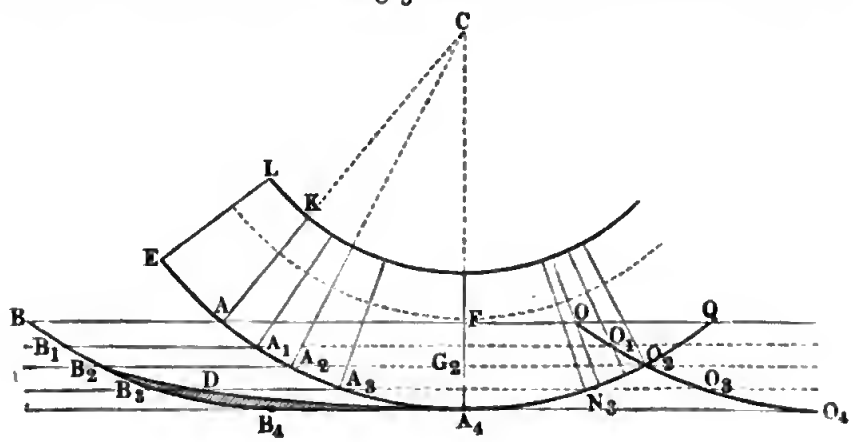
$$\overline{AO} = \left(\frac{v}{c-v}\right)\cdot\overline{BA} = \frac{vl}{c-v};$$

ebenſo iſt für tiefere Waſſerfäden:

$$\overline{A_1O_1} = \overline{A_2O_2} = \overline{AO} = \frac{vl}{c-v}.$$

Das letzte Element B_2 des Waſſerfadens A_2B_2 trifft allerdings noch die Schaufel, dagegen das letzte Element B_3 eines tieferen Fadens A_3B_3

Fig. 435.



würde die Schaufel erſt in O_3 erreichen, wo ſich dieſelbe in Folge ihrer Kreisbewegung aus der Bewegungsrichtung des Fadens A_3B_3 herausgezogen hat; es kann alſo daſſelbe nicht zum Stoße gelangen. Aber nicht allein B_3, ſondern ein ganzer Theil B_3D des Waſſerfadens A_3B_3 kommt nicht zum Stoße, weil erſt das Element D die Schaufel in N erreicht.

Die Länge A_3D desjenigen Theiles vom Waſſerfaden A_3B_3, welcher noch zum Stoße gelangt, iſt beſtimmt durch Umkehrung der obigen Formel, indem man ſetzt:

$$\overline{A_3 D} = \frac{c - v}{v} \cdot \overline{A_3 N}.$$

Dies gilt für alle Waſſerfäden zwiſchen $A_2 B_2$ und $A_4 B_4$, es iſt daher auch der Inbegriff aller zwiſchen $A_2 B_2 D A_4 A_3 A_2$ liegenden und eine Schaufel ſtoßenden Waſſerfäden, $= \frac{c - v}{v}$ mal Summe aller Sehnen zwiſchen $A_2 O_2$ und A_4, d. i. $\frac{c - v}{v}$ mal Kreisſegment $A_2 O_2 A_4$. Dieſes Segment läßt ſich aber (ſ. „Ingenieur“, Geometrie S. 189) $= \frac{2}{3} \overline{A_2 O_2} \cdot \overline{A_4 G_2}$ $= \frac{2}{3} \overline{AO} \cdot \overline{A_4 G_2}$ ſetzen; daher iſt denn der Querſchnitt der zum Stoße gelangenden Waſſermenge

$$A_2 B_2 D A_4 = \frac{c - v}{v} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{v l}{c - v} \cdot \overline{A_4 G_2} = \frac{2}{3} l \cdot \overline{A_4 G_2},$$

und hiernach das Verhältniß der zum Stoß gelangenden Waſſermenge Q_1 zur ganzen Waſſermenge:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\text{Fläche } A B B_2 A_2 + \text{Fläche } A_2 B_2 D A_4}{\text{Fläche } A B B_4 A_4} = \frac{l \cdot \overline{FG_2} + \frac{2}{3} l \cdot \overline{A_4 G_2}}{l \cdot \overline{A_4 F}}$$

$$= \frac{\overline{A_4 F} - \frac{1}{3} \overline{A_4 G_2}}{\overline{A_4 F}} = 1 - \frac{\overline{A_4 G_2}}{3 \overline{A_4 F}}.$$

Iſt ferner a der Halbmeſſer $\overline{CA}$ des Rades, ſo läßt ſich, den Eigenſchaften des Kreiſes zufolge, annähernd:

$$\overline{A_4 F} = \frac{\overline{AF^2}}{2a} \text{ und } \overline{A_4 G_2} = \frac{\overline{A_2 G_2^2}}{2a},$$

$$\text{folglich } \frac{A_4 G_2}{A_4 F} = \frac{\overline{A_2 G_2^2}}{\overline{AF^2}} \text{ ſetzen.}$$

Nun iſt $\overline{A_2 G_2} = \frac{1}{2} \overline{AO} = \frac{1}{2} \frac{v l}{c - v}$, und

$\overline{AF} = \frac{1}{2} \overline{AQ} = \frac{1}{2} n_1 b = \frac{1}{2} n_1 \cdot \frac{v}{c} l$, wenn n_1 die Anzahl aller ins Waſſer eingetauchten Schaufeln bezeichnet, daher folgt:

$$\frac{A_4 G_2}{A_4 F} = \frac{1}{n_1^2} \cdot \left(\frac{c}{c - v}\right)^2,$$

und endlich die ſtoßende oder Arbeit verrichtende Waſſermenge:

$$Q_1 = \left[1 - \frac{1}{3 n_1^2} \left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q.$$

Man erſieht hieraus, daß dieſer Verluſt um ſo kleiner ausfällt, je größer die Anzahl der eingetauchten Schaufeln, je größer alſo auch die Zahl n der

Schaufeln überhaupt, und, da die Schaufelzahl mit dem Radhalbmeſſer wächſt, je größer die Radhöhe iſt.

Beiſpiel. Wenn ein unterſchlägiges Rad im Schnurgerinne mit 3 Schaufeln ins Waſſer eingetaucht iſt, und halb ſo viel Geſchwindigkeit hat als das ankommende Waſſer, ſo beträgt bei demſelben das Verhältniß der ſtoßenden Waſſermenge zur ankommenden:

$$\frac{Q_1}{Q} = 1 - {}^1/_{27}\left(\frac{1}{1/_2}\right)^2 = 1 - {}^4/_{27} = {}^{23}/_{27} = 0{,}85 \text{ Procent};$$

es geht alſo 15 Procent Waſſer unbenutzt durch.

Anmerkung. Die obige Unterſuchung ſetzt voraus, daß jedes Waſſerelement, nachdem es gegen eine Schaufel geſtoßen hat, dem folgenden Platz macht, damit dieſes ebenfalls die Schaufel ſtoßen könne. Da nach dem in Bd. I, §. 501 Vorgetragenen jedes Waſſerelement während ſeines Stoßes oder während ſeiner Wirkung gegen die Schaufel an dieſer in die Höhe ſteigt, ſo möchte ſich dieſer Annahme nichts Weſentliches entgegenſetzen laſſen.

Wenn das Rad unmittelbar unter dem Fuße A_1 einen Abfall hat, ſo findet nur vor $A_1 F'$ ein Stoß ſtatt; deshalb iſt dann ſtatt Segment $A_2 O_2 A_4$ nur deſſen Hälfte $= {}^1/_3 l A_1 G_2$ in Rechnung zu bringen, und

$$Q_1 = \left[1 - \frac{2}{3 n_1^2}\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q \text{ zu ſetzen.}$$

§. 215. **Leiſtung unterſchlägiger Räder.** Wenn wir nun auf die im Vorſtehenden gefundenen Waſſerverluſte und auch noch auf die Zapfenreibung Rückſicht nehmen, ſo können wir die effective Leiſtung eines unterſchlägigen Waſſerrades mit ziemlicher Sicherheit beſtimmen. Es iſt nämlich:

$$L = Pv = \frac{(c - v)v}{g}(Q_1 - Q_2)\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v,$$

oder annähernd:

$$Q_2 = \sigma e c = \frac{\sigma}{d_1} Q \text{ und } Q_1 = \left[1 - \frac{1}{3 n^2}\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q$$

geſetzt,

$$P v = \frac{(c - v)v}{g}\left[1 - \frac{\sigma}{d_1} - \frac{1}{3 n_1^2}\cdot\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v.$$

In dem Falle, wenn, wie in Fig. 436 abgebildet iſt, die Sohle des Abzugsgrabens mit der des Schußgerinnes zuſammenfällt, und daher das Waſſer nach vollbrachter Wirkung, wo es die Geſchwindigkeit v des Rades angenommen hat, mit der Tiefe $\overline{AE} = d_2 = \frac{c}{v} d_1$ fortfließt, findet noch eine Reaction des Waſſers auf die Radſchaufeln ſtatt, deren mechaniſche Arbeit

Fig. 436.

$$L_1 = (d_2 - d_1)\, Q\gamma = \left(\frac{c - v}{v}\right) d_1\, Q\gamma$$

zu setzen ist, da hier die Druckhöhe d_1 in d_2 übergeht.

Diese Arbeit fällt um so größer aus, je größer die Differenz $c - v$ der Geschwindigkeiten und je größer die Dicke $\overline{AD} = d_1$ des ankommenden Wasserstrahles ist; um auf diese Weise wenig an Leistung zu verlieren, müßte daher das Rad schnell umgehen, und das Wasser in einem breiten und dünnen Strahle zufließen. Wir können indessen diese Arbeit der Reaction nur als relativen Verlust der Wirkung des Rades ansehen, da in Folge dieses Aufsteigens des Wasserspiegels auch das Totalgefälle, von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen, um $d_2 - d_1$ und also auch die disponible Arbeit um $(d_2 - d_1)\, Q\gamma$ kleiner wird. Jedenfalls werden wir daher keinen beträchtlichen Fehler begehen, wenn wir bei der Berechnung auf diese Wirkung des Rades nicht Rücksicht nehmen.

Es ist nun noch die Frage, bei welchem Verhältnisse $\frac{v}{c}$ der Radgeschwindigkeit zur Wassergeschwindigkeit wird die Leistung des unterschlägigen Rades am größten? Verhältnißmäßig ist hier der Verlust an Leistung, welchen das Rad durch die Zapfenreibung verliert, klein, wir können daher bei der Ermittelung des der Maximalleistung entsprechenden Verhältnisses $\frac{v}{c}$ dieselbe unbeachtet lassen, und haben daher dann nur das Maximum von

$$(c - v)\, v \left(1 - \frac{\sigma}{d_1} - \frac{c^2}{3\, n_1^2 (c - v)^2}\right) \text{ oder}$$

$$\left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c\, v - v^2) - \frac{c^2 v}{3\, n_1^2\, (c - v)} \text{ zu finden.}$$

Der höhere Calcül findet die Bedingung

$$\left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c - 2\, v) = \frac{c^3}{3\, n_1^2 (c - v)^2},$$

wonach sich nun

$$v = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{c^2}{3\, n_1^2 \left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c - v)^2}\right) \text{ setzen läßt.}$$

Man ersieht hieraus, daß die Maximalleistung erlangt wird, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades etwas kleiner als die halbe Wassergeschwindigkeit ist.

Beispiel. Welche Leistung verspricht ein unterschlägiges Wasserrad im Schnurgerinne, welches bei 3 Fuß Gefälle ein Aufschlagsquantum Q von 20 Cubikfuß benutzt? Die theoretische Wassergeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{2gh} = 7{,}906 \,.\, \sqrt{3} = 13{,}69 \text{ Fuß,}$$

die effective Geſchwindigkeit des Waſſers läßt ſich aber $= 0{,}95 \,.\, 13{,}69 = 13$ Fuß annehmen. Setzen wir die Strahlhöhe $d_1 = 4$ Zoll $= 1/3$ Fuß, ſo müſſen wir die Mündungsweite

$$c_1 = \frac{Q}{d_1 c} = \frac{20}{1/3 \,.\, 13} = \frac{60}{13} = 4{,}615 \text{ Fuß}$$

und die Radweite c von 4,75 Fuß in Anwendung bringen. Rechnen wir nun auf den ſchädlichen Raum die Weite $\sigma = 3/4$ Zoll; ſo erhalten wir den Verluſt des Waſſers durch den Spielraum des Rades im Gerinne:

$$\frac{\sigma}{d_1} = \frac{3/4}{4} = 3/16$$

Geben wir ferner dem Rade den Halbmeſſer $a = 10$ Fuß, ſo können wir es mit 48 Schaufeln, jede von 1 Fuß Breite, ausrüſten, und annehmen, daß vom ganzen Radumfange der Theil

$$\frac{2\sqrt{d_1 \,.\, 2a}}{2\pi a} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2d_1}{a}} = 0{,}318\sqrt{\frac{2}{30}} = 0{,}0822,$$

und von den ſämmtlichen Radſchaufeln $= 48 \,.\, 0{,}0822 = 3{,}95$ oder beinahe 4, ins Waſſer eingetaucht ſind. Hiernach iſt nun die vortheilhafteſte Radgeſchwindigkeit

$$v = 13/2\left(1 - \frac{c^2}{3 \,.\, 16 \,.\, 13/16\,(c-v)^2}\right) = 13/2\left[1 - 1/39\left(\frac{c}{c-v}\right)^2\right]$$

zu ſetzen. Sehr leicht findet man hieraus annähernd, $v = 0{,}45\,c$. Bringen wir aber wegen der Zapfenreibung, $v = 0{,}43\,c$ in Anwendung, ſo erhalten wir die effective Leiſtung des Waſſers:

$$L = \frac{0{,}57 \,.\, 0{,}43\,c^2}{g}[13/16 - 1/48 \cdot (1/0{,}57)^2] \,.\, 20 \,.\, 61{,}75$$

$$= 0{,}032 \,.\, 0{,}2451 \,.\, 169\,(0{,}8125 - 0{,}0641) \,.\, 1235 = 1225 \text{ Fußpfund.}$$

Wenn noch das Gewicht dieſes Rades 7200 Pfund beträgt und hiernach die Halbmeſſer ſeiner Zapfen $= 0{,}024 \,.\, \sqrt{3600} = 1{,}5$ Zoll oder, des allmäligen Abführens wegen, $= 1{,}75$ Zoll gemacht werden und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$ geſetzt wird, ſo erhält man noch den Arbeitsverluſt wegen der Zapfenreibung:

$$= 0{,}1 \cdot \frac{1{,}75}{12 \,.\, 10} \cdot 7200 \,.\, 0{,}43 \,.\, 13 = 61 \text{ Fußpfund,}$$

daher die effective Leiſtung dieſes Waſſerrades:

$$L = 1225 - 61 = 1164 \text{ Fußpfund} = 2{,}43 \text{ Pferdekräfte,}$$

und endlich den Wirkungsgrad deſſelben:

$$\eta = \frac{1164}{3 \,.\, 20 \,.\, 61{,}75} = \frac{1164}{3705} = 0{,}315.$$

§. 216

Effective Leistungen. Ueber die Leiſtungen unterſchlägiger Räder im Schnurgerinne ſind nur Verſuche an Modellen, und zwar von de Parcieux, Boſſut, Smeaton, Nordwall und Lagerhjelm u. ſ. w. bekannt. Die vorzüglichſten unter ihnen ſind aber die von Smeaton und Boſſut. Im Weſentlichen ſtimmen die Ergebniſſe aller dieſer Unterſuchungen nicht allein unter ſich, ſondern auch mit der Theorie überein. Die Wirkungen der Räder wurden bei allen dieſen Verſuchen dadurch ermittelt, daß man durch ſie mittels einer Schnur, welche ſich um die Welle des Rades umwickelte, Gewichte heben ließ. Smeaton machte ſeine Ver-

ſuche (ſiehe Recherches expériment. sur l'eau et le vent etc.) an einem kleinen Rade von 75 Zoll Umfang, mit vierundzwanzig 4 Zoll langen und 3 Zoll breiten Schaufeln. Das Hauptergebniß, zu welchem er gelangte, iſt: der größte Wirkungsgrad eines unterſchlägigen Waſſerrades im Schnurgerinne findet bei dem Geſchwindigkeitsverhältniſſe $\frac{v}{c} = 0{,}34$ bis $0{,}52$ ſtatt, und beträgt 0,165 bis 0,25. Boſſut gebrauchte bei ſeinen Verſuchen ein Rad von 3 Fuß Höhe mit 48 oder 24 oder 12 Schaufeln von 5 Zoll Länge und 4 bis 5 Zoll Breite. Er fand, ganz der Theorie entſprechend, die Wirkung bei 48 Schaufeln größer als bei 24, und bei 24 größer als bei 12; auch folgerte er, daß es zweckmäßig ſei, circa 25^0 vom Radumfange oder $^{25}/_{360} \cdot 48 = {}^{10}/_{3}$, alſo mehr als drei Schaufeln ins Waſſer eintauchen zu laſſen. Aus den Verſuchen Boſſut's an dem Rade mit 48 Schaufeln ſtellt ſich ein etwas größerer Wirkungsgrad heraus, als ihn die Smeaton'ſchen Verſuche geben; Gerſtner, welcher auch findet, daß die Boſſut'ſchen Verſuche mehr mit ſeiner Theorie übereinſtimmen, als die von Smeaton, mißt dieſe Abweichung dem Umſtande bei, daß das Rad von Smeaton eine kleinere Schaufelzahl hatte als das von Boſſut, und daß bei demſelben auch ein beträchtlicher Rückſtau ſtatt fand. Im Mittel läßt ſich aus den Verſuchen beider Experimentatoren für die effective Leiſtung eines ſolchen Rades, ohne Rückſicht auf Zapfenreibung, ſetzen:

$$L = 0{,}61 \frac{(c - v)v}{g} Q\gamma = 1{,}205\,(c - v)vQ \text{ Fußpfund.}$$

Dieſe Formel iſt jedoch, Erfahrungen zufolge, nur dann genügend, wenn der Spielraum $1^1/_2$ Zoll nicht übertrifft; außerdem hat man ſtatt $Q = Fc$, wo F den Inhalt des ins Waſſer getauchten Flächenſtücks der Schaufeln bezeichnet, und 0,76 ſtatt 0,61; nach Chriſtian (ſ. deſſen Mécanique industr.) alſo

$$L = 0{,}76\, F\gamma \cdot \frac{(c - v)}{g} cv = 1{,}502\,(c - v)\,Fcv \text{ Fußpfund}$$

zu ſetzen.

Uebrigens läßt ſich auch aus allen dieſen Verſuchen folgern, daß die größte Wirkung, wie auch die Theorie giebt, bei dem Geſchwindigkeitsverhältniſſe $\frac{v}{c} = 0{,}4$ ſtattfindet, daß aber bei großen Geſchwindigkeiten dieſes Verhältniß etwas kleiner, und bei großen Waſſermengen etwas größer ausfällt.

In Schweden angeſtellte Verſuche an Modellrädern, eins von 3 und eins von 6 Fuß Durchmeſſer, jenes mit 72 und dieſes mit 144 Schaufeln, werden in dem zweiten Bande des ſchon oben citirten Werkes von Lagerhjelm, Forſelles und Kallſtenius beſchrieben. Ihnen zufolge ſtellt ſich der Wirkungsgrad eines Rades im Schnurgerinne noch größer, nämlich ohne

Rückſicht auf Reibung, 0,3 bis 0,35 heraus, wenn das Geſchwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c}$ nahe $1/2$ iſt. Da hier die Anzahl der eingetauchten Schaufeln ſehr groß war, ſo läßt ſich erwarten, daß hier nur ſehr wenig Waſſer ohne Wirkung fortging, und es iſt daher dieſe hohe Wirkung des Rades erklärlich und mit der Theorie in guter Uebereinſtimmung.

Beiſpiel. Die empiriſche Formel $L = 1{,}205\,(c - v)\,Qv$ giebt für den im Beiſpiele zu §. 215 behandelten Fall, wo $c = 13$, $v = 0{,}43 \,.\, c = 5.59$ und $Q = 20$ iſt, die Leiſtung des Rades $= 1{,}205 \,.\, 0{,}57 \,.\, 0{,}43 \,.\, 20 \,.\, 13^2 = 998$ Fußpfund, während wir durch die theoretiſche Formel 1225 Fußpfund gefunden haben.

§. 217 **Theilung der Waſſerkraft.** Man vertheilt ſehr oft eine vorhandene Waſſerkraft auf mehrere Räder, nicht allein, weil ein Rad allein zu groß ausfallen würde, ſondern auch, und zwar vorzüglich, um die Arbeitsmaſchinen unabhängig von einander in Gang ſetzen zu können, und keine Stellvorrichtungen zum An- und Abſchluß mehrerer Arbeitsmaſchinen an einer und derſelben Kraftmaſchine nöthig zu haben. Bei dieſer Theilung können zwei Fälle vorkommen, man kann nämlich entweder das Waſſer, oder man kann das Gefälle theilen. Im Allgemeinen läßt ſich annehmen, daß bei Druckrädern eine Theilung des Waſſerquantums und bei Stoßrädern eine Theilung des Gefälles das Zweckmäßigere iſt, denn wir haben im Vorhergehenden geſehen, daß der Wirkungsgrad eines höheren oberſchlägigen Rades größer iſt, als der eines kleineren oberſchlägigen oder gar mittelſchlägigen Rades, und umgekehrt können wir leicht ermeſſen, daß der Verluſt durch den Stoß des Waſſers und der durch den ſchädlichen Raum kleiner iſt bei zwei hinter einander hängenden Rädern als bei zwei neben einander hängenden, weil die der verlorenen Wirkung entſprechende Geſchwindigkeitshöhe $\frac{(c - v)^2}{2g}$ (ſ. Bd. I, §. 436) und das Verhältniß $\frac{\sigma}{d_1}$ des ſchädlichen Raumes zur Waſſertiefe kleiner iſt, als im letzteren Falle. Bei mittelſchlägigen Kropfrädern, wo das Waſſer durch Druck und Stoß wirkt und wo der Waſſerverluſt vorzüglich von $\frac{\sigma}{d_1}$ abhängt, iſt im Allgemeinen der Vorzug der einen Theilungsweiſe vor der anderen unbeſtimmt, und es muß einer beſonderen Unterſuchung überlaſſen bleiben, in jedem ſpeciellen Falle den Vorzug der einen Theilung vor der anderen zu ermitteln. Im Folgenden möge nur noch von der Theilung der Waſſerkraft unterſchlägiger Räder im Schnurgerinne die Rede ſein.

Denken wir uns zwei Räder hinter einander in einem horizontalen Schnurgerinne hängend, und nehmen wir an, daß das Waſſer an das zweite Rad mit der Geſchwindigkeit (v_1) ankomme, mit welcher das erſte Rad um-

geht. Iſt nun noch c die Geſchwindigkeit des Waſſers beim Eintritt in das erſte Rad und v_2 die Geſchwindigkeit des zweiten Rades, ſowie Q das Aufſchlagsquantum für beide Räder, und χ eine Erfahrungszahl (1,205), ſo hat man die Leiſtungen dieſer Räder:

$$L_1 = \chi\,(c - v_1)\,v_1\,Q \quad \text{und} \quad L_2 = \chi\,(v_1 - v_2)\,v_2\,Q.$$

Sollen nun beide Räder gleich viel leiſten, ſo iſt

$$(c - v_1)\,v_1 = (v_1 - v_2)\,v_2$$

zu ſetzen, und wenn man nun noch, um der Maximalleiſtung ſehr nahe zu kommen, $v_2 = {}^1/_2\,v_1$ annimmt, $(c - v_1)\,v_1 = {}^1/_4\,v_1^2$ oder $c - v_1 = {}^1/_4\,v_1$; hiernach

$$v_1 = {}^4/_5\,c \quad \text{und} \quad v_2 = {}^2/_5\,c,$$

und die Leiſtung beider Räder zuſammen:

$$L = L_1 + L_2 = 2\,\chi\,(c - {}^4/_5\,c)\,{}^4/_5\,c\,Q = {}^8/_{25}\,\chi\,c^2\,Q$$
$$= 0{,}32\,\chi c^2 Q,$$

während, wenn man nur ein Rad angewendet hätte, die Leiſtung

$$L = {}^1/_4\,\chi\,c^2\,Q \quad \text{oder} \quad = 0{,}25\,\chi c^2 Q$$

ausgefallen wäre. Hiernach ſtellt ſich alſo bei der Anwendung zweier Räder ein Arbeitsgewinn von 32 — 25 = 7 Procent heraus.

Bei Anwendung dreier Räder fiele dieſer Gewinn noch größer aus. Für das dritte Rad ließe ſich auch

$$L_3 = \chi\,(v_2 - v_3)\,v_3\,Q,$$

wo v_3 die Umfangsgeſchwindigkeit dieſes Rades bezeichnet, ſetzen. Machen wir nun wieder $v_3 = {}^1/_2\,v_2$, und bedingen wir wieder, daß das eine Rad ſo viel Leiſtung geben ſoll als das andere, ſo erhalten wir:

$$v_2 = {}^4/_5\,v_1 \quad \text{und} \quad c - v_1 = {}^4/_{25}\,v_1,$$

daher

$$v_1 = {}^{25}/_{29}\,c, \quad v_2 = {}^{20}/_{29}\,c, \quad v_3 = {}^{10}/_{29}\,c \quad \text{und}$$

die Leiſtungen aller drei Räder zuſammen:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 3\,\chi\,(c - v_1)\,v_1\;Q = 3\,\chi\,.\,{}^4/_{29}\,.\,{}^{25}/_{29}\,c^2\,Q$$
$$= {}^{300}/_{841}\,\chi\,c^2\;Q = 0{,}356\,\chi\,c^2\,Q;$$

es reſultirt alſo in Hinſicht auf ein einziges Rad ein Arbeitsgewinn von 35,6 — 25 = 10,6 Procent.

Allerdings wird dieſer Gewinn durch die größere Zapfenreibung wieder etwas vermindert.

Anmerkung. Wenn wir die Bedingung, daß die Räder in einem Schnurgerinne gleiche Leiſtung hervorbringen, fallen laſſen, ſo ſtellt ſich der Vortheil der Anwendung mehrerer Räder noch größer heraus. Denken wir uns bei Behandlung dieſes Falles den Waſſerverluſt in einem genau, und längs drei bis vier Schaufeln concentriſch an das Rad anſchließenden Schutzgerinne klein genug, um ihn ganz bei Seite ſetzen zu können. Dann erhalten wir für die Leiſtung des erſten Rades:

$$L_1 = \frac{(c - v_1)\, v_1}{g}\, Q\gamma, \text{ und die des zweiten:}$$

$$L_2 = \frac{(v_1 - v_2)\, v_2}{g}\, Q\gamma,$$

alſo die Leiſtung beider Räder zuſammen:

$$L = [(c - v_1)\, v_1 + (v_1 - v_2)\, v_2]\, \frac{Q\gamma}{g}.$$

Damit dieſe ein Maximum werde, iſt zunächſt $v_2 = \frac{1}{2} v_1$ zu machen, und da ſich hiernach

$$L = (c - \tfrac{3}{4} v_1)\, v_1\, \frac{Q\gamma}{g}$$

herausſtellt, wieder $\frac{3}{4} v_1 = \frac{1}{2} c$, alſo $v_1 = \frac{2}{3} c$ und $v_2 = \frac{1}{3} c$, daher

$$L = (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3})\, \frac{Qc^2\gamma}{g} = \tfrac{1}{2}\, \frac{c^2 Q\gamma}{g} = 0{,}333\, \frac{c^2 Q\gamma}{g},$$

während ein Rad allein nur $0{,}250\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$ und zwei Räder, bei gleicher Wirkung, $0{,}320\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$ geben würden. Bei drei Rädern ſtellt ſich der Vortheil noch größer heraus, hier iſt nämlich $v_1 = \frac{3}{4} c$, $v_2 = \frac{2}{4} c$, $v_3 = \frac{1}{4} c$, und daher die Wirkung aller drei Räder zuſammen:

$$L = (\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4})\, \frac{c^2 Q\gamma}{g} = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{c^2 Q\gamma}{g} = 0{,}375\, \frac{c^2 Q\gamma}{g},$$

während ein Rad allein $= 0{,}250\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$, und drei Räder bei gleicher Wirkung, $L = 0{,}356\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$ geben.

Für vier Räder ſtellt ſich $v_1 = \frac{4}{5} c$, $v_2 = \frac{3}{5} c$, $v_3 = \frac{2}{5} c$, $v_4 = \frac{1}{5} c$, und

$$L = \frac{(4 + 3 + 2 + 1)}{25} \cdot \frac{Qc^2\gamma}{g} = \tfrac{2}{5} \cdot \frac{Qc^2\gamma}{g} = \tfrac{4}{5} \cdot Qh\gamma$$

heraus, wenn h die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ bezeichnet. Für fünf Räder folgt $L = \frac{5}{6} Qh\gamma$, und für n Räder $= \frac{n}{n+1} Qh\gamma$, alſo für unendlich viele Räder, $L = Qh\gamma$, während ein Rad L doch nur $\frac{1}{2} Qh\gamma$ gäbe. Bloß vom theoretiſchen Geſichtspunkte aus betrachtet ſieht man hiernach, daß viele Räder hinter einander beinahe das ganze Arbeitsvermögen ($Qh\gamma$) des Waſſers in ſich aufnehmen, während ein Rad allein nur halb ſo viel Arbeit ($\frac{1}{2} Qh\gamma$) verrichtet, als das Waſſer leiſten kann.

Mehrere Räder neben einander leiſten natürlich zuſammen eben ſo viel als ein einziges.

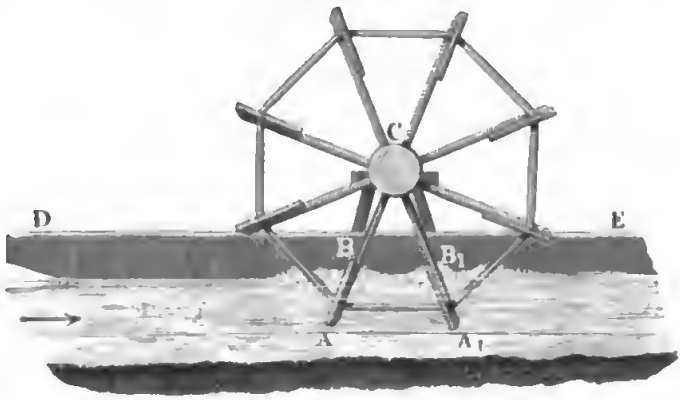
§. 218 **Schiffmühlenräder.** Noch hat man freihängende Räder, welche von keinem Gerinne umſchloſſen ſind, ſondern in einem weiten Canale oder Fluſſe hängen, und deshalb nur einen Theil von der Breite des fließenden Waſſers einnehmen. Es gehören hierher vorzüglich die ſogenannten Schiffmühlenräder, deren Zapfen auf Kähnen oder Schiffen ruhen, die durch eingeworfene Anker, angehängte Steine oder am Ufer befeſtigte Seile feſtgehalten werden. Zuweilen befindet ſich nur das eine Angewelle auf einem

Schiffe, während das andere zwiſchen zwei Säulen am Ufer feſtgehalten wird. Ruhen beide Zapfen auf Schiffen, ſo befindet ſich die ausübende Maſchine ebenfalls auf einem Schiffe, daher der Name Schiffmühle, ruht aber nur der eine Zapfen auf einem Schiffe, ſo nimmt die ausübende Maſchine ihren Platz auf dem Lande ein.

Die Conſtruction der Schiffmühlenräder weicht inſofern in der Regel von der anderer Räder ab, als dieſe Räder oft mit gar keinem Kranze ausgerüſtet, und ihre Schaufeln unmittelbar auf den Radarmen befeſtigt ſind. Dieſe Räder ſind nur 12 bis 15 Fuß hoch und haben oft nur ſechs Schaufeln; es iſt jedoch beſſer, ihnen zwölf oder mehr Schaufeln zu geben. Die Schaufeln muß man ſehr lang und breit machen, damit ſie einen großen Waſſerſtrom aufnehmen, der ohnedies wegen ſeiner meiſt ſehr mäßigen Geſchwindigkeit keine große lebendige Kraft beſitzt. Die Länge der Schaufeln beträgt 6 bis 18 Fuß und die Breite 1 bis 2 Fuß. Es iſt übrigens zweckmäßig, den Schaufeln nach außen 10 bis 20° Neigung gegen den Strom zu geben, ſie mit Leiſten einzufaſſen und nicht viel über die Hälfte ins Waſſer eintauchen zu laſſen.

Fig. 437 zeigt einen Theil einer Schiffmühle (franz. moulin à nef; engl. ship-mill); AC iſt das mit acht Schaufeln AB, A_1B_1 . . . ausgerüſtete Schiffmühlenrad und DE der Kahn oder das Schiff, auf welchem das eine Wellenende C ruht. Um das Biegen der Arme zu verhindern, ſind dieſelben mit einander durch Streben verbunden.

Fig. 437.



Zuweilen beſteht eine Schiffmühle aus zwei Rädern, deren gemeinſchaftliche Axe in der Mitte von einem einzigen Schiffe getragen wird.

Die Leiſtungen der Schiffmühlenräder ſind aus doppelten Gründen kleiner als die der Räder, welche in Gerinnen hängen, denn es weicht hier nicht nur ein Theil des Waſſers zur Seite der Schaufeln und unter denſelben aus, ſondern es geht auch hier ein größeres Waſſerquantum durch das Rad,

ohne zum Stoße zu gelangen, weil die Anzahl der eingetauchten Schaufeln ſehr klein, zuweilen ſogar nur $1^1/_2$ bis 2 iſt.

§. 219 **Leiſtung freihängender Räder.** Wir können die theoretiſche Leiſtung eines freihängenden Waſſerrades wie die eines Rades im Gerinne durch die Formel

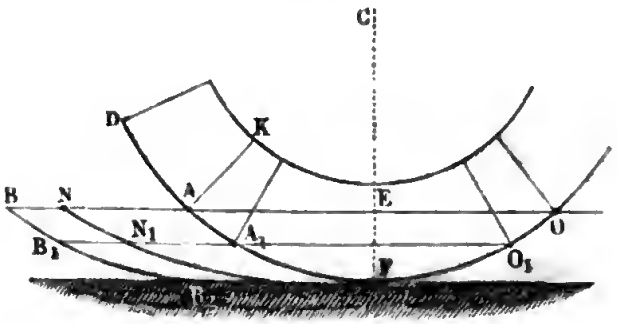
$$L = Pv = \frac{(c - v)\, vc}{g} F\gamma$$

ſetzen, wenn wieder c und v die Geſchwindigkeiten des Waſſers und Rades, ſowie F den Inhalt des eingetauchten Theiles einer Schaufelfläche (ohne Rückſicht auf die Aufſtauung vor derſelben) bezeichnet. Wegen der Waſſerverluſte müſſen wir aber dieſen Ausdruck noch durch einen Coefficienten multipliciren, deſſen Werth wir nach Gerſtner wenigſtens theilweiſe beſtimmen können. Iſt die Zahl n_1 der eingetauchten Schaufeln nicht ſehr klein, ſo haben wir auch hier wie bei den unterſchlägigen Rädern das wirklich zum Stoße gelangende Waſſerquantum:

$$Q_1 = \left(1 - \frac{c^2}{3\, n_1^2\, (c - v)^2}\right) Q;$$

iſt ſie aber klein, ſo trifft vielleicht ſchon der oberſte Waſſerfaden AB einer Zelle AD, Fig. 438, nicht vollſtändig die Schaufel AK vor ihm, es iſt

Fig. 438.



vielmehr nur ein Theil AN deſſelben, welcher noch zum Stoße gelangt. In dieſem Falle findet ein Waſſerverluſt bei allen Waſſerfäden ſtatt, und es iſt das Verhältniß des ſtoßenden Waſſerquantums zum ankommenden:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\text{Fläche } ANN_1FA_1}{\text{Fläche } ABB_2FA_1},$$

oder, da nach Bd. II, §. 214, Fläche $ANN_1FA_1 = \frac{c - v}{v}$ mal Segment AOF iſt,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{{}^2/_3\left(\frac{c-v}{v}\right)\cdot\overline{AO}}{\overline{AB}} = {}^2/_3\left(\frac{c-v}{v}\right)\cdot\frac{n_1\overline{AD}}{\frac{c}{v}\cdot\overline{AD}} = \frac{2n_1}{3}\left(\frac{c-v}{c}\right)\cdot$$

Es iſt alſo in dieſem Falle die Leiſtung des Waſſerrades:

$$\text{I.}\quad L = \frac{(c-v)v}{g}\cdot\frac{2n_1}{3}\left(\frac{c-v}{c}\right)Q\gamma = {}^2/_3\,n_1\,\frac{(c-v)^2v}{gc}Q\gamma$$

$$= {}^2/_3\,n_1\,\frac{(c-v)^2v}{g}F\gamma.$$

Die größte Leiſtung findet hiernach nicht für $v = {}^1/_2\,c$, ſondern für $v = {}^1/_3\,c$ ſtatt, und beträgt:

$$L = {}^2/_3\,n_1\,.\,{}^4/_{27}\cdot\frac{c^3}{g}F\gamma = \frac{8n_1}{81}\cdot\frac{c^3}{g}F\gamma.$$

Setzt man noch $Fc = Q$, ſo erhält man:

$$L = \frac{8n_1}{81}\cdot\frac{c^2}{g}Q\gamma = \frac{16n_1}{81}\cdot\frac{c^2}{2g}Q\gamma,$$

und daher den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{16n_1}{81},$$

z. B. für $n_1 = {}^3/_2$:

$$\eta = {}^{24}/_{81} = {}^8/_{27} = 0{,}296.$$

Die letzte Formel findet jedoch keine Anwendung, wenn die Zahl der Schaufeln beträchtlich iſt, denn ſie ſetzt voraus, daß $AN < AB$, alſo

$$\frac{c-v}{v}\cdot\overline{AO} < \overline{AB} \text{ oder } \frac{c-v}{v} < \frac{\frac{c}{v}\overline{AD}}{n_1\overline{AD}}$$

d. i.

$$n_1 < \frac{c}{c-v}$$

ſei. Iſt nun z. B. $v = {}^1/_3\,c$, ſo erhält man zur Bedingung, daß $n_1 < {}^3/_2$ ſei, iſt aber $v = {}^1/_2\,c$, ſo folgt die Bedingung $n_1 < 2$ u. ſ. w. Es tritt alſo in dem Falle, wenn zwei oder mehr Schaufeln unter das Waſſer tauchen, der eben abgehandelte Fall nicht ein, und es gilt dann die Formel für Räder im Gerinne auch hier, nämlich:

$$\text{II.}\quad L = \left(1 - \frac{c^2}{3n_1^2(c-v)^2}\right)\frac{(c-v)vc}{g}F\gamma.$$

Uebrigens läßt ſich die Zahl n_1 der eingetauchten Schaufeln aus der Anzahl aller Schaufeln leicht berechnen, wenn man den Radhalbmeſſer a und die Tiefe $EF = e_1$ der Eintauchung giebt, es iſt nämlich:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\overline{AO}}{2\pi a},$$

oder, da ſich $\overline{AO} = 2\overline{AE} = 2\sqrt{2ae_1}$ ſetzen läßt,

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{2ae_1}}{\pi a} = 0{,}45\sqrt{\frac{e_1}{a}}.$$

Beiſpiel. Welche Leiſtung verſpricht ein Schiffmühlenrad von 15 Fuß Höhe und mit acht 12 Fuß langen Schaufeln, welche 1 Fuß tief ins Waſſer tauchen, wenn letzteres mit 5 Fuß Geſchwindigkeit anſtößt? Wir haben hier:

$$\frac{n_1}{n} = 0{,}45\sqrt{\frac{1}{7{,}5}} = 0{,}45\,.\,0{,}365 = 0{,}164,$$

daher:

$$n_1 = 0{,}164\,.\,8 = 1{,}3,$$

und folglich die Formel:

$$L = \tfrac{2}{3}\,n_1\,\frac{(c-v)^2 v F\gamma}{g}$$

in Anwendung zu bringen. Laſſen wir nun das Rad mit 2 Fuß Geſchwindigkeit umgehen, ſo erhalten wir die in Frage ſtehende Leiſtung:

$$L = \tfrac{2}{3}\,.\,1{,}3\cdot\frac{3^2\,.\,2}{g}\cdot 12\,.\,1\,.\,61{,}75 = 0{,}032\,.\,1{,}3\,.\,9\,.\,988 = 370 \text{ Fußpfund}.$$

Giebt man dieſem Rade 16 Schaufeln, um eine größere Leiſtung zu gewinnen, ſo hat man $n_1 = 2{,}6$, und daher nach der Formel II.:

$$L = \frac{(5-2)\,.\,5.2}{g}\left(1 - \frac{5^2}{3\,.\,2{,}6^2\,.\,3^2}\right)\cdot 12\,.\,1\,.\,61{,}75 = 0{,}032\,.\,0{,}863\,.\,22230$$
$$= 614 \text{ Fußpfund}.$$

§. 220 **Verſuche mit freihängenden Rädern.** Verſuche über die Leiſtungen der Waſſerräder im unbegrenzten Strome ſind von Deparcieux, Boſſut und Poncelet angeſtellt worden. Am ausgedehnteſten ſind die allerdings nur an einem Modellrade vorgenommenen Verſuche von Boſſut. Dieſes Rad hatte eine Höhe von 0,975 Meter und enthielt 24 Schaufeln von 0,135 Meter Länge, welche 0,108 Meter tief in dem Waſſer gingen, das eine Geſchwindigkeit von 1,854 Meter beſaß. Aus den Reſultaten der Verſuche berechnet ſich der Coefficient, womit der Ausdruck

$$L = \frac{(c-v)^2 v}{g}\cdot F\gamma$$

zu multipliliren iſt, um die effective Leiſtung zu geben, $\chi = 1{,}37$ bis $1{,}79$, dagegen der Coefficient, womit der Ausdruck

$$L = \frac{(c-v)vc}{g} F\gamma$$

zu multipliciren iſt, um die effective Leiſtung zu erhalten, $\chi = 0{,}847$ bis $0{,}706$ (ſ. d'Aubuiſſon's Hydraulik, §. 352). Die Grenzwerthe des letzteren Coefficienten ſind einander etwas näher als die des erſteren, da aber die Zahl der Radſchaufeln 24 betrug, ſo iſt es auch nicht anders zu erwarten, denn es findet hier jedenfalls die Formel II. des vorigen Paragraphen,

$$L = \left(1 - \frac{c^2}{3\,n_1^2\,(c-v)^2}\right)\frac{(c-v)\,cv}{g}\,F\gamma,$$

ihre Anwendung. In der Regel wird man die Schaufelzahl ſo groß machen, daß immer mindeſtens zwei Schaufeln ins Waſſer tauchen, und daher die letzte Formel mit dem mittleren Coeffizienten $\chi = 0{,}8$ anwenden, alſo

$$L = 0{,}8\,\frac{(c-v)\,cv}{g}\,F\gamma = 1{,}58\,(c-v)\,cv\,F \text{ Fußpfund}$$

ſetzen können.

Hiermit ſtimmen aber auch die Beobachtungen von Poncelet, welche derſelbe an drei Rädern in der Rhone angeſtellt hat, überein. Dieſe Räder hatten $2^1/_2$ bis $2^2/_3$ Meter lange Schaufeln, welche $^2/_3$ bis $^3/_4$ Meter tief im Waſſer gingen, das $1^1/_5$ bis 2 Meter Geſchwindigkeit beſaß. Auch führt Poncelet noch eine Beobachtung von Boistard und eine andere von Chriſtian an, welche beide gut hiermit übereinſtimmen.

Nach den Verſuchen von Boſſut findet, ganz in Uebereinſtimmung mit der Theorie, die größte Wirkung ſtatt, wenn das Rad mit der Geſchwindigkeit $v = 0{,}4\,c$ umgeht; auch hat Poncelet gefunden, daß bei den ſoeben beſprochenen Rädern in der Rhone das vortheilhafteſte Geſchwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c} = 0{,}4$ war.

Wenn wir in der obigen Formel $v = 0{,}4\,c$ einſetzen, ſo bekommen wir die effective Leiſtung:

$$L = 0{,}8\cdot\frac{0{,}6\,.\,0{,}4\,c^3}{g}\,F\gamma = 0{,}192\,\frac{c^3}{g}\,F\gamma = 0{,}384\,\frac{c^2}{2g}\,Q\gamma,$$

und alſo den Wirkungsgrad:

$$\eta = 0{,}384.$$

Die Verſuche Deparcieux's waren beſonders darauf gerichtet, die vortheilhafteſte Stellung der Schaufeln zu finden; aus ihnen folgt, wie aus denen von Boſſut, daß eine Neigung von 60° gegen den Strom die vortheilhafteſte iſt.

Anmerkung. Es iſt lange in Zweifel gezogen worden, welche von den Formeln

$$L = \frac{\chi\,(c-v)^2\,v}{g}\,F\gamma \quad \text{oder} \quad L = \frac{\chi_1\,(c-v)\,cv}{g}\,F\gamma$$

die richtigere ſei; man hat jene die Parent'ſche und dieſe die Borda'ſche genannt. Wenn nun auch bei einem Rade im unbegrenzten Waſſer nicht alles Waſſer, welches gegen die Schaufeln anrückt, nach dem Stoße die Geſchwindigkeit der Schaufeln annimmt, da dem Waſſer Gelegenheit zum Entweichen am Umfange gegeben wird, ſo läßt ſich doch bei dem ſo großen Inhalte einer Schaufelfläche erwarten, daß wenigſtens der größere Theil des Waſſers bei dem Stoße gegen die Schaufel die Geſchwindigkeit derſelben annimmt, und aus dieſem Grunde iſt die größere Uebereinſtimmung der Erfahrung mit der Borda'ſchen Formel erklärlich. Die in Bd. II, §. 219 entwickelte Gerſtner'ſche Formel ſtimmt mit

der Parent'ſchen natürlich in der Form zuſammen, denn die Parent'ſche Formel iſt ohne Coefficienten

$$L = \frac{(c - v)^2 v}{2g} F\gamma,$$

und unter der Vorausſetzung entwickelt, daß der Stoß durch die der relativen Geſchwindigkeit $c - v$ entſprechende Geſchwindigkeitshöhe gemeſſen werde. (Vergleiche Bd. I. §. 511, wo die Stoßkraft $= 1{,}86 \frac{c^2}{2g} F\gamma$ angegeben wird, wenn $v = 0$ iſt.)

Beiſpiel. Für das Schiffmühlenrad, welches wir ſchon im Beiſpiele des vorigen Paragraphen behandelt haben, iſt $c = 5$, $v = 2$, $F = 12 . 1 = 12$, daher die effective Leiſtung nach Poncelet:

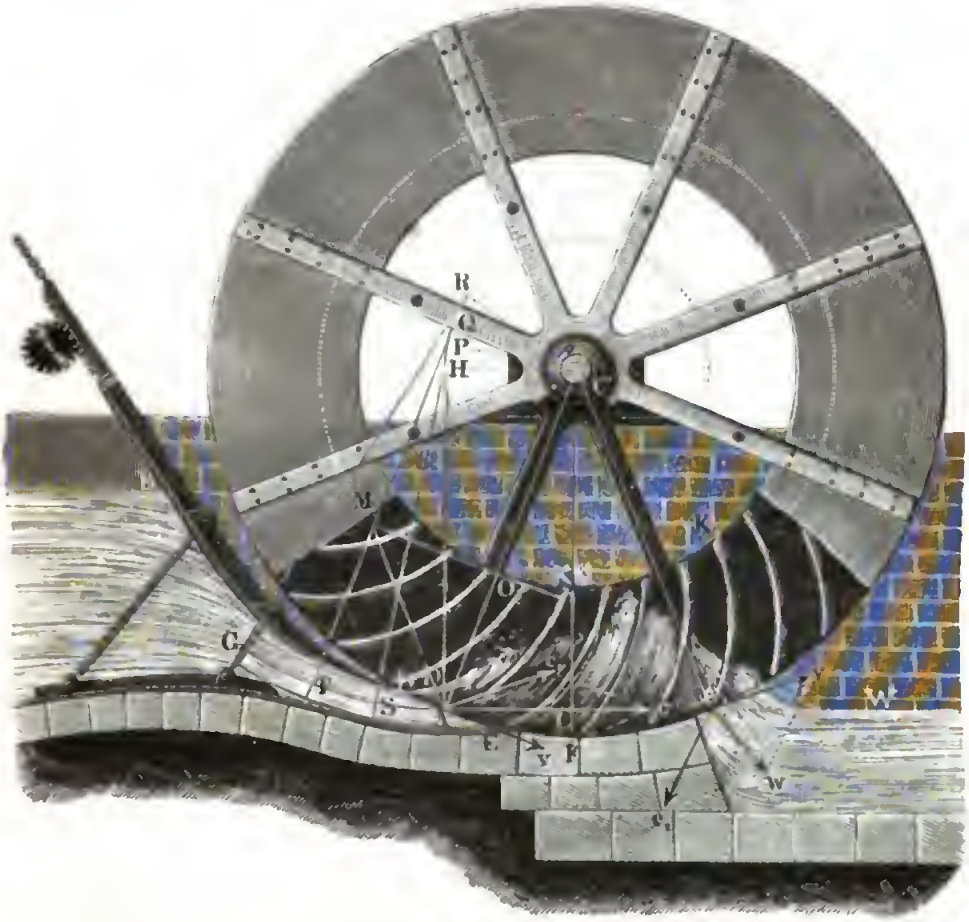
$$L = 1{,}69 . 3 . 2 . 5 . 12 = 608 \text{ Fußpfund},$$

während wir durch die theoretiſche Formel ein Mal bei 8 Schaufeln, 395 Fußpfund, und ein zweites Mal bei 16 Schaufeln 656 Fußpfund gefunden haben.

§. 221 **Poncelet'räder.** Wenn man die Schaufeln unterſchlägiger Räder ſo krümmt, daß der eintretende Waſſerſtrahl an der hohlen Seite derſelben hinſtrömen und dadurch gegen dieſelbe drücken kann, ohne einen Stoß hervorzubringen, ſo erhält man eine größere Leiſtung, als wenn das Waſſer ebene Schaufeln mehr oder weniger rechtwinkelig ſtößt. Solche Räder mit krummen Schaufeln heißen nach ihrem Erfinder Poncelet'ſche oder Poncelet'räder. Sie ſind beſonders bei kleinen Gefällen (unter 6 Fuß) von großem Nutzen, weil ſie mehr leiſten, als unterſchlägige Räder mit oder ohne Kropf. Bei größerem Gefälle werden ſie jedoch von den mittelſchlägigen Kropfrädern in der Leiſtung übertroffen; auch iſt, wie wir weiter unten ſehen werden, in dieſem Faſſe ihre Conſtruction eine ſchwierigere, weshalb man ſie bei Gefällen über 6 Fuß nicht gern anwendet. Poncelet behandelt dieſe Räder in der beſonderen Schrift: Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par-dessous, Metz 1827, ausführlich. Ihre Einrichtung iſt aus Fig. 441 zu erſehen, welche die untere Hälfte eines ſolchen Rades vorſtellt. Man ſieht in C die Axe und in AK, A_1K_1 u. ſ. w. Schaufeln des Rades; BD iſt das geneigte Schutzbrett und TA der eintretende und an den Schaufeln AK und A_1K_1 hinauf- und herabſteigende Waſſerſtrahl, ſowie W die Oberfläche des Unterwaſſers. Damit faſt alles Waſſer zur Wirkung gelange, muß dem Rade nur ein ſehr enger Spielraum in dem Gerinne gelaſſen werden, und um die partielle Contraction zu verhindern, wird die untere Kante des Schutzbrettes unten abgerundet; damit ferner ſo wenig wie möglich lebendige Kraft durch die Reibung des Waſſers im Zuflußgerinne verloren gehe, wird die Mündung ganz nahe an das Rad gerückt und das Bret gegen den Horizont geneigt; auch erhält wohl das Vorgerinne $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ Neigung, um dadurch den Verluſt an Waſſerreibung in demſelben wieder auszugleichen. In der Regel umgiebt

man das Rad mit einem kreisförmigen Kropfe, welcher sich wenigstens auf zwei Schaufeltheilungen erstreckt, und damit das Rad nicht im Unterwasser

Fig. 441.

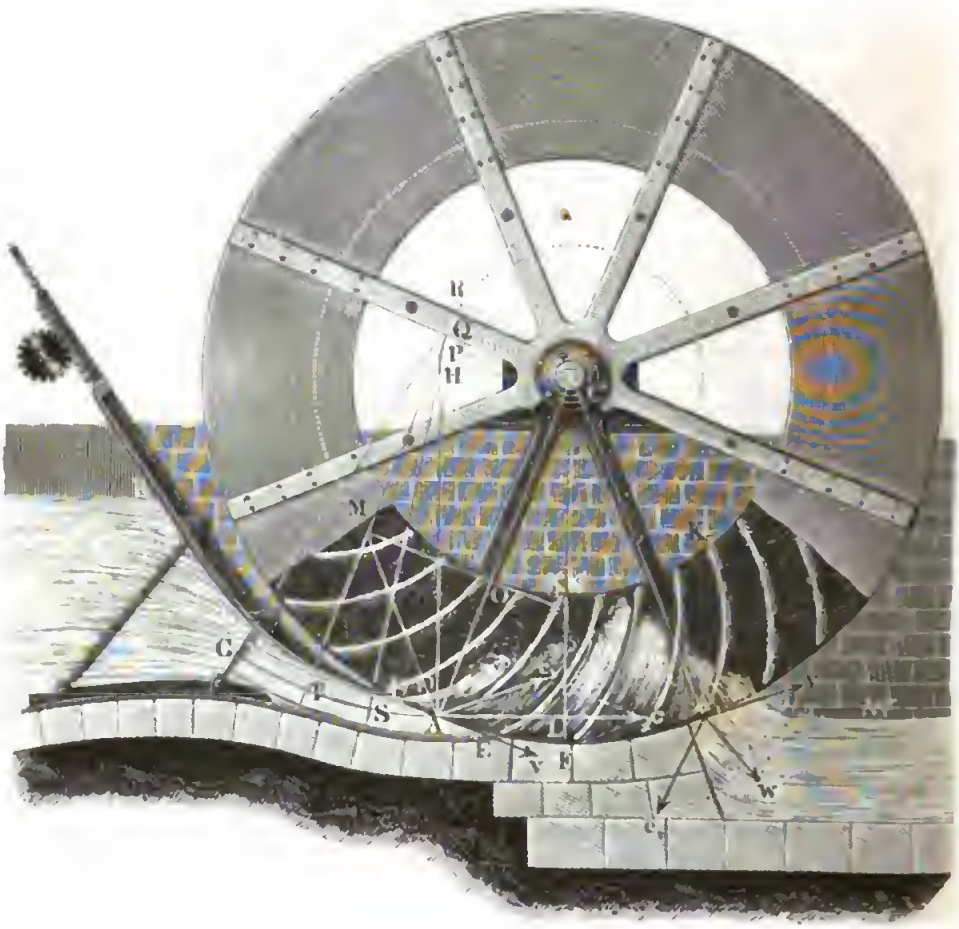


wate, bringt man hinter diesem Kropfe einen Abfall von $^1/_2$ Fuß Höhe an, und erweitert zu diesem Zwecke auch wohl den Abzugsgraben. Man baut Ponceleträder von 10 bis 20 Fuß Höhe und giebt ihnen 32 bis 48 Schaufeln von Blech oder Holz. Die hölzernen Schaufeln sind aus Dauben zusammenzusetzen wie eine Tonne, und außen zuzuschärfen oder mit einer Blechkante auszurüsten. Viel zweckmäßiger sind jedoch die Blechschaufeln. Die Anwendung von Eisen statt des Holzes ist bei den Ponceleträdern vorzüglich zu empfehlen, weil die Wirkung dieser Räder von einer guten Ausführung wesentlich mit abhängt. Die Schutzöffnung macht man höchstens 1 Fuß hoch, in der Regel, namentlich aber bei größeren Gefällen von 5 bis 6 Fuß, nur $^1/_2$ Fuß, und noch niedriger.

Theorie der Ponceleträder. Um eine möglichst große Wirkung von einem Ponceletrade zu erhalten, ist es nöthig, daß das Wasser ohne §. 222

Stoß in das Rad eintrete. Iſt $\overline{Ac} = c$, Fig. 442, die Geſchwindigkeit des eintretenden Waſſers und $\overline{Av} = v$ die Umfangsgeſchwindigkeit des Rades,

Fig. 442.



ſo erhält man in der Seite $\overline{Ac_1} = c_1$ des Parallelogramms $Avcc_1$, welches der Seite $\overline{Av} = v$ und Diagonale $\overline{Ac} = c$ entſpricht, die Größe und Richtung der Geſchwindigkeit des Waſſers in Hinſicht auf das Rad; wenn man daher die Schaufel AK tangential an Ac_1 anſchließt, ſo wird das Waſſer an ihr, ohne irgend einen Stoß auszuüben, mit der Geſchwindigkeit c_1 in die Höhe zu ſteigen anfangen. Setzen wir den Winkel cAv, um welchen die Richtung des ankommenden Waſſers von dem Radumfange oder der Tangente Av abweicht, $= \alpha$, ſo haben wir die relative Anfangsgeſchwindigkeit des an den Schaufeln in die Höhe ſteigenden Waſſers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha};$$

und für den Winkel $vAc_1 = \beta$, um welchen die Richtung derſelben von dem Radumfange oder der Tangente Av abweicht,

$$\sin.\beta = \frac{c \sin.\alpha}{c_1}.$$

Damit das Waſſer nicht blos in der Mitte A, ſondern in ganzer Höhe, alſo auch in D und E mit dem Winkel α in das Rad eintrete, muß es dem Rade in einem Kreisevolventenbogen GA zugeführt werden, deſſen Grundkreis mit dem Rade einerlei Mittelpunkt C hat, und deſſen Erzeugungslinie AH anfangs auf AA_1 oder auf der Bewegungsrichtung des Strahles bei ſeinem Eintritte in das Rad rechtwinkelig ſteht. Denn zieht man in dem der halben Strahlhöhe gleichen Abſtande Aequidiſtanten zu dieſem Evolventenbogen, ſo ſind dieſe gleiche Evolventenbögen und ſchneiden den Radumfang in D und E unter demſelben Winkel, wie der erſtere in A. Um die der Axe des eintretenden Waſſerſtrahles entſprechende Evolvente zu conſtruiren, ſchneide man auf dem Grundkreiſe beliebige Stücke HP, PQ u. ſ. w. ab, führe Berührungslinien durch die dadurch beſtimmten Punkte $P, Q \ldots$ und mache dieſe gleich der erſten Tangente AH plus dem zwiſchenliegenden Bogenſtück HP, HQ u. ſ. w.

Das Waſſer ſteigt, wie ein feſter Körper, an der Schaufel mit abnehmender Geſchwindigkeit in die Höhe, während es mit der Schaufel gleichzeitig noch die Umdrehungsgeſchwindigkeit v beſitzt. Auf einer gewiſſen Höhe angekommen, hat es ſeine relative Geſchwindigkeit ganz verloren, und es fällt nun auf der Schaufel beſchleunigt herab, ſo daß es zuletzt mit derſelben Geſchwindigkeit c_1 wieder am äußeren Ende A_1 ankommt, mit welcher es zu ſteigen anfing. Vereinigen wir nun die relative Geſchwindigkeit $\overline{A_1 c_1} = c_1$ des bei A_1 austretenden Waſſers mit der Umfangsgeſchwindigkeit $\overline{A_1 v} = v$ durch das Parallelogramm der Geſchwindigkeiten, ſo erhalten wir in deſſen Diagonale $\overline{A_1 w} = w$ die abſolute Geſchwindigkeit des abfließenden Waſſers. Dieſe Geſchwindigkeit iſt

$$w = \sqrt{c_1^2 + v^2 - 2 c_1 v \cos.\beta},$$

und demnach die mechaniſche Arbeit, welche das abfließende Waſſer behält und, ohne dem Rade mitgetheilt zu haben, mit ſich fortnimmt:

$$L_1 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2 - 2 c_1 v \cos.\beta}{2g}\right) Q\gamma.$$

Zieht man nun dieſen Verluſt von der Leiſtung $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$, welche das Waſſer vermöge ſeiner lebendigen Kraft vor dem Eintritte in das Rad verrichten kann, ab, ſo bekommt man folgenden Ausdruck für die theoretiſche Radleiſtung:

$$L = \left(\frac{c^2}{2g} - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{c^2 - w^2}{2g}\right) Q\gamma,$$

$$= \left(\frac{c^2 - c_1^2 - v^2 + 2 c_1 v \cos.\beta}{2g}\right) Q\gamma,$$

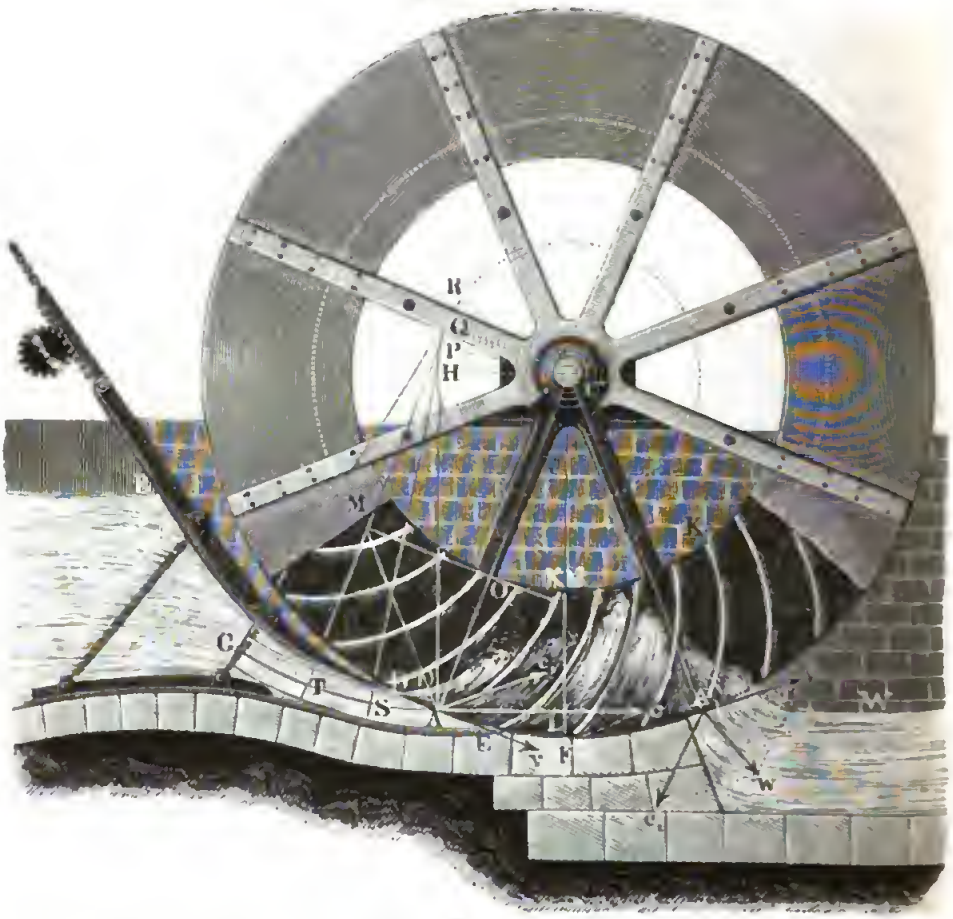
oder, da $c^2 = c_1^2 + v^2 + 2\,c_1\,v\,cos.\,\beta$ iſt, auch

$$L = \frac{2\,c_1\,v\,cos.\,\beta}{g}\,Q\gamma,$$

und es folgt, wenn man noch $c_1\,cos.\,\beta = c\,cos.\,\alpha - v$ einſetzt, dieſe Leiſtung

$$L = \frac{2\,v\,(c\,cos.\,\alpha - v)}{g}\,Q\gamma.$$

Fig. 443.



Man ſieht nun leicht ein, daß für $v = {}^1/_2\,c\,cos.\,\alpha$ die Leiſtung am größten, und zwar

$$L = \frac{c^2\,cos.\,\alpha^2}{2\,g}\,Q\gamma$$

wird, und daß der Arbeitsverluſt ſogar Null iſt, alſo die ganze disponible Arbeit

$$L = \frac{c^2}{2\,g}\,Q\gamma$$

gewonnen wird, wenn man $cos.\,\alpha = 1$, alſo $\alpha =$ Null hat.

Wenn es auch nicht möglich ist, den Eintrittswinkel $\alpha =$ Null zu machen, so folgt doch wenigstens hieraus, daß man α nicht sehr groß (nicht über 20°) machen darf, um eine große Leistung zu erhalten, und es ist auch hiernach zu ersehen, daß man die Umfangsgeschwindigkeit des Rades nur wenig kleiner als die halbe Geschwindigkeit des zufließenden Wassers zu machen hat, um einen großen Wirkungsgrad des Rades zu erlangen.

Die senkrechte Höhe $\overline{LN}$, auf welche das Wasser aufsteigt, während es §. 223
an den Schaufeln hingeht, wäre $= \frac{c_1^2}{2g}$, wenn das Rad still stände, da es aber mit einer Geschwindigkeit v umläuft, so entsteht eine Centrifugalkraft, welche ziemlich mit der Schwerkraft in gleicher Richtung wirkt und eine Acceleration p erzeugt, die sich $\frac{v_1^2}{a_1}$ setzen läßt, wenn a_1 den mittleren Radkranzhalbmesser, und v_1 die mittlere Geschwindigkeit des Radkranzes oder die Geschwindigkeit im Mittel der Kranzbreite bezeichnet. S. Band I, §. 42. Es ist sonach zu setzen:

$$(g + p)\, h_1 = \frac{c_1^2}{2} \quad \text{oder} \quad \left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right) h_1 = \frac{c_1^2}{2},$$

und daher die gesuchte Steighöhe:

$$h_1 = \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)}.$$

Damit das Wasser nicht oben bei N überschlägt, ist nun nöthig, daß die Kranzbreite eine gewisse Größe $\overline{FN} = d$ habe, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$d = \overline{LN} + \overline{FL} = h_1 + CF - CL, \text{ d. i.:}$$

$$d = h_1 + a - a\cos. ACF = \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)} + a\,(1 - \cos.\lambda),$$

wobei λ den Winkel ACF bezeichnet, um welchen der Eintrittspunkt A vom Radtiefsten F absteht. Jedenfalls ist aber hierzu noch die Strahldicke d_1 zu addiren, weil die oberen Wasserfäden bei Annahme einer mittleren Geschwindigkeit, im ganzen Strahle um diese Höhe höher steigen als die unteren Fäden. Wir setzen also die Kranzbreite:

$$d = d_1 + \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)} + a\,(1 - \cos.\lambda).$$

Die Radweite läßt sich der Strahlbreite $e = \frac{Q}{d_1 c}$ gleichsetzen. Nimmt

man den Faſſungsraum $d\,c\,v_1$ des Rades 2- bis $2^1/_2$mal ſo groß als das Aufſchlagquantum Q an, ſo hat man die Gleichung:

$$d\,v_1 = 2\,d_1\,c \text{ bis } {}^5/_2\,d_1\,c,$$

woraus ſich die Strahldicke

$$d_1 = {}^2/_5\,\frac{d\,v_1}{c} \text{ bis } {}^1/_2\,\frac{d\,v_1}{c} \text{ ergiebt.}$$

Da $\frac{v_1}{v} = \frac{a - {}^1/_2\,d}{a}$ iſt, ſo hat man auch:

$$v_1 = \left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) v, \quad \text{und daher:}$$

$$d_1 = {}^2/_5\left(1 - \frac{d}{2\,a}\right)\frac{d\,v}{c} \text{ bis } {}^1/_2\left(1 - \frac{d}{2\,a}\right)\frac{d\,v}{c},$$

oder, $v = {}^1/_2\,c\,\cos.\,\alpha$ geſetzt,

$$d_1 = {}^1/_5\left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) d\,\cos.\,\alpha \text{ bis } {}^1/_4\left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) d\,\cos.\,\alpha.$$

Nach Morin iſt $d = \frac{a}{3}$ bis $\frac{a}{2}$, alſo der Radhalbmeſſer a nur zwei- bis dreimal ſo groß zu machen als die Kranzbreite.

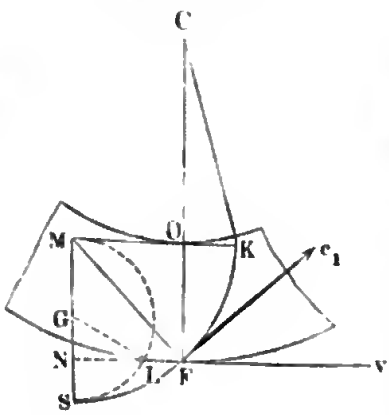
Ein anderes wichtiges Verhältniß iſt nun noch die Beſtimmung der Eintritts- und Austrittsſtelle, oder die Größe des waſſerhaltenden Bogens $A\,A_1$, den wir am beſten auf beiden Seiten des Radtiefſten F gleichmäßig vertheilen. Die Länge dieſes Bogens hängt von der Zeit ab, welche das Waſſer zum Auf- und Abſteigen an den Schaufeln nöthig hat. Um dieſe zu finden, muß aber die Geſtalt und Ausdehnung der Schaufeln bekannt ſein. Iſt dieſe Zeit $= t$, ſo können wir ſetzen:

$$A\,A_1 = 2\,\lambda a = v\,t,$$

und ſonach den Bogen, um welchen Ein- und Austrittspunkt (A und A_1) des Waſſers vom Radtiefſten F abſtehen:

$$\lambda = \frac{v\,t}{2\,a}.$$

Fig. 444.



§. 224

Damit das Waſſer, wenn es die höchſte Stelle K, Fig. 444, auf der Schaufel erreicht hat, daſelbſt nicht überſchlage, ſondern an der Schaufel wieder niederfalle, iſt es nöthig, daß das innere Schaufelende K beim tiefſten Stande $F\,K$ der Schaufel nicht überhänge, damit aber auf der anderen Seite die Schaufel nicht unnöthig lang ausfalle, iſt nöthig, daß das Schaufelende K den inneren Radumfang nicht ſehr ſpitz ſchneide:

aus dieſen Gründen iſt ein verticaler Stand des inneren Schaufelendes beim mittelbaren Schaufelſtande am zweckmäßigſten. Giebt man nun der Schaufel eine cylindriſche Form, ſo erhält man das Centrum M ihres kreisbogenförmigen Durchſchnittes, wenn man MF rechtwinkelig auf Fc_1 ſtellt und OM horizontal zieht. Aus der Radtiefe oder Kranzbreite $\overline{FO} = d$ ergiebt ſich der Krümmungshalbmeſſer $MF = KM = r$, da der Winkel $MFO = c_1 Fv = \beta$ iſt,

$$r = \frac{d}{cos.\,\beta}.$$

Die Zeit zum Hinauf- und Hinabſteigen des Waſſers an dem Bogen FK finden wir wie die Schwingungszeit eines Pendels, indem wir ſtatt der Acceleration der Schwere die Summe $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ aus der Acceleration g derſelben und aus der mittleren Centrifugalacceleration $\frac{v_1^2}{a_1}$ einſetzen.

Wir finden übrigens dieſe Zeit genau nach der in Bd. I, (§. 322) entwickelten Formel

$$t = {}^1/_2 \sqrt{\frac{r}{g}} \left(\varphi + (\varphi + sin.\,\varphi)\,\frac{h}{8\,r}\right)$$

für die Schwingungszeit t eines Pendels durch den Bogen FK, wenn r den Halbmeſſer $MF = MK$ des von der Schaufel gebildeten Kreisbogens, h die ganze Fallhöhe $\overline{MS} = \overline{MF} = r$, und φ den Centriwinkel MGL bezeichnet, welcher dem Kreiſe MLS über dem Durchmeſſer $MS = r$ und der Bogenhöhe

$$\overline{MN} = \overline{OF} = \overline{MF}\,cos.\,FMN = r\,cos.\,(vFc_1) = r\,cos.\,\beta$$

entſpricht.

Dieſer Winkel φ beſtimmt ſich durch die Formel:

$$cos.\,\varphi = -\frac{NG}{LG} = -\frac{MN - MG}{MG} = -\frac{r\,cos.\,\beta - {}^1/_2\,r}{{}^1/_2\,r}$$
$$= 1 - 2\,cos.\,\beta,$$

oder:

$$sin.\,{}^1/_2\,\varphi = \sqrt{cos.\,\beta}.$$

Wenn man nun noch wegen der Einwirkung der Centrifugalkraft ſtatt g, $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ ſetzt, ſo erhält man die Zeit zum Steigen und Fallen durch den Bogen FK:

$$2\,t = \left(\varphi + \frac{\varphi + sin.\,\varphi}{8}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}$$
$$= \left(\frac{9\,\varphi + sin.\,\varphi}{8}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}.$$

und daher die Länge des waſſerhaltenden Bogens AA_1 Fig. (443):

$$b = 2\lambda a = 2ct = v\left(\frac{9\varphi + sin.\,\varphi}{8}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}.$$

§. 225 **Dimensionen eines Poncelet-rades.** Es kommt nun darauf an, mit Hülfe der im Vorſtehenden gefundenen Ergebniſſe, Regeln für die Anordnung und Conſtruction eines Poncelet-rades aufzuſtellen. Wir können nur das Auffchlagquantum Q und das Gefälle h, von Waſſerſpiegel zu Waſſerſpiegel gemeſſen, als bekannt anſehen, und haben daher die Geſchwindigkeiten c, c_1 und v, die Winkel α, β und λ, ſowie die Raddimenſionen a, d, e u. ſ. w. zu berechnen.

Annähernd iſt

$v = {}^1/_2 c = {}^1/_2\sqrt{2gh}$, $d = {}^1/_4 h$ und $d_1 = {}^1/_4 d = {}^1/_{16} h$.

Auch können wir in der Formel

$$\lambda = \frac{v}{a}\cdot\left(\frac{9\varphi + sin.\,\varphi}{16}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}$$

annähernd $\varphi = \pi$, alſo $sin.\,\varphi = 0$, ferner $v_1 = v = {}^1/_2 c$, $a_1 = e$ und $r = d = {}^1/_4 h$ ſetzen, weshalb wir

$$\lambda = 1{,}767\cdot\frac{\sqrt{2gh}}{2a}\sqrt{\frac{{}^1/_4 h}{g + \frac{c^2}{4a}}} = \frac{0{,}883\,h}{a\sqrt{2 + \frac{h}{a}}},$$

alſo umgekehrt,

$$a^2 + {}^1/_2 ha = {}^1/_2\left(\frac{0{,}883\,h}{\lambda}\right)^2,$$

folglich den Radhalbmeſſer

$$a = \frac{h}{4}\left[\sqrt{8\left(\frac{0{,}883}{\lambda}\right)^2 + 1} - 1\right] = \frac{h}{4}\left(\sqrt{\frac{6{,}238}{\lambda^2} + 1} - 1\right)$$

erhalten.

Am angemeſſenſten iſt es, den Waſſerſtrahl horizontal in das Rad einzuführen, alſo $\alpha = \lambda$, und zwar

1) $\alpha = \lambda = 20$ Grad, alſo $arc.: \lambda = 0{,}3491$

anzunehmen.

Hiernach erhalten wir den Radhalbmeſſer:

2) $a = 1{,}56\,h$.

Die Ausflußgeſchwindigkeit des Waſſers iſt:

3) $c = \mu\sqrt{2g\,(h - {}^1/_2 d_1)} = \mu\sqrt{2g\cdot{}^{31}/_{32} h}$
$= 0{,}98\,\mu\sqrt{2gh}$,

ferner die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit des Rades:

4) $v = {}^1/_2\, c \cos.\, \alpha$,

und die Umdrehungszahl:

5) $u = \dfrac{30\, v}{\pi\, a}$.

Der Schaufelwinkel δ iſt ferner durch die Formel

$$\mathit{colg.}\,\beta = \mathit{colg.}\,\alpha - \frac{v}{c\, \mathit{sin.}\,\alpha} = {}^1{}_2\, \mathit{colg.}\,\alpha,$$

d. i. durch

6) $\mathit{tang.}\,\beta = 2\, \mathit{tang.}\,\alpha$

beſtimmt.

Auch erhält man nun für die relative Anfangsgeſchwindigkeit des aufſteigenden Waſſers:

7) $c_1 = \dfrac{c\, \mathit{sin.}\,\alpha}{\mathit{sin.}\,\beta} = \dfrac{v}{\mathit{cos.}\,\beta}$,

und wenn man annähernd

$$\frac{v_1^2}{a_1} = \left(1 - \frac{d}{2\,a}\right)\frac{v^2}{a} = \left(1 - \frac{h}{8\,a}\right)\frac{v^2}{a} = 0{,}9\,\frac{v^2}{a}$$

annimmt, die Radtiefe ſchärfer beſtimmt,

$$d = d_1 + \frac{c_1^2}{2\left(g + 0{,}9\,\dfrac{v^2}{a}\right)} + (1 - \mathit{cos.}\,20^0)\,a, \quad \text{oder:}$$

8) $d = {}^2/_3 \dfrac{c_1^2}{g + 0{,}9\,\dfrac{v^2}{a}} + 0{,}08\,a.$

Damit das Waſſer auch bei langſamerem Gange nicht überſchlägt, ſetzt man noch einige Zoll zu.

Die ſchärfer beſtimmte Strahlhöhe iſt nun:

9) $d_1 = {}^1/_4 \left(1 - \dfrac{d}{2\,a}\right) d \cos.\,\alpha,$

und die Radweite:

10) $e = \dfrac{Q}{d_1\, c} = \dfrac{2\,Q}{d\, c_1}$.

Für die Schaufelkrümmung iſt endlich der Halbmeſſer:

11) $r = \dfrac{d}{\mathit{cos.}\,\beta}$,

und für den Hilfswinkel φ:

12) $\mathit{sin.}\,{}^1/_2\,\varphi = \sqrt{\mathit{cos.}\,\beta}$.

Mit Hilfe der Größen v, a, r und φ läßt ſich

13) $\lambda = \dfrac{v}{a}\left(\dfrac{9\,\varphi + \mathit{sin.}\,\varphi}{16}\right)\sqrt{\dfrac{r}{g + 0{,}9\,\dfrac{v^2}{a}}}$

noch ſchäfer beſtimmen.

Den mittleren Abſtand je zweier Schaufeln von einander, $b = 1$ Fuß angenommen, erhält man endlich noch die Anzahl der Schaufeln:

14) $n = 2\pi a_1$.

Beiſpiel. Man ſoll für ein Gefälle $h = 4{,}5$ Fuß und für ein Aufſchlagquantum $Q = 24$ Cubikfuß pr. Minute ein Poncelerad anordnen und berechnen.

Nehmen wir $\alpha = \lambda = 20$ Grad an, ſo erhalten wir zunächſt den Radhalbmeſſer $a = 1{,}56\,h = 7$ Fuß, und ſetzen wir den Geſchwindigkeitscoefficienten = dem Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}90$, ſo ergiebt ſich die mittlere Geſchwindigkeit des bei A eintretenden Waſſers:

$$c = 0{,}98\,\mu\sqrt{2gh} = 0{,}882 \,.\, 7{,}906\sqrt{4{,}5} = 6{,}97 \,.\, 2{,}121 = 14{,}78 \text{ Fuß},$$

ferner die vortheilhafteſte Umfangsgeſchwindigkeit des Rades:

$$v = \tfrac{1}{2}\,c\cos.\alpha = 7{,}39 \,.\cos. 20^0 = 7{,}39 \,.\, 0{,}940 = 6{,}95 \text{ Fuß},$$

und die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute:

$$u = \frac{30\,v}{n\,a} = \frac{30 \,.\, 6{,}95}{7\pi} = 9{,}48 \quad \text{oder nahe } 9\tfrac{1}{2}.$$

Für den Schaufelwinkel β iſt:

$$tang.\,\beta = 2\,tang.\,\alpha = 2\,tang.\,20^0 = 2 \,.\, 0{,}3640 = 0{,}7280, \text{ daher:}$$
$$\beta = 36^0\,2',$$

oder in runder Zahl, $\beta = 36$ Grad.

Die Anfangsgeſchwindigkeit des aufſteigenden Waſſers iſt:

$$c_1 = \frac{v}{\cos.\beta} = \frac{6{,}95}{\cos. 36^0\,2'} = \frac{6{,}95}{0{,}8087} = 8{,}59 \text{ Fuß},$$

und hiernach die erforderliche Radkranzbreite:

$$d = \tfrac{2}{3}\,\frac{c_1^2}{g + 0{,}9\,\frac{v^2}{a}} + 0{,}08\,a = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{8{,}59^2}{31{,}25 + 0{,}9\cdot\frac{6{,}95^2}{7}} + 0{,}08 \,.\, 7$$

$$= \tfrac{2}{3}\cdot\frac{73{,}79}{37{,}46} + 0{,}56 = 1{,}31 + 0{,}56 = 1{,}87 \text{ Fuß},$$

wofür vielleicht 1,90 Fuß zu nehmen ſein möchte.

Die Strahldicke iſt

$$d_1 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) d\cos.\alpha = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{1{,}90}{14}\right) . 1{,}90\cos. 20^0 = 0{,}216 \,.\, 1{,}90 \,.\, 0{,}94$$

$$= 0{,}410 \,.\, 0{,}94 = 0{,}385 \text{ Fuß},$$

und die Radweite:

$$e = \frac{Q}{d_1\,c} = \frac{24}{0{,}385 \,.\, 14{,}78} = 4{,}22 \text{ Fuß}.$$

Der Halbmeſſer der Schaufelkrümmung mißt:

$$r = \frac{d}{\cos.\beta} = \frac{1{,}90}{\cos. 36^0\,2'} = 2{,}35 \text{ Fuß},$$

und für den entſprechenden Centriwinkel φ hat man:

$$sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi = \sqrt{\cos.\beta} = \sqrt{\cos. 36^0\,2'} = 0{,}8993,$$

hiernach:

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi = 64^0\,4' \quad \text{und} \quad \varphi = 128^0\,8',$$

Nun folgt genauer:

$$\lambda = \frac{v}{a} \cdot \frac{9\varphi + sin.\varphi}{16} \sqrt{\frac{r}{g + 0{,}9\frac{v^2}{a}}}$$

$$= \frac{6{,}95}{7} \cdot \frac{9 \,.\, 2{,}236 + 0{,}787}{16} \sqrt{\frac{2{,}35}{37{,}46}} = 1{,}30 \,.\, 0{,}251 = 0{,}327 \text{ oder} = 19 \text{ Grad.}$$

Nimmt man den Abſtand zwiſchen je zwei Schaufeln, am äußeren Radumfange gemeſſen, = 1 Fuß an, ſo erhält man die erforderliche Schaufelzahl:

$$n = 2\pi a = {}^{44}/_{7} \,.\, 7 = 44;$$

wofür der leichten Vertheilung wegen 48 zu ſetzen ſein möchte.

Das disponible Arbeitsquantum iſt:

$$L = Qhy = 24 \,.\, 4{,}5 \,.\, 61{,}75 = 6669 \text{ Fußpfund,}$$

und die theoretiſche Leiſtung dieſes Rades:

$$L_1 = \frac{c^2}{2g} cos.\alpha^2 \,.\, Qy = 0{,}016 \,.\, 14{,}78^2 \,.\, (cos.\,20)^2 \,.\, 24 \,.\, 61{,}75 = 4579 \text{ Fußpfund,}$$

folglich der Wirkungsgrad deſſelben:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{4579}{6669} = 0{,}686.$$

Verſuche an Ponceleträdern. Ueber die Leiſtungen der Ponceleträder hat Poncelet ſelbſt Verſuche angeſtellt; es ſind dieſelben in der oben citirten Abhandlung genau beſchrieben und deren Reſultate aufgezeichnet. Die erſten Verſuche nahm Poncelet an einem Modellrade von $^1/_2$ Meter Durchmeſſer oder ungefähr $^1/_6$ der natürlichen Größe vor. Es war ganz aus Holz gefertigt und hatte zwanzig krumme Holzſchaufeln von $2^1/_2$ Millimeter Dicke, 65 Millimeter Breite und 76 Millimeter Länge. Die Wirkung dieſes Rades beſtimmte er wie Boſſut, Smeaton u. A. mit Hülfe eines Gewichtes, welches durch einen ſich um die Welle des Rades umwickelnden Bindfaden aufgehoben wurde. Die größten Leiſtungen ergaben ſich, der Theorie entſprechend, wenn die Radgeſchwindigkeit 0,5 der Waſſergeſchwindigkeit war, und der Wirkungsgrad betrug in dieſem Falle 0,42 bis 0,56; erſteres bei kleinerer, letzteres aber bei größerer Dicke des Waſſerſtrahles oder ſtärkerer Füllung der Zellen. Wenn man nicht das Gefälle, ſondern die Geſchwindigkeitshöhe des ankommenden Waſſers als maßgebend anſieht, ſo ſtellt ſich der Effect 0,65 bis 0,72 heraus. Später hat Poncelet noch Verſuche an einem Rade in natürlicher Größe mit einem Bremsdynamometer angeſtellt und iſt dabei zu Ergebniſſen gelangt, welche von den eben angeführten nur wenig abweichen. Dieſes Rad hat 11 Fuß (pariſ. Maß) Durchmeſſer und dreißig blecherne Schaufeln von 2 Millimeter Dicke. Die Radkränze waren, wie die Arme und Wellen, von Holz, und es betrug ihre Breite 14 Zoll, ihre Dicke 3 Zoll, und die Entfernung derſelben von einander, oder die Radweite, 28 Zoll. Bei einer mittleren Druckhöhe von 1,3 Meter, einer Strahlhöhe von 0,2 Meter und einem Geſchwindigkeitsverhältniſſe von 0,52 ſtellt ſich auch hier ein Wirkungsgrad von 0,52 heraus, der ſich aber §. 226

auf 0,60 ſteigert, wenn man die Geſchwindigkeitshöhe ſtatt des ganzen Gefälles einführt. Poncelet zieht aus ſeinen Verſuchsreſultaten folgende Folgerungen.

Das vortheilhafteſte Geſchwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c}$ iſt 0,55, kann aber 0,50 bis 0,60 betragen, ohne eine bedeutend kleinere Wirkung zu geben. Der Wirkungsgrad iſt für Gefälle von 2 bis 2,3 Meter, $\eta = 0{,}5$; für Gefälle von 1,5 bis 2,0 Meter, $\eta = 0{,}55$, und für Gefälle unter 1,5 Meter, $\eta = 0{,}60$. Es berechnet ſich hiernach die Nutzleiſtung im erſten Falle:
$Pv = 122{,}3\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2{,}53\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund,
im zweiten:
$Pv = 132{,}5\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2{,}74\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund,
im dritten:
$Pv = 142{,}7\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2{,}95\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund.

Noch giebt Poncelet einige Regeln für die Anordnung eines unterſchlägigen Waſſerrades mit krummen Schaufeln, welche er ebenfalls aus ſeinen Beobachtungen folgert. Die Entfernung je zweier Schaufeln, am äußeren Umfange gemeſſen, ſoll nur 0,20 bis 0,25 Meter, der Radhalbmeſſer aber ſoll nicht unter 1 und nicht über 2,5 Meter betragen; die Axe des Waſſerſtrahles ſoll dem Umfange des Rades unter einem Winkel von 24° bis 30° begegnen, und noch ungefähr 3° gegen den Horizont geneigt ſein. Uebrigens ſoll der Abfall hinreichend hoch ſein, damit das Waſſer ungehindert aus dem Rade treten kann, und es darf der Spielraum des Rades im Kropfe nur 1 Centimeter betragen. Einige dieſer Verhältniſſe ſind jedoch nicht weſentlich, und andere laſſen ſich ſicherer durch die Formel des vorigen Paragraphen ermitteln. Nach den Verſuchen wächſt noch der Wirkungsgrad mit der Strahldicke; da aber mit letzterem unter übrigens gleichen Verhältniſſen die Füllung der Zellen zunimmt, ſo folgt noch die in gewiſſen Grenzen einzuſchränkende Regel, daß die Füllung der Schaufeln eine große ſein ſoll. Unter 0,1 Meter Höhe iſt übrigens nach Poncelet die Strahlhöhe nie zu machen.

§. 227 **Neue Verſuche an Ponceleträdern.** In der neueren Zeit hat auch Morin Verſuche an Ponceleträdern angeſtellt, hierzu drei hölzerne und ein eiſernes Rad benutzt, und dabei ein Bremsdynamometer in Anwendung gebracht. Sie wurden vorzüglich in der Abſicht gemacht, um den Nutzen eines neuen, von Poncelet vorgeſchlagenen krummlinigen Waſſereinlaufes zu erproben, nächſtdem aber auch, um ſich genauere Kentniſſe über den Einfluß der Dimenſionsverhältniſſe auf die Leiſtung zu verſchaffen, da ſich bei mehreren Ausführungen ergeben hatte, daß die Dimenſionen der nach Poncelet's Regel conſtruirten Räder zu klein waren, namentlich aber

bei Abweichung von der mittleren Geſchwindigkeit des Rades eine zu kleine Leiſtung gaben, weil das Waſſer innen überſchlug (ſ. Comptes rendus, 1845, T. XXII, und polytechn. Centralblatt, Bd. VIII, 1846).

Die drei hölzernen Verſuchsräder hatten 1,6 Meter, 2,4 Meter und 3,2 Meter, das eiſerne Rad aber 2,8 Meter Höhe, die Schaufeln waren bei allen drei Rädern von Blech. Die erſten drei Räder hatten 0,4, das letztere aber 0,8 Meter Weite, und alle vier hatten eine Tiefe oder Kranzbreite von 0,75 Meter. Ein beſonderer Uebelſtand ſtellte ſich aber bei den hölzernen Rädern dadurch heraus, daß ſie wegen ihres kleinen Trägheitsmomentes ſehr ungleichförmig gingen und eben dadurch viel Waſſer nach innen verſpritzten. Das kleinſte Rad ging beſonders ſehr ungleichförmig und gab bei dem Gefälle von 0,45 bis 0,55 Meter, und wenn die Zellen mindeſtens zur Hälfte gefüllt waren, nur den Wirkungsgrad 0,485; bei größerem Gewichte würde es vielleicht 0,55 Wirkungsgrad gegeben haben. Bei dem mittleren Rade wurde dieſer mit einem Gefälle von 0,75 Meter, 0,60 bis 0,62 gefunden. An dem dritten Rade wurden Verſuche bei verſchiedenen Schaufelbreiten angeſtellt. Es zeigte ſich, daß bei einem Gefälle von 0,56 Meter die Kranzbreite 0,43 Meter, und bei einem Gefälle von 0,7 Meter, die von 0,59 Meter noch zu klein war. Noch wurden an dieſem Rade Verſuche über die Wirkung des von Poncelet vorgeſchlagenen (in §. 222 beſchriebenen) Gerinnes angeſtellt, und damit nicht nur ein größerer Wirkungsgrad erlangt, ſondern auch gefunden, daß der Faſſungsraum bis $^3/_2$ herabſinken konnte, ehe das Waſſer innen überſchlug.

Was endlich noch die Verſuche mit dem aus 42 Schaufeln beſtehenden eiſernen Rade betrifft, ſo wurden dieſe bei 1,2 bis 1,4 Meter Gefälle angeſtellt, wobei das Rad frei ging, ſowie bei 0,9 Meter Gefälle, wobei es 0,36 Meter tief im Waſſer watete. Bei den Schützenzügen von 0,15 Meter, 0,2 Meter, 0,25 Meter und 0,277 Meter betrugen die Maxima des Wirkungsgrades: 0,52; 0,57; 0,60 und 0,62; und bei Schwankungen der Umdrehungszahlen innerhalb der Grenzen 12 bis 21, 13 bis 21, 11 bis 20 und 12 bis 19 entfernten ſich die Wirkungsgrade nur $^1/_{13}$, $^1/_{14}$, $^1/_{12}$ und $^1/_9$ von den Maximalwerthen. Aus den Reſultaten dieſer Verſuche folgt, daß bei einem Rade mit dem gekröpften Einlauf die Wirkung durch die Formel

$$Pv = 0{,}871 \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) Q\gamma$$

ausgedrückt werden kann, daß ferner das vortheilhafteſte Geſchwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c} = 0{,}50$ bis $0{,}55$ iſt, daß das Waſſer dieſelbe Wirkung giebt es mag der Unterwaſſerſpiegel 0,12 Meter unter oder 0,20 bis 0,25 Meter über dem Radtiefſten ſtehen; daß endlich der Wirkungsgrad bis auf 0,46

herabſinkt, wenn das Rad 0,357 Meter tief oder mit der halben Kranzbreite im Waſſer watet. Der Hauptnutzen dieſes neuen Gerinnes beſteht nun darin, daß ſich ein Rad mit dieſem Gerinne in weiteren Geſchwindigkeitsgrenzen bewegen kann, ohne viel von ſeiner Nutzleiſtung zu verlieren. Uebrigens findet Morin für Gefälle von 0,9 bis 1,3 Meter am angemeſſenſten, die Kranzbreite der Hälfte des Radhalbmeſſers gleich und den Faſſungsraum noch einmal ſo groß zu machen, als den Raum, den das Waſſer eigentlich beanſprucht, d. i. den Füllungscoefficienten $\varepsilon = 1/2$ in Anwendung zu bringen.

Neuere Verſuche ſind auch von Marozeau an einem Poncelet-rade mit drei Abtheilungen angeſtellt worden (ſ. Bulletin de Mulhouse 1846, oder polytechniſches Centralblatt, Jahrgang 1848). Dieſes Rad hatte eine Höhe von 4,4 Meter, eine lichte Weite von $3 \cdot 0{,}67 = 2$ Meter und eine Kranzbreite von 0,75 Meter und nahm bei 1,5 Meter Gefälle pr. Secunde 500 bis 1000 Litres Aufſchlagwaſſer auf. Der größte Wirkungsgrad wurde hier 0,669 gefunden, und zwar dann, wenn das Waſſer in allen drei Abtheilungen zugleich floß. Der Wirkungsgrad wurde jedoch kleiner, wenn das Rad 0,1 Meter im Unterwaſſer badete.

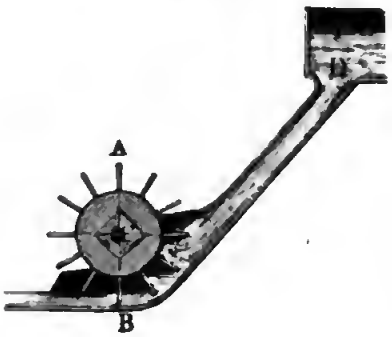
Neuere und ſehr intereſſante Verſuche ſind vom Herrn Capitain O. de Lacolonge an einem Ponceletrade in der Pulvermühle zu Angoulême (1847) angeſtellt worden (ſ. le Génie Industrielle par Armengaud Frères, Paris 1854). Dieſes Rad hatte einen Halbmeſſer von 4,8 Meter, eine Weite ſowie eine Kranzbreite von 1,00 Meter, und machte bei einer Leiſtung von 10 Pferdekräften circa zehn Umdrehungen pr. Minute. Der Wirkungsgrad dieſes Rades ſtieg bei dem Geſchwindigkeitsverhältniſſe $\frac{v}{c} = 0{,}579$, wobei das Gefälle 1,56 Meter und die Höhe der Schützenmündung 0,25 Meter betrug, auf 0,678. Das Waſſer wurde dem Rade durch ein nach der Kreisevolvente conſtruirtes Gerinne zugeführt und trat $26\frac{1}{2}$ Grad oberhalb des Radtiefſten ſo in das Rad ein, daß ſeine relative Bewegung auf der Schaufel in horizontaler Richtung begann. Der Füllungscoefficient war ſehr klein, nämlich bei der vortheilhafteſten Wirkung, $\varepsilon = 1/3$. Die angegebene Leiſtung des Rades ſteigerte ſich noch etwas (auf 0,755), wenn das Rad bis auf $1/3\,h$ unter dem Waſſer watete; dieſes Verhältniß, welches auf eine beſſere Ausnutzung der Kraft hindeutet, hat man auch ſchon bei andern mittelſchlägigen Rädern beobachtet (ſ. die Bremsverſuche an einem Kropfrade von Hülße und Brückmann im polytechniſchen Centralblatte, Jahrgang 1851).

§. 228 **Kleine Waſſerräder.** Man hat zuweilen auch noch andere verticale Waſſerräder angewendet, welche ſich keinem der eben abgehandelten Radſyſteme bei-

zählen lassen; namentlich giebt es noch sehr kleine Räder, welche kaum einige Fuß Höhe haben und durch den Druck oder Stoß des Wassers in Bewegung gesetzt werden. Diejenigen, welche sich an die bereits abgehandelten Systeme noch am meisten anschließen, mögen hier noch ihren Platz finden, anderer aber wird aus besonderen Gründen, erst in dem folgenden Capitel gedacht werden.

D'Aubuisson beschreibt in seiner Hydraulik kleine Stoßräder, wie

Fig. 445.



ACB, Fig. 445, mit hohem Gefälle von 6 bis 7 Meter, welche in den Pyrenäen häufig angewendet werden. Diese Räder sind nur $2\frac{1}{2}$ bis 3 Meter hoch und haben vierundzwanzig etwas ausgehöhlte Schaufeln. Ihre Wirkung soll nach d'Aubuisson $\frac{2}{3}$ von der eines oberschlägigen Rades bei gleichem Gefälle sein. Es ist übrigens die Leistung eines solchen Rades nach der oben entwickelten Theorie der Kropfräder zu berechnen, denn es sind diese Räder eigentlich nur Kropfräder mit einem großen Stoß- und einem kleinen Druckgefälle. Um das Verspritzen des Wassers so viel wie möglich zu verhindern, wird das Rad in einen Kropf mit genau anschließenden Seitenwänden gehängt. Uebrigens läßt sich bei Anwendung mehrerer solcher Räder unter oder neben einander, wenn das Wasser von einem Rade auf das andere tritt, noch ein hoher Wirkungsgrad erlangen (s. Bd. II, §. 217). Auch kann man diese Räder noch niedriger und aus Eisen herstellen. In den Alpen kommen solche Räder bei Mühlen und Hammerwerken sehr häufig vor.

Ein oberschlägiges Hammerrad mit einem großen Stoßgefälle ist in

Fig. 446.

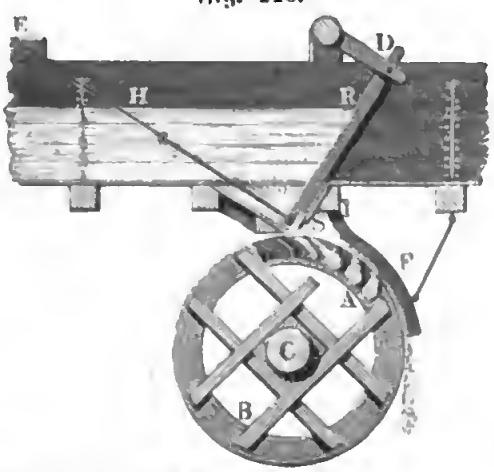


Fig. 446 abgebildet. Es ist *ERD* das Aufschlaggerinne, *SD* die Schütze, *ACB* das Rad und *F* ein Mantel um dasselbe, welcher das zu zeitige Austreten des Wassers verhindert.

Ein anderes Rad, Fig. 447 (a. f. S.), wird im „Technologiste", Septbr. 1845, und auch im polytechnischen Centralblatte,

Bd. VII, 1846, beſchrieben. Während bei obigen Rädern das Waſſer vorzüglich nur durch Stoß wirkt, bringt dieſes ſeine Leiſtung nur durch Druck hervor. Dieſes Rad wurde von dem Ingenieur Mary erbaut, und ſein Wirkungsgrad wurde von Belanger bei 1,3 Meter Umfangsgeſchwindigkeit, 0,75 bis 0,85, alſo ſehr hoch gefunden. Es hat daſſelbe nur einen aus Eiſenblech gebildeten Kranz von 0,3 Meter Breite, 0,12 Meter Dicke und 2,28 Meter Durchmeſſer, und beſteht aus ſechs elliptiſchen, durch Rippen verſtärkte Blechſchaufeln. Uebrigens hängt dieſes Rad in einem ſehr genau anſchließenden Gerinne, und an den Radkranz ſehr nahe anſchließende Eiſenplatten DE ſperren das Oberwaſſer O von dem Unterwaſſer U ziemlich genau ab, indem ſich der Radkranz in dem zwiſchen dieſen Platten befindlichen Spalt bewegt. Die Kraft, mit welcher ein ſolches Rad umläuft, iſt jedenfalls das Product aus dem Niveauabſtande beider Waſſerſpiegel, dem Querſchnitte einer Schaufel, und der Dichtigkeit des Waſſers.

Fig. 447.

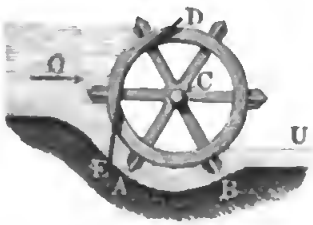
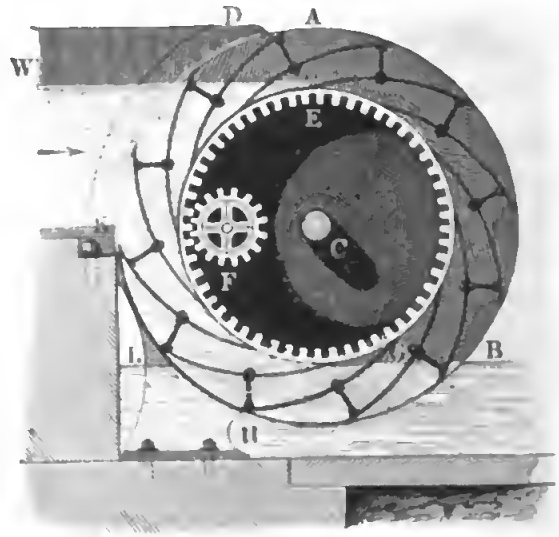


Fig. 448.

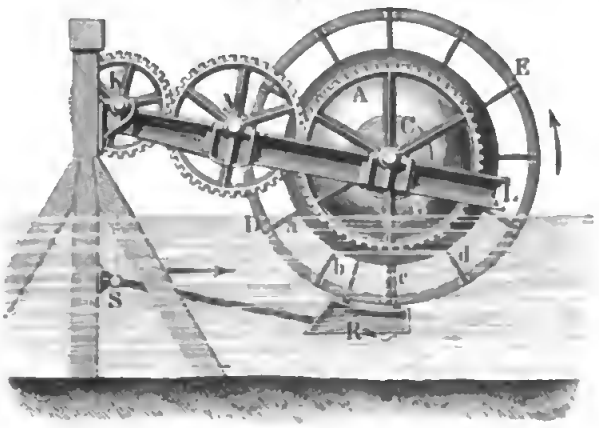


Ein anderes ähnliches, jedoch noch vollkommeneres Rad iſt das Zupinger'ſche, in Fig. 448. Dieſes Rad hat nur einen Kranz AB und langgedehnte Blechſchaufeln, welche entweder nur auf einer oder auf beiden Seiten des Kranzes aufſitzen, und iſt mit einem eiſernen Mantel $DEFGHK$ umgeben, welcher das Aufſchlagwaſſer W dem Rade nicht allein von vorn, ſondern auch von der Seite zuführt und daſſelbe ſo lange im Rade zurückhält, bis die unterſte Schaufel GH aus demſelben hervortritt. Das bei W zutretende und innerhalb des Mantels im Rade niederſinkende Waſſer fließt nun längs GH unter dem Unterwaſſerſpiegel BL ab, und tritt dabei ſein ganzes Arbeitsvermögen an das Rad ab. Bei der Herſtellung eines ſolchen Rades iſt dafür zu ſorgen, daß die innere Radhöhe gleich dem Gefälle ausfalle, daß ferner die untere Mündung des Mantels der unterſten Schaufel

entſpreche und unter den Unterwaſſerſpiegel falle, und daß der Spielraum zwiſchen dem Rade und dem Mantel möglichſt klein ſei. Ein ſolches Rad iſt bei ganz kleinen Gefällen noch anwendbar, und giebt hierbei noch einen ſehr hohen Wirkungsgrad (75 bis 80 Procent). S. Gewerbeblatt für Würtemberg 1855, auch polytechniſches Centralblatt 1855.

Eine eigenthümliche Conſtruction hat das ſchwimmende Waſſerrad vom Herrn Colladon in Genf. Daſſelbe hängt wie ein Schiffmühlenrad im unbegrenzten Strome, und beſteht in der Hauptſache aus einem auf dem Waſſer ſchwimmenden Blechkeſſel AB, Fig. 449, auf deſſen Umfang lange, unter einander durch eiſerne Reifen DE verbundene Blechſchaufeln $a, b, c, d \ldots$ feſtſitzen. Um die Umdrehungsbewegung dieſes Rades auf eine feſtliegende Welle K überzutragen, iſt die Welle C deſſelben auf zwei um K drehbare Hebel, wie KL, gelagert, und ſind dieſe Wellen mit Zahnrädern ausgerüſtet, welche entweder unmittelbar in einander eingreifen, oder durch ein drittes ebenfalls auf KL gelagertes Rad M auf einander wirken (vergl. §. 212). Um die Wirkung des an die Schaufeln $b, c \ldots$ anſchlagenden Waſſers zu vergrößern, iſt noch unter dem Rade ein Kropf R aufgehangen, welcher je nach dem Stande des Waſſers mit dem Rade zugleich ſteigt und ſinkt, ſo daß beide immer in derſelben Tiefe unter dem Waſſer bleiben. Die feſte Welle K iſt, wie die Axe S des Kropfes oder hängenden Gerinnes R, an zwei Paar Säulen befeſtigt. Man ſieht, daß durch die Eintauchung des Radkörpers eine Querſchnittsverminderung des Waſſerſtromes entſteht, welche eine für die Wirkung des Rades vortheilhafte Vergrößerung der Geſchwindigkeit des ſtoßenden Waſſers zur Folge hat.

Fig. 449.



Schlußanmerkung. Die Literatur über verticale Waſſerräder iſt allerdings ſehr ausgedehnt; doch verdienen nur wenige Schriften über dieſe Maſchinen einer größeren Beachtung, da die meiſten derſelben nur oberflächliche und einige ſogar ziemlich unrichtige Theorien über Waſſerräder abhandeln. In Eytelwein's Hydraulik ſind die Waſſerräder nur ganz allgemein abgehandelt, Vollſtändigeres, namentlich über die Theorie unterſchlägiger Waſſerräder, findet man in Gerſtner's Mechanik. Wenig Brauchbares findet man in Langsdorf's Hydraulik oder in deſſen Syſtem der Maſchinenkunde. Ziemlich ausführlich, namentlich über die oberſchlägigen Waſſerräder, handelt d'Aubuiſſon in ſeiner

Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. Navier handelt in ſeinen Applications de la Mécanique nur ganz allgemein von den verticalen Waſſerrädern, ausführlicher aber in der von ihm beſorgten Ausgabe vom erſten Bande der Architecture hydraulique von Belidor. In dem deutſch unter dem Titel Lehrbuch der Anwendung der Mechanik erſchienenen Cours de Mécanique appliquée von Poncelet wird die Theorie der Waſſerräder in gedrängter Kürze, jedoch ziemlich gründlich abgehandelt. Ueber die Leiſtungen und Regeln zur Conſtruction von Waſſerrädern findet man auch das Nöthigſte in Morin's Aide-mémoire de Mécanique pratique. In dem Treatise on Manufactures and Machinery of Great-Britain, of P. Barlow, iſt wenig über Theorie, mehr über die Einrichtung der Waſſerräder geſagt. Vollſtändige Beſchreibungen und gute Zeichnungen von Waſſerrädern findet man in Armengaud's Traité pratique des moteurs hydrauliques et à vapeur, ſowie auch in den neueren Bänden ſeiner Publication industrielle. Gute Zeichnungen und Zeichnungen von Waſſerrädern enthält auch die Maſchinenkunde ꝛc. von Sebaſtian Haindl. Das vorzüglichſte Werk über verticale Waſſerräder iſt aber Redtenbacher's Theorie und Bau der Waſſerräder, welches mit 6 kleinen und 23 großen lithographirten Tafeln 1846 in Mannheim erſchienen iſt. Poncelet's und Morin's Memoiren über die Wirkungen verticaler Waſſerräder (ſ. oben §. 221 und §. 197) bilden ein wichtiges Element in der Literatur über verticale Waſſerräder. Von den kleinen Hammerrädern iſt ausführlich die Rede in Tunner's Darſtellung der Stabeiſen- und Rohſtahl-Bereitung, Grätz 1845. Von den Waſſerrädern handelt auch Morin's Leçons de Mécanique, pratique, Part. II. Ebenſo: Band II von Redtenbacher's Maſchinenbau, Mannheim 1863, und Band I von Rühlmann's allgemeiner Maſchinenlehre. Ein Waſſerrad mit ſchrägen Schaufeln von Delneſt iſt beſchrieben in Dingler's polytech. Journal Bd. 173.

Fünftes Capitel.

Von den horizontalen Waſſerrädern.

§. 229 **Turbinen.** Bei den horizontalen oder um eine verticale Axe umlaufenden Waſſerrädern wirkt das Waſſer entweder durch Stoß, oder durch Druck, oder durch Reaction, nie aber unmittelbar durch ſein Gewicht. Man unterſcheidet daher auch horizontale Stoß-, Druck- und Reactionsräder von einander. Sehr gewöhnlich nennt man auch die horizontalen Waſſerräder überhaupt Turbinen oder Kreiſelräder (franz. und engl. turbines), zuweilen giebt man aber nur einer gewiſſen Claſſe von Reactionsrädern den Namen Turbinen. Die Stoßräder ſind mit ebenen oder ausgehöhlten Schaufeln ausgerüſtet, auf die das Waſſer mehr oder weniger rechtwinklig aufſchlägt; die Druckräder hingegen haben krumme Schaufeln, an welchen das Waſſer bloß hinläuft; die Reactionsräder endlich be-

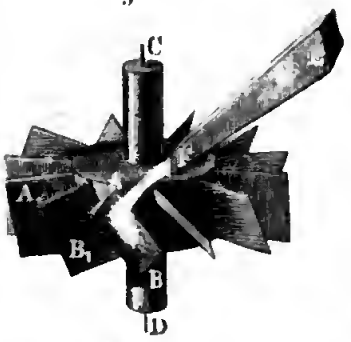
stehen aus einem Röhrenapparate, aus welchem das Wasser mehr oder weniger tangential ausfließt. Die Druck- und Reactionsräder sind in ihrer Construction einander sehr ähnlich, jedoch unterscheiden sie sich dadurch wesentlich von einander, daß bei den Druckrädern die Zellen oder Canäle zwischen je zwei Schaufeln vom Wasser nicht ganz ausgefüllt werden, bei den Reactionsrädern aber das Wasser durch die Canäle oder Röhren mit gefülltem Querschnitte hindurchströmt. Während sich bei den Stoßrädern das Wasser nach allen Seiten hin auf den Schaufeln ausbreitet, strömt es bei den Druck- und Reactionsrädern nur nach einer Seite hin. Nach den verschiedenen Richtungen, in welchen sich das Wasser in den Canälen der letzteren Räder bewegt, hat man zwei Hauptsysteme von Druck- und Reactionsrädern; entweder ist die relative Bewegung des Wassers in den Canälen eine horizontale, oder sie ist eine gegen den Horizont geneigte, meist in einer Verticalfläche vor sich gehende Bewegung. Im ersten Systeme ist aber wieder zu unterscheiden, ob das Wasser von innen nach außen, oder von außen nach innen strömt; im zweiten, ob es von oben nach unten oder von unten nach oben fließt. Meist erfolgt die Bewegung entweder nur von innen nach außen, oder von oben nach unten; im ersten Falle kommt die Centrifugal- und im zweiten die Schwerkraft der Bewegung zu Hülfe.

Horizontale Wasserräder, bei welchen das Wasser von oben nach unten abfließt, nennt man wohl auch Danaiden.

Stossräder. Die einfachsten, jedoch auch unvollkommensten horizontalen Wasserräder sind die sogenannten Stoßräder oder Stoßturbinen, wie *A CD*, Fig. 450. Sie bestehen aus 16 bis 20 rectangulären Schaufeln *AB*, A_1B_1 u. s. w., welche so auf den Radkörper aufgesetzt sind, daß sie 50 bis 70 Grad Neigung gegen den Horizont erhalten. Das Wasser wird ihnen durch ein pyramidales Gerinne *EF* von 40 bis 20 Grad Neigung so zugeführt, daß es ziemlich winkelrecht auf die Schaufeln aufschlägt. Man wendet diese Räder bei 10 bis 20 Fuß Gefälle und dann an, wenn eine große Umdrehungszahl erfordert wird, wie z. B. bei Mahlmühlen, wo man den beweglichen Mühlstein oder sogenannten Läufer auf die Welle des Rades aufsetzt, so daß man Vorgelege oder besondere Zwischenmaschinen gar nicht nöthig hat. Vorzüglich kommen diese Räder in dem südlichen Europa und im nördlichen Afrika, zumal aber in den Alpen und Pyrenäen und in Algier vor. Man giebt ihnen ungefähr 5 Fuß Durchmesser, sowie ihren Schaufeln 15 Zoll Höhe und 8 bis 10 Zoll Länge (radial gemessen).

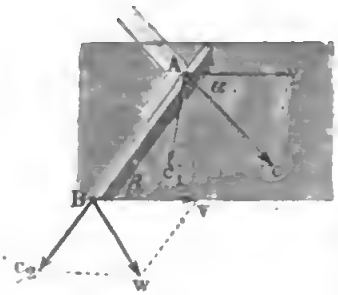
§. 230

Fig. 450



Die Leiſtung dieſer Räder iſt nach der Theorie des Waſſerſtoßes auf folgende Weiſe zu ermitteln. Die Geſchwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 451, des aufſchlagenden Waſſers und die Geſchwindigkeit $\overline{Av} = v$ der Schaufeln und in eine Geſchwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$, welche in Folge des Stoßes die Richtung der Schaufel annimmt. Unter der Vorausſetzung, daß das Waſſer das Ende B der Schaufel mit dieſer relativen Geſchwindigkeit $\overline{Bc_2} = c_2$ läßt ſich durch Vereinigung derſelben mit der Geſchwindigkeit $\overline{Bv} = v$ der umlaufenden Schaufel die abſolute Abflußgeſchwindigkeit w des Waſſers beſtimmen. Wenn die Bewegungsrichtung Av der Schaufel den Winkel $cAv = \alpha$ mit der Richtung Ac des einfallenden Waſſers einſchließt, ſo hat man für die Geſchwindigkeit c_1, mit welcher das Waſſer an der Schaufel AB hinläuft

Fig. 451.



$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha,$$

und wenn die Bewegungsrichtung von der Schaufelrichtung um den Winkel $ABv = \beta$ abweicht, ſo iſt für die abſolute Geſchwindigkeit w des abfließenden Waſſers:

$$w^2 = c_2^2 + v^2 - 2c_2 v\cos.\beta, \text{ oder wenn man } c_2 = c_1 \text{ annimmt,}$$
$$w^2 = c^2 + 2v^2 - 2v(c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta)$$
$$= c^2 + 2v(v - (c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta)).$$

Mit Hülfe dieſer Größe beſtimmt ſich nun das Arbeitsvermögen, welche das mit der Geſchwindigkeit c zufließende Waſſerquantum Q dem Rade mittheilt:

$$L = \left(\frac{c^2 - w^2}{2g}\right) Q\gamma$$
$$= \frac{v(c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta - v)}{g} Q\gamma, \text{ oder, wenn man noch}$$
$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} \text{ einführt,}$$
$$L = \frac{(c\cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha}\,.\cos.\beta - v)v}{g} Q\gamma.$$

Damit das Waſſer nach dem Anſtoße an der Schaufel AB herablaufe, iſt nöthig, daß der Winkel BAc_1, welchen der Strahl Ac_1 nach dem Stoße mit der Schaufel AB einſchließt, kleiner als 90 Grad ſei. Bezeichnen wir den Neigungswinkel Ac_1c durch θ, ſo iſt $BAc_1 = \theta - \beta$, und daher $\theta - \beta < 90^0$, oder

$$\theta < 90^0 + \beta, \text{ alſo auch}$$

$tang.\theta < tang.(90^0 + \beta)$, d. i. $cotang.\beta < -tang.\theta$
oder $tang.\beta > -cotang.\theta$ zu fordern.

Nun iſt aber $cotang.\theta = \frac{c\,cosin.\alpha - v}{c\,sin.\alpha}$, daher folgt die Bedingung

$$tang.\beta > \frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}.$$

Um eine möglichſt große Leiſtung zu erhalten, giebt man dem eintretenden Strahle nahe die Richtung der ausweichenden Schaufel, macht alſo α nahe $=$ Null. Da dann $cos.\alpha =$ Eins geſetzt werden kann, ſo folgt für dieſen Fall:

$$L = \left(\frac{c + (c-v)\,cos.\beta - v}{g}\right) v\,Q\gamma = \frac{(1 + cos.\beta)\,(c-v)\,v}{g}\,Q\gamma.$$

Nun fällt aber für einen kleineren Werth von α, $\frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}$ nahe unendlich groß aus; es iſt daher dann $tang.\beta = \infty$, und daher $\beta = 90^0$ zu machen, und die entſprechende Leiſtung des Rades

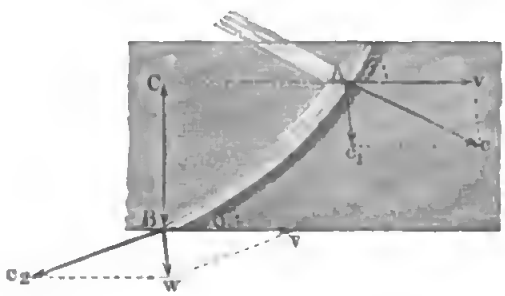
$$L = \frac{(c-v)\,v}{g}\,Q\gamma.$$

Dieſelbe iſt für $v = \frac{c}{2}$ ein Maximum und zwar $L = \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2g}Q\gamma$, alſo nur die Hälfte von dem Arbeitsvermögen des Aufſchlagwaſſers.

Stossräder mit krummen Schaufeln. Da der Formel: §. 231

$$L = \frac{(c\,cos.\alpha + \sqrt{c^2 + r^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha}\;.\;cos.\beta - v)\,v}{g}\,Q\gamma$$

Fig. 452.



zu Folge die Leiſtung eines Stoßrades um ſo größer ausfällt, je größer $cos.\beta$, je kleiner alſo der Austrittswinkel β iſt, ſo bringt man mit Vortheil ſtatt der ebenen Schaufeln, hohle Schaufeln wie AB, Fig. 452, zur Anwendung. Es iſt dann die Neigung β der Schaufel am Eintrittspunkte A eine andere als die Neigung δ an der Austrittsſtelle B, und kann daher durch β der obigen Gleichung $tang.\beta > \frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}$ Genüge gethan werden, ohne die durch die Formel

$$L = \frac{(c\cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha}.\cos.\delta - v)v}{g} Q\gamma$$

zu beſtimmende Leiſtung des Stoßrades zu beeinträchtigen. Macht man dann den Austrittswinkel ſehr klein, ſo läßt ſich $\cos.\delta = 1$, und daher

$$L = \frac{(c\cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} - v)v}{g} Q\gamma \text{ ſetzen.}$$

Die Geſchwindigkeit v der Schaufeln, bei welcher die Maximalleiſtung erlangt wird, iſt beſtimmt durch die Gleichung

$$c\cos.\alpha - 2v + \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} - \frac{v(c\cos.\alpha - v)}{\sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha}} = 0,$$

deren Auflöſung auf den Werth

$$v = \frac{c}{2\cos.\alpha} \text{ führt.}$$

Die dieſem Geſchwindigkeitswerthe entſprechende Maximalleiſtung des Rades iſt

$$L = \frac{c\cos.\alpha}{g''} \cdot \frac{c}{2\cos.\alpha} Q\gamma = \frac{c^2}{2g} Q\gamma.$$

Es wird alſo bei dieſem Gange des Rades das ganze disponible Arbeitsvermögen des Aufſchlagwaſſers gewonnen.

Iſt die Höhe $\overline{CB} = h_2$, von welcher das Waſſer während der Bewegung auf der Schaufel AB herabfällt, ein anſehnlicher Theil des ganzen Radgefälles, ſo hat man die relative Geſchwindigkeit mit welcher das Waſſer am Schaufelrade B ankommt,

$$c_2 = \sqrt{2gh_2 + c_1^2} \text{ zu ſetzen.}$$

Wendet man wieder einen ſehr kleinen Austrittswinkel δ an, ſo läßt ſich die abſolute Austrittsgeſchwindigkeit

$$w = c_2 - v = \sqrt{2gh_2 + c_1^2} - v \text{ ſetzen.}$$

Damit dieſelbe nahe Null ausfalle, folglich das ganze Arbeitsvermögen des Waſſers auf das Rad übergehe, iſt der Gleichung

$$v^2 = 2gh_2 + c_1^2$$
$$= 2gh_2 + c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha \text{ zu genügen,}$$

wonach

$$2cv\cos.\alpha = 2gh_2 + c^2, \text{ oder}$$
$$v = \frac{2gh_2 + c^2}{2c\cos.\alpha} \text{ folgt.}$$

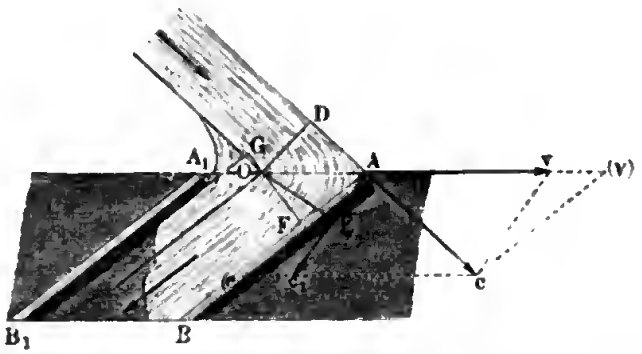
Iſt $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ das Gefälle, welches die Erzeugung der Geſchwindigkeit des Waſſers beim Eintritt in das Rad in Anſpruch nimmt, ſo hat man das ganze

Radgefälle $h = h_1 + h_2 = \frac{c^2}{2g} + h_2$, und daher die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades, wobei dasselbe das Arbeitsquantum $L = Q h \gamma$ liefert,

$$v = \frac{g h}{c \cos. \alpha}.$$

Bezeichnet d die Dicke OD, Fig. 453, des zutretenden Strahles und θ

Fig. 453.



den Winkel $OAE = Avc$, welchen die Richtung des in das Rad eintretenden Wasserstrahles Ac_1 mit der Bewegungsrichtung Av des Rades einschließt, so ist die Dicke des eintretenden Strahles

$$\overline{OE} = d_1 = \frac{cd}{c_1},$$

weil durch OD und OE in derselben Zeit eine und dieselbe Wassermenge strömt. Da die Schaufel AB nur die Richtung der Bewegung aus AE in AF umsetzt, die Geschwindigkeit derselben aber nicht abändert, so folgt, daß der Wasserstrahl auch mit der Dicke $\overline{FG} = \overline{OE} = d_1 = \frac{cd}{c_1}$ an der Schaufel AB hinläuft. Damit das Wasser ungehindert in das Rad eintreten und an dessen Schaufeln hinlaufen könne, ist nöthig, daß der Normalabstand zwischen den benachbarten Schaufeln AB und A_1B_1 mindestens dieser Strahldicke $FG = \frac{cd}{c_1}$ gleich sei, daß also das zuströmende Wasser nur einen Theil AO von der ganzen Mündung AA_1 oder dem Raume zwischen den Schaufeln AB und A_1B_1 einnehme.

Läßt man die Eintrittsgeschwindigkeit (c_1) mit der Schaufelrichtung zusammen fallen, macht man also $\theta = \beta$, so hat man $\frac{c}{c_1} = \frac{sin.\beta}{sin.\alpha}$, daher

$$d_1 = \frac{d \, sin.\beta}{sin.\alpha} = \overline{OF}.$$

In dieſem Falle ſchließt ſich der Waſſerſtrahl OFB im Rade unmittelbar an die Baſis AO des zutretenden Strahles an, und es kann daher die Schaufel A_1B_1 bis O der vorausgehenden Schaufel AB genähert werden. Da dieſes Bewegungsverhältniß nur bei einer beſtimmten Radgeſchwindigkeit $v = \frac{c\,sin.(\alpha+\beta)}{sin.\beta}$ ſtatt hat, ſo iſt d_1 noch etwas größer als $\frac{d\,sin.\beta}{sin.\alpha}$ zu machen, damit das Waſſer auch bei einer kleineren Umdrehungsgeſchwindigkeit ungeſtört in das Rad eintreten könne.

§. 232 Zu der Claſſe von Rädern, Stoßrädern mit krummen Schaufeln, gehören diejenigen, welche die Franzoſen rouets volants nennen, und über deren Wirkungen Piobert und Tardy Verſuche angeſtellt haben (ſ. Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical etc., par Piobert et Tardy, Paris 1840). Die Ergebniſſe dieſer Verſuche an einem Rädchen, wie Fig. 454, von 5 Fuß Durchmeſſer, 8 Zoll Höhe und 20 gekrümmten Schaufeln (Fig. 454) waren bei einem Gefälle von $4^1/_4$ Meter (vom Spiegel des Oberwaſſers bis Grundfläche des Rades gemeſſen) und bei einem Aufſchlag von 0,3 Cubikmeter pr. Secunde folgende:

Für $\frac{v}{c} = 0{,}72$, $\eta = 0{,}16$; für $\frac{v}{c} = 0{,}66$, $\eta = 0{,}31$, und für $\frac{v}{c} = 0{,}56$, $\eta = 0{,}40$.

Fig. 454.

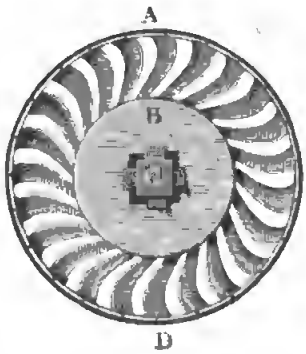
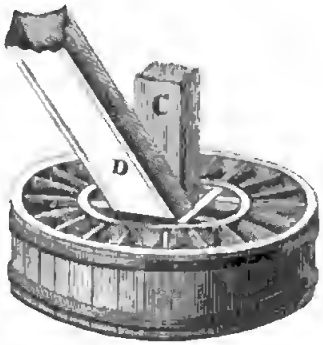


Fig. 455.



Man nennt die im vorigen Paragraphen abgehandelten Räder, bei welchen das Waſſer vorzüglich durch Druck wirkt, indem es an gekrümmten Schaufeln niederfließt, Borda'ſche Turbinen. Die Conſtruction ſolcher Turbinen führt Fig. 455 vor Augen. Der Verfaſſer hat das Original als Umtriebsmaſchine für ſechs Amalgamirfäſſer und ein anderes zum Umtriebe eines Mahlganges zu Huelgoat in der Bretagne geſehen. Die krummen Schaufeln waren aus drei Buchenholzbretchen zuſammengeſetzt, und zwiſchen aus Dauben zuſammengeſetzten Mänteln, wovon der äußere mit zwei eiſernen Ringen umgeben war, eingeſetzt. In Fig. 455 iſt AB eine Schaufel, C die Welle

und D der 45° geneigte Wassereinfallluttern. Der Durchmesser des Rades betrug $1\frac{1}{2}$ Meter, die 20 Schaufeln dieses Rades waren 0,36 Meter lang und 0,44 Meter hoch. Uebrigens machte das Rad bei einem Gefälle von 5 Metern, 40 Umdrehungen in der Minute.

Ueber die effectiven Wirkungen der Borda'schen Turbinen sind sichere Beobachtungen nicht bekannt. Borda giebt das Verhältniß der effectiven Leistung zur theoretischen 0,75 an.

Poncelet bemerkt sehr richtig, daß es zweckmäßig ist, den Rädern eine große Höhe und einen großen Durchmesser zu geben, und die Schaufeln weniger lang zu machen, also die beiden Mäntel oder Trommeln nicht weit von einander abstehen zu lassen. Durch die größere Radhöhe erlangt man ein kleineres Geschwindigkeitsgefälle, und daher auch kleinere Wasser- und Radgeschwindigkeiten, durch einen größeren Durchmesser erhält man eine kleinere Umdrehungszahl, und da bei einem größeren Rade bei gleichem Fassungsraume die Radweite eine kleinere sein kann, so erhält man auch dadurch kleinere Abweichungen in der Geschwindigkeit der neben einander niederfließenden Wasserfäden.

Beispiel. Welchen Aufschlag erfordert eine Borda'sche Turbine nach der Construction von Fig. 455, wenn dieselbe bei einem Gefälle von 15 Fuß zum Umtriebe eines Mahlganges eine Leistung von 3 Pferdekräften hervorbringen soll? Geben wir dem Rade $1\frac{3}{4}$ Fuß Höhe, so bekommen wir die theoretische Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = 7{,}906\sqrt{15 - 1{,}75} = 7{,}906\sqrt{13{,}25} = 28{,}75 \text{ Fuß}.$$

Führt man das Wasser unter 30° Neigung gegen den Horizont ein, so erhält man die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{gh}{c\cos.\alpha} = \frac{31{,}25 \,.\, 15}{28{,}75 \,.\, \cos. 30^0} = 18{,}83 \text{ Fuß}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher es an den Schaufeln niederzufließen anfängt, ist

$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} = \sqrt{c^2 + v^2 - 2gh} = \sqrt{v^2 - 2gh_2}$$
$$= \sqrt{18{,}83^2 - 2 \,.\, 31{,}25 \,.\, 1{,}75} = \sqrt{245} = 15{,}65 \text{ Fuß}.$$

Für den Winkel β, unter welchem der Schaufelkopf gegen den Horizont zu neigen ist, damit das Wasser ohne Stoß in das Rad eintrete, hat man hiernach $\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{c}{c_1}$, also:

$$\sin.\beta = \frac{28{,}75}{15{,}65}\sin. 30^0 = 0{,}9185,$$

folglich

$$\beta = 66\tfrac{3}{4}{}^0.$$

Geben wir noch dem Schaufelfuße eine Neigung $\delta = 25^0$ gegen den Horizont, so erhalten wir die absolute Geschwindigkeit des abfließenden Wassers:

$$w = 2v\sin.\frac{\delta}{2} = 2 \,.\, 18{,}83\sin. 12\tfrac{1}{2}{}^0 = 8{,}15 \text{ Fuß}$$

und daher die Leistung des Rades:

$$L = {}^3/_4 \left(h - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma = {}^3/_4 \left(15 - \frac{8{,}15^2}{2g}\right).61{,}75\, Q$$
$$= 46{,}31\ (15 - 1{,}063)\ Q = 645\ Q.$$

Damit dieſe die verlangten 3 Pferdekräfte = 1440 Fußpfund giebt, iſt demnach das Aufſchlagquantum

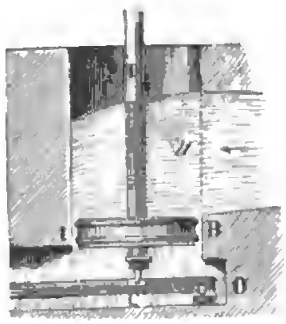
$$Q = \frac{1440}{645} = 2{,}23 \text{ Cubikfuß nöthig.}$$

Geben wir dem Rade einen mittleren Halbmeſſer (bis zur Schaufelmitte gemeſſen) von $1^1/_2$ Fuß, und machen wir den Waſſerraum $l = {}^1/_4$ Fuß weit, ſo erhalten wir den Inhalt der Querſchnitte ſämmtlicher Abflußöffnungen an der Grundfläche des Rades:

$F = 2\pi a l \sin.\delta = \pi . 3 . {}^1/_4 \sin. 25^0 = 2{,}356 . 0{,}4226 = 1{,}0$ Quadratfuß, welcher ſicherlich hinreicht, um pr. Secunde 2,23 Cubikfuß Waſſer mit 18,83 Fuß Geſchwindigkeit durchfließen zu laſſen.

§. 233 **Kufonräder.** Zu den Turbinen, bei welchen das Waſſer an krummen Schaufeln niederfließt, gehören noch die Kufenräder (franz. roues en cuves), welche noch häufig im ſüdlichen Frankreich vorkommen und ſchon von Belidor in ſeiner Architecture hydraulique beſchrieben worden ſind. Auch d'Aubuiſſon behandelt dieſe Räder ziemlich ausführlich in ſeiner Hydraulik. Endlich haben Piobert und Tardy in einer ſchon oben citirten Abhandlung (§. 231) die Reſultate der von ihnen angeſtellten Verſuche, welche allerdings keineswegs günſtig zu nennen ſind, mitgetheilt. Dieſe Räder (ſ. AB, Fig 456) weichen in ihrer Form von den oben betrachteten Stoßrädern (Fig. 454) nicht ab, ſie haben jedoch nur 1 Meter im Durchmeſſer und nur neun krumme Schaufeln; man ſetzt ſie nur aus zwei Stücken zuſammen und umgiebt ſie mit zwei eiſernen Reifen. Die Welle CD ruht mit ihrem Stifte C auf einem Hebel CO, um ſie heben oder ſenken zu können, wie es der aufſitzende Mühlſtein (hier nicht angegeben) erfordert. Dieſes Rad befindet ſich nahe am Fuße innerhalb eines cylindriſchen, 2 Meter hohen und 1,02 Meter breiten Schachtes AWB, und das Waſſer fließt durch ein ſich an das Rad tangential anſchließendes Gerinne zu, welches 3 bis 4 Meter Länge, anfänglich eine Breite von 0,75, zuletzt, bei der Einmündung in die ſchachtförmige Radſtube, aber nur noch eine ſolche von 0,25 Meter hat. Das Waſſer fließt mit einer großen Geſchwindigkeit zu, nimmt, in der Radſtube angelangt, eine drehende Bewegung an und wirkt nun ſtoßend und drückend gegen die Schaufeln des Rades, indem es in den Zwiſchenräumen zwiſchen den Schaufeln nach unten ſtrömt. Ein großer Theil des Waſſers kommt aber nur unvollkommen oder gar nicht zur Wirkung, indem er entweder in dem Zwiſchenraume zwiſchen Rad und

Fig. 456.



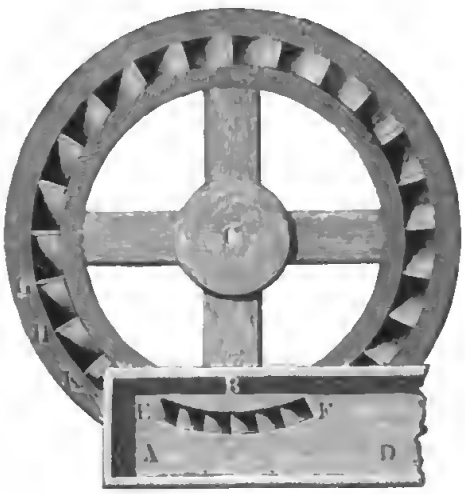
Schacht entweicht, oder beim Durchgang durch die weiten Schaufelräume nicht hinreichende Gelegenheit hat, ſeine Kraft auszuüben. Aus dieſem Grunde ſind auch die Wirkungsgrade dieſer Räder ſo ſehr klein. Bei den beſſeren Rädern in der Hospitalmühle zu Toulouſe fanden Piobert und Tardy den Wirkungsgrad höchſtens 0,27 und zwar bei einem Gefälle von 3 Meter, einem Aufſchlag von 0,45 Cubikmeter, und einer Umdrehungszahl $u = 100$. War unter übrigens gleichen Verhältniſſen die Umdrehungszahl $u = 120$, ſo ſtellte ſich $\eta = 0{,}22$ heraus und für $u = 133$ war η gar nur $= 0{,}15$. Die Räder in der ſogenannten Baſacle-Mühle gaben ihres ſchlechten Zuſtandes wegen, höchſtens $\eta = 0{,}18$.

D'Aubuiſſon berichtet, daß man bei neuen Ausführungen das Rad nicht in, ſondern unmittelbar unter den Schacht geſtellt und dafür etwas weiter gemacht hat als dieſen Raum; daß man auch das pyramidale Zuflußgerinne bedeutend abgekürzt und durch beides den Wirkungsgrad um $^1/_3$ erhöht hat. Wenn wir nun auch für dieſe Räder den Wirkungsgrad mit d'Aubuiſſon 0,25 ſetzen, ſo erhalten wir doch noch eine viel kleinere Leiſtung, als bei den oben betrachteten freiſtehenden Stoßrädern oder roues à buse, wie ſie d'Aubuiſſon nennt.

Burdin's Turbinen. Die Turbinen von Burdin, oder turbines à évacuation alternative, wie ſie Burdin ſelbſt nennt, ſind die vorzüglichſten der hierher (§. 231) gehörigen Räder. Sie ſind im Weſentlichen von den einfachen Borda'ſchen Turbinen nur dadurch verſchieden, daß bei ihnen das Waſſer an mehreren Punkten zugleich eintritt, und daß die Ausmündungen auf drei concentriſche Kreiſe vertheilt ſind. Die letztere Anordnung geſchieht deshalb, damit das mit einer ſehr kleinen abſoluten Geſchwindigkeit abfließende Waſſer dem Rade keine Hinderniſſe in ſeiner Umdrehung entgegenſetze. Das erſte Rad dieſer Art hat Burdin in der Mühle zu Pont-Gibaud aufgeführt, und in den Annales des Mines, III. Serie, T. III, beſchrieben. Fig. 457 ſtellt einen Grundriß dieſes Rades vor. *A B D* iſt der unmittelbar über dem Rade ſtehende Speiſebehälter, welcher auf der einen Seite mit dem Aufſchlaggerinne in Verbindung ſteht und im Boden eine Reihe *E F* von Mundſtücken hat, durch welche das Waſſer in einer geneigten Richtung in das Rad eingeführt wird. Das um die

§. 234

Fig. 457.

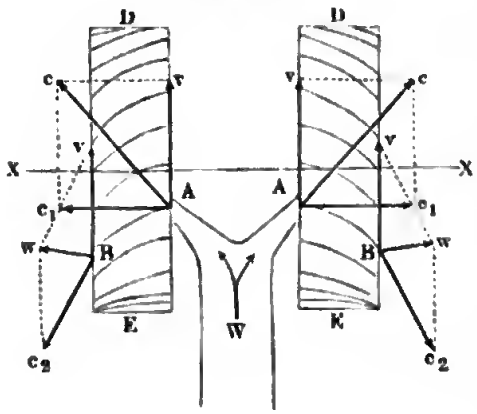


Axe C umlaufende Rad beſteht aus einer Reihe von Canälen, deren Einmündungen zuſammen einen ringförmigen Raum $GHK\ldots$ bilden, welcher ſich genau unter dem von den Mundſtücken gebildeten Bogen EF bewegt, ſo daß das Waſſer ungehindert aus dieſen in jene eintreten kann. Die Canäle (franz. couloirs) laufen oben ſenkrecht, unten aber ziemlich horizontal und beinahe tangential und zwar in drei verſchiedenen Kreiſen aus; es befindet ſich nämlich nur der dritte Theil ſämmtlicher Ausmündungen dieſer Canäle genau unter dem von den Einmündungen gebildeten Ringe $GHK\ldots$, das andere Drittel, wie z. B. H, mündet aber innerhalb, und das dritte Drittel, wie z. B. K, mündet außerhalb des gedachten Ringes aus.

Durch die Verſuche, welche an der Burdin'ſchen Turbine in Pont-Gibaud angeſtellt worden ſind, hat ſich bei einem Aufſchlag Q von 0,0935 Cubikmeter und einem Gefälle h von 3,24 Meter ein Wirkungsgrad $\eta = 0{,}67$ herausgeſtellt. Die vorher zu demſelben Zwecke angewendete Stoßturbine erforderte bei gleicher Leiſtung das dreifache Waſſerquantum. Der Durchmeſſer dieſes Rades betrug 1,4 Meter, die Höhe 0,4 Meter, und die Schaufelzahl 36.

Man kann auch nach dem Principe der Burdin'ſchen Turbinen verticale Waſſerräder, wie DE Fig. 458, conſtruiren, und denſelben das Waſſer durch eine Röhre WA zuführen, welche nahe über dem Radtiefſten ausmündet. Iſt hier c die Ausflußgeſchwindigkeit, v die Radgeſchwindigkeit und α der Winkel cAv, welcher die Richtung des eintretenden Waſſers mit dem Radumfange einſchließt, ſo hat man für die relative Geſchwindigkeit $c_1 = c_2$ des Waſſers im Rade:

Fig. 458.



$$c_1^2 = c_2^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha.$$

Soll nun das Waſſer möglichſt todt abfließen, ſo muß $c_2 = v$, alſo auch $c_2^2 = v^2$, und daher:

$$2cv\cos.\alpha = c^2, \text{ alſo}$$

$$v = \frac{c}{2\cos.\alpha} \text{ ſein.}$$

Wenn man das Rad mit dieſer Geſchwindigkeit umlaufen läßt, und dabei den Austrittswinkel $\delta = 180^0 - c_2Bv$ möglichſt klein macht, ſo fällt die abſolute Abflußgeſchwindigkeit w ſo klein aus, daß das Arbeitsvermögen

$\frac{w^2}{2g} Qg$ des abfließenden Waſſers als Null angeſehen und folglich das theoretiſche Arbeitsvermögen des Waſſerrades

$$L = Qh\gamma$$

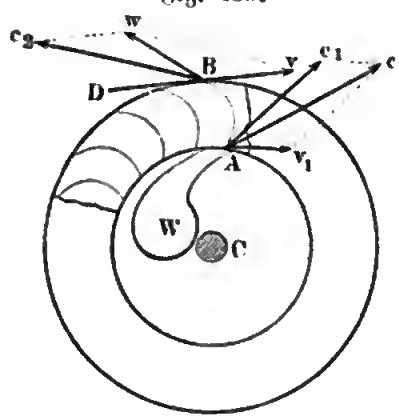
geſetzt werden kann.

Damit das Waſſer ungehindert durch die Radcanäle AB fließen könne, iſt nöthig, daß der Querſchnitt der Ausmündung B nicht kleiner ſei als der der Einmündung A und deshalb zu fordern, daß der Austrittswinkel δ dem Eintrittswinkel α mindeſtens gleich ſei. Ein einfaches Rad DE dieſer Conſtruction hat in Folge der Abweichung der Kraftrichtung von der Umdrehungsebene noch ein Beſtreben, ſich um eine in dieſer Ebene liegende Axe zu drehen; und um daſſelbe aufzuheben, kann man auf dieſelbe Welle XX zwei ſolche Räder DE, DE ſetzen, welche das durch eine Röhre W zugeführte Waſſer auf entgegengeſetzten Seiten aufnehmen und ausgießen.

Tangentialräder. Bei den ſeither in Betrachtung gezogenen Turbinen bewegt ſich das Waſſer nahe oder ganz in einer cylindriſchen Fläche, es verändert folglich bei dieſer Bewegung jedes Waſſerelement ſeine Entfernung von der Umdrehungsaxe nicht, oder wenigſtens nicht ſehr; im Folgenden werden wir aber Räder kennen lernen, wo das Waſſer außer einer Umdrehungs- und nach Befinden einer Verticalbewegung noch eine mehr oder weniger radial ein- oder radial auswärts gerichtete Bewegung in Hinſicht auf die Umdrehungsaxe hat. Dieſe Turbinen haben die Eigenthümlichkeit, daß ihr Gang von der Centrifugalkraft des Waſſers weſentlich mit abhängt. Man könnte daher auch dieſe Räder Centrifugalturbinen nennen. Sie ſind aber gewöhnlich unter dem Namen Tangentialräder bekannt. §. 235

Die Theorie dieſer Turbinen gründet ſich auf die in Bd. I, §. 303 und §. 304 abgehandelte Theorie der mechaniſchen Arbeit der Centrifugalkraft. Bewegt ſich ein Körper oder ein Waſſerelement M in einem Radcanale AB, Fig. 459, auswärts, während ſich das Rad ACB ſelbſt mit einer gewiſſen Winkelgeſchwindigkeit ω umdreht, ſo erhält daſſelbe in Folge der radial auswärts wirkenden Centrifugalkraft einen Zuwachs an Arbeitsvermögen, welcher durch den Ausdruck

Fig. 459.



$$L = \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2g}\right) G$$

gemeſſen wird, wenn G das Gewicht des Körpers v_1 und v die Umfangsgeſchwindigkeiten des Rades an der Eintritts-

ſtelle A und an der Austrittsſtelle B, und g das bekannte Beſchleunigungsmaaß der Schwere bezeichnen.

Dieſer Arbeitsgewinn geht in einen Arbeitsverluſt über, wenn ſich der Körper von außen nach innen bewegt, alſo A die Eintritts- und B die Austrittsſtelle iſt (ſ. Fig. 461). Wenn daher die relative Eintrittsgeſchwin-

Fig. 460.

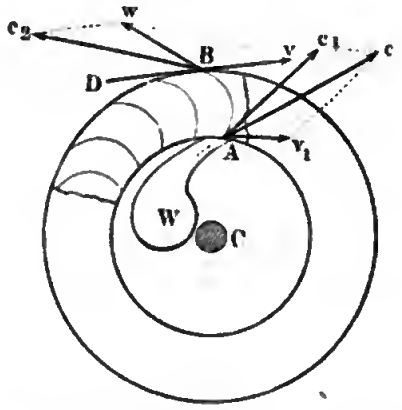
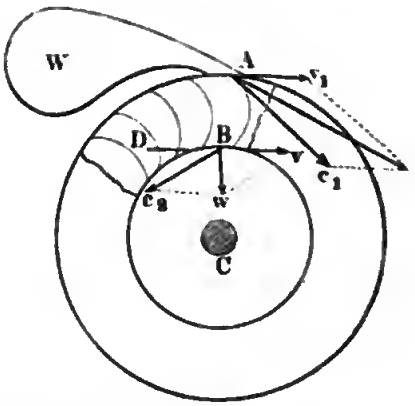


Fig. 461.



digkeit des Waſſers $= c_1$ iſt, ſo nimmt die relative Austrittsgeſchwindigkeit deſſelben in B einen Werth c_2 an, welcher in beiden Fällen durch die Formel:

$$\frac{c_2^2}{2g} = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{v^2 - v_1^2}{2g}, \quad \text{oder} \quad c_2^2 = c_1^2 + v^2 - v_1^2$$

beſtimmt wird.

Damit das Waſſer ungehindert und ohne Stoß bei A Fig. 460 eintrete, iſt nöthig, daß ſich die abſolute Eintrittsgeſchwindigkeit c in zwei Geſchwindigkeiten v_1 und c_1 zerlegen laſſe, wovon die eine mit der Radgeſchwindigkeit v_1 an der Eintrittsſtelle zuſammenfällt, und die andere die Richtung des Schaufelendes in A hat. Iſt nun α der Winkel cAv_1, welchen der zufließende Strahl mit dem Radumfang in A einſchließt, und β der Winkel $c_1 A v_1$, unter welchem ſich die Schaufel AB in A an den Radumfang anſchließt, ſo hat man für die Größe und Richtung der relativen Eintrittsgeſchwindigkeit:

$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2cv_1 \cos.\alpha$$

und

$$\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{c}{c_1}.$$

Sind alſo die Größen c, v_1 und α gegeben, ſo beſtimmen ſich die Größen c_1 und β durch die Ausdrücke:

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{c^2 + v_1^2 - 2cv_1 \cos.\alpha} \quad \text{und} \\ \sin.\beta = \dfrac{c \sin.\alpha}{c_1}, \end{cases}$$

oder auch
$$\begin{cases} \cotang.\,\beta = \cotang.\,\alpha - \dfrac{v_1}{c\,\sin.\,\alpha} \text{ und} \\ c_1 = \dfrac{c\,\sin.\,\alpha}{\sin.\,\beta}. \end{cases}$$

Für die relative Austrittsgeſchwindigkeit folgt nun:

$$c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c v_1 \cos.\,\alpha.$$

Iſt δ der Winkel DBc_2, unter welchem ſich das Schaufelende B an den Radumfang anſchließt, ſo hat man für die abſolute Ausflußgeſchwindigkeit w:

$$w^2 = c_2^2 + v^2 - 2\,c_2 v \cos.\,\delta.$$

Um das Arbeitsvermögen $\dfrac{w^2}{2g} Q\gamma$ des fließenden Waſſers ſo klein und folglich das des Rades ſo groß wie möglich zu erhalten, iſt die abſolute Geſchwindigkeit w möglichſt klein und daher $c_2 = v$ und δ gleich oder wenigſtens ſo nahe wie möglich Null zu machen. Könnte $\delta =$ Null ſein, alſo die Schaufel in B tangential an den Radumfang angelegt werden, ſo würde dann

$$w = c_2 - v = 0,$$

und alſo auch der Arbeitsverluſt Null ſein. Um dem bei B abfließenden Waſſer den nöthigen Querſchnitt zu geben, kann aber δ nur klein (15 bis 20 Grad) gemacht werden, und wenn dann nur $c_2 = v$ iſt, ſo folgt:

$$w = 2\,v\,\sin.\,\frac{\delta}{2},$$

und daher der geſuchte Arbeitsverluſt:

$$\frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{\left(2\,v\,\sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2}{2g} Q\gamma.$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c v_1 \cos.\,\alpha,$$

$v = c_2$ ein, ſo folgt einfach $2\,v_1 \cos.\,\alpha = c$, und daher die erforderliche Umdrehungsgeſchwindigkeit des Rades:

$$v_1 = \frac{c}{2\cos.\,\alpha},$$

oder, da ſich die Geſchwindigkeit c aus dem ganzen Gefälle oder der Druckhöhe im Ausflußreſervoire W durch den Ausdruck $c = \sqrt{2gh}$ beſtimmt:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{2\cos.\,\alpha},$$

und, wenn r und r_1 die Radhalbmeſſer $\overline{CB}$ und $\overline{CA}$ bezeichnen:

$$v = \frac{r}{r_1} v_1 = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{c}{2\cos.\,\alpha} = \frac{r}{r_1} \frac{\sqrt{2gh}}{2\cos.\,\alpha}.$$

Setzt man dieſen Werth für v in den Ausdruck für den

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{\left(2\,v\,sin.\frac{\delta}{2}\right)^2}{2g}\,Q\gamma$$

ein, ſo erhält man:

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \left(\frac{r}{r_1}\cdot\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2 Q\,h\,\gamma,$$

und daher das theoretiſche Arbeitsquantum des Rades:

$$L = h\,Q\gamma - \frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\cdot\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q\,h\,\gamma.$$

§. 236 In Folge der Reibung des Waſſers in der Zuleitungsröhre und in den Radcanälen erleidet dieſe Leiſtung noch zwei Verluſte, welche den Quadraten der Ausflußgeſchwindigkeiten c und c_2 proportional wachſen, und daher zuſammen

$$= \left(\xi\,\frac{c^2}{2g} + \xi_1\cdot\frac{c_2^2}{2g}\right) Q\gamma$$

zu ſetzen ſind, wenn ξ und ξ_1 gewiſſe Erfahrungszahlen, ſogenannte Widerſtandscoefficienten, bezeichnen.

Setzen wir in dieſem Ausdrucke

$$\frac{c^2}{2g} = h \quad \text{und}$$

$$\frac{c_2^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\cdot\frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 h,$$

ſo erhalten wir hiernach die Leiſtung des Rades:

$$L = \left[1 - \xi - \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q\,h\,\gamma$$

und iſt hierin $\xi = \xi_1 = 0{,}05$ bis $0{,}10$ anzunehmen.

Uebrigens iſt wegen der letzten Verluſte genauer

$$(1 + \xi)\,c^2 = 2\,g\,h \quad \text{und}$$
$$(1 + \xi_1)\,c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha$$

zu ſetzen, ſo daß $c = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\xi}}$, und

$$\xi_1\,c_2^2 = c^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha \text{ folgt.}$$

Wenn man ferner

$$\xi_1\,c_2^2 = \xi_1\,v^2 = \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 v_1^2 = \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2$$
$$= c^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha \text{ ſetzt,}$$

ſo folgt die vortheilhafteſte Umdrehungsgeſchwindigkeit

$$v_1 = \left[1 - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2\right] \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}.$$

Da in dem obigen Ausdrucke für die Radleiſtung $cos.\,\alpha$ im Nenner vorkommt, ſo iſt es zweckmäßig, den Einführungswinkel klein zu machen, und folglich das Waſſer nahe tangential in das Rad einzuführen, weshalb man auch dieſe Räder Tangentialräder nennt. Dieſelben ſind entweder Tangentialräder mit innerer Beaufſchlagung, wie Fig. 460, oder ſolche mit äußerer Beaufſchlagung, Fig. 461.

Giebt man das Aufſchlagquantum Q, ſo kann man nun auch mit Hülfe der Geſchwindigkeiten c, c_1 und c_2 den erforderlichen Querſchnitt F der Ausmündung des Aufſchlagreſervoirs ſowie den Querſchnitt F_1 des Waſſers bei ſeinem Eintritte, und Querſchnitt F_2 deſſelben bei ſeinem Austritte aus dem Rade finden. Es iſt nämlich:

$$Q = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2,$$

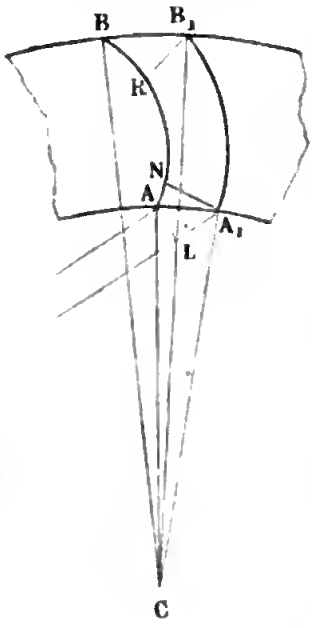
und daher:

$$c = \frac{Q}{F},\ c_1 = \frac{Q}{F_1} \text{ und}$$

$$c_2 = \frac{Q}{F_2}.$$

Durch Vergleichung der beiden erſten Geſchwindigkeiten mit einander erhält man die Gleichung:

Fig. 462.



$$\frac{c_1}{c} = \frac{F}{F_1} = \frac{AL}{A_1 N},$$

wenn AL und $A_1 N$, Fig. 462, die Dicken des Waſſerſtrahles vor und nach dem Eintritte ins Rad bezeichnen. Iſt nun noch AA_1 der Bogen des Radumfanges, welchen der durchgehende Waſſerſtrahl einnimmt, ſo hat man:

$$\frac{AL}{A_1 N} = \frac{AA_1 \,.\, sin.\, AA_1 L}{AA_1 \,.\, sin.\, A_1 AN} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta},$$

und daher auch:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta},$$

ganz in Uebereinſtimmung mit dem Obigen:

Da c und α gegeben und v_1 als beſtimmt anzuſehen ſind, ſo iſt der Winkel β durch den Ausdruck:

$$cotang.\,\beta = cotang.\,\alpha - \frac{v_1}{c\,sin.\,\alpha}$$

zu beſtimmen.

Ohne Rückſicht auf Nebenhinderniſſe iſt $v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}$, daher:

$$cotang.\,\beta = cotang.\,\alpha - \frac{1}{2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha} = \frac{2\,(cos.\,\alpha)^2 - 1}{2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}$$

$$= \frac{cos.\,2\,\alpha}{sin.\,2\,\alpha} = cotang.\,2\,\alpha, \text{ und daher:}$$

$$\beta = 2\,\alpha.$$

Endlich folgt aus $Fc = F_2\,c_2$,

$$\frac{c_2}{c} = \frac{F}{F_2} = \frac{A\,L}{B_1\,R} = \frac{A\,A_1\,sin.\,\alpha}{B\,B_1\,sin.\,\delta},$$

wenn $\overline{B_1\,R}$ die Dicke des Waſſerſtrahles vor dem Austritt, und $\overline{B\,B_1}$ den von demſelben eingenommenen Bogen des Radumfanges andeuten. Nun iſt aber noch:

$$\frac{A\,A_1}{B\,B_1} = \frac{C\,A}{C\,B} = \frac{r_1}{r},$$

daher hat man auch:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{r_1\,sin.\,\alpha}{r\,sin.\,\delta},$$

und zur Beſtimmung des erforderlichen Austrittswinkels:

$$sin.\,\delta = \frac{r_1}{r}\cdot\frac{c}{c_2}\,sin.\,\alpha = \frac{r_1}{r}\,\frac{c}{v}\,sin.\,\alpha = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\frac{c}{v_1}\,sin.\,\alpha,$$

oder wenn man annähernd

$$v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}$$

einführt,

$$sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\cdot sin.\,2\,\alpha.$$

Bei dem Tangentialrade mit innerer Beaufſchlagung, Fig. 460, iſt r der größere und r_1 der kleinere Radhalbmeſſer, folglich $\frac{r_1}{r}$ ein echter Bruch; bei dem mit äußerer Beaufſchlagung (Fig. 461) bezeichnet dagegen, r den inneren oder kleineren und r_1 den äußeren oder größeren Halbmeſſer; es iſt daher hier $\frac{r_1}{r}$ ein unechter Bruch und es fällt folglich bei dieſen Turbinen unter übrigens gleichen Umſtänden, der Austrittswinkel δ größer aus als bei den Turbinen mit innerer Beaufſchlagung. Setzt man annähernd

$$sin.\,{}^1/_2\,\delta = {}^1/_2\,sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha$$

in die oben gefundene Leiſtungsformel

$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q h \gamma$$

ein, ſo nimmt dieſelbe folgende Geſtalt an:

$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (sin.\,\alpha)^2\right] Q h \gamma.$$

Da in dieſem Ausdrucke das Glied $\zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2$ bei den Rädern mit innerer Beaufſchlagung größer iſt als bei den mit äußerer Beaufſchlagung, und dagegen das Glied $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (sin.\,\alpha)^2$ bei den erſteren kleiner ausfällt als bei den letzteren, ſo möchte im Allgemeinen keinem dieſer Räder ein Vorzug vor dem anderen einzuräumen ſein.

Beiſpiel. Es iſt für ein Gefälle $h = 150$ Fuß und ein Aufſchlagquantum $Q = {}^3/_4$ Cubikfuß ein Tangentialrad mit äußerer Beaufſchlagung anzuordnen und zu berechnen.

Die Ausflußgeſchwindigkeit des Waſſers aus dem Einlaufe iſt:

$$c = 0{,}95\sqrt{2gh} = 0{,}95\sqrt{62{,}5\,.\,150} = 0{,}95\sqrt{9375} = 92 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man $\frac{r_1}{r} = {}^4/_5$, $\zeta_1 = 0{,}10$ und $\alpha = 10$ Grad an, ſo folgt nun die erforderliche äußere Radgeſchwindigkeit:

$$v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}\left[1 - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{(2\,cos.\,\alpha)^2}\right] = \frac{92}{2\,cos.\,10}\left(1 - 0{,}1\,({}^5/_4)^2 \cdot \frac{1}{(2\,cos.\,10^0)^2}\right)$$

$$= \frac{46}{0{,}985}\left(1 - \frac{0{,}9}{64\,.\,(0{,}985)^2}\right) = 46{,}7\,(1 - 0{,}015) = 46{,}0 \text{ Fuß}.$$

Die Bruttoleiſtung iſt:

$$L = Q h \gamma = {}^3/_4\,.\,150\,.\,61{,}75 = 112{,}5\,.\,61{,}75 = 6947 \text{ Fußpfund}.$$

Dagegen hat man, wenn man

$$1 - \zeta = 1 - 0{,}10 = 0{,}9, \text{ ſowie}$$

$$\zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2\,cos.\,\alpha)^2} = 0{,}015 \text{ ſetzt,}$$

und wenn man

$$sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 sin.\,2\,\alpha = ({}^5/_4)^2\,sin.\,20^0 = {}^{25}/_{16}\,.\,0{,}3420 = 0{,}608,$$

folglich $\delta = 37\,{}^1/_2$ Grad,

ſowie $\beta = 2\,\alpha = 20$ Grad

annimmt, und hiernach

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2 = ({}^4/_5)^2 \left(\frac{sin.\,18^0\,45}{cos.\,10^0}\right)^2 = {}^9/_{16}\,.\,0{,}1065 = 0{,}060 \text{ ein-}$$

führt, die zu erwartende Nettoleiſtung:

$$L_1 = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{(2\,cos.\,\alpha)^2} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{sin.\,{}^1/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q h \gamma$$

$$= (0{,}900 - 0{,}015 - 0{,}060)\,Q h \gamma = 0{,}825\,Q h \gamma = 5722 \text{ Fußpfund}.$$

Bei innerer Beaufſchlagung läßt ſich $\alpha = 20$ und $\beta = 40$ Grad annehmen, ſo daß die innere Radgeſchwindigkeit

$$v_1 = \frac{c}{2\cos.\alpha}\left[1-\zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\cdot\frac{1}{(2\cos.\alpha)^2}\right] = \frac{46}{0{,}940}\left(1-0{,}1(4/3)^2\frac{1}{4\,.\,0{,}884}\right)$$
$$= 48{,}9\left(1-\frac{0{,}4}{7{,}956}\right) = 48{,}9\,.\,0{,}95 = 46{,}5 \text{ Fuß}$$

folgt.

Für den Austrittswinkel δ iſt

$$\sin.\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \sin.2\alpha = {}^9/_{16}\sin.40^0 = 0{,}3616,$$

folglich

$$\delta = 21 \text{ Grad } 12 \text{ Minuten.}$$

Nun iſt noch

$$\zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2\cos.\alpha}\right)^2 = 0{,}050,$$

und

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{\sin.{}^1/_2\delta}{\cos.\alpha}\right)^2 = (4/3)^2\left(\frac{\sin.10^0\,36'}{\cos.20^0}\right)^2 = 0{,}055,$$

daher folgt hier die zu erwartende Nutzleiſtung mit Einſchluß der Arbeit der Reibung des Waſſers im Rade:

$$L_1 = \left[1-\zeta-\zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\cdot\frac{1}{(2\cos.\alpha)^2}-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{\sin.{}^1/_2\delta}{\cos.\alpha}\right)^2\right]Qh\gamma$$
$$= (0{,}900-0{,}050-0{,}055)\,Qh\gamma = 0{,}795\,Qh\gamma = 5523 \text{ Fußpfund.}$$

Für beide Räder hat man noch den nöthigen Querſchnitt der Schützenmündung:

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{0{,}75}{92} = 0{,}00815 \text{ Quadratfuß} = 1{,}17 \text{ Quadratzoll.}$$

Macht man die Weite d des Mündungsquerſchnittes, $= {}^1/_4$ Zoll, ſo folgt die erforderliche Mündungshöhe:

$$e = \frac{F}{d} = \frac{1{,}17}{{}^1/_4} = 4{,}68 \text{ Zoll,}$$

wofür man der Sicherheit wegen, 5 Zoll annehmen kann. Die Weite des Rades iſt nur wenig größer, alſo etwa $5{}^1/_2$ Zoll, anzunehmen. Giebt man dem Rade einen äußeren Halbmeſſer von 3 Fuß, ſo erhält man die Umdrehungszahl dieſes Rades pr. Minute

1) bei äußerer Beaufſchlagung:

$$u = \frac{30\,v_1}{\pi r} = \frac{30\,.\,46}{3\,\pi} = \frac{460}{3{,}14} = 146,$$

und dagegen

2) bei innerer Beaufſchlagung, da hier $r_1 = {}^3/_4 r = 2{,}25$ Fuß zu ſetzen iſt:

$$u = \frac{30\,v_1}{\pi r_1} = \frac{30\,.\,46{,}5}{2{,}25\,.\,\pi} = \frac{620}{\pi} = 197.$$

§. 237 Die Tangentialräder mit äußerer Beaufſchlagung ſind zuerſt von dem Ingenieur Zupinger in der Maſchinenfabrik von Eſcher Wyſſ u. Comp. in Zürich conſtruirt worden. Die erſte Idee hierzu hat aber ſchon Poncelet (1826) gehabt, ſ. deſſen Cours de mécanique appliquée aux machines, deutſch von Schnuſe, unter dem Titel: Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, Bd. II, §. 150.

Die Fig. 463 und Fig. 464 führen ein Tangentialrad im Auf- und

Grundriſſe vor Augen. Es iſt hier *A* der Einfallkaſten, *B* die Einfallröhre und *C* der aus drei Canälen beſtehende Leitſchaufelapparat, durch welchen das Waſſer nahe tangential auf das Rad geführt wird. Zum Reguliren des Waſſerzufluſſes dient ein Schieber *D*, welcher durch ein gezahn-

Fig. 463.

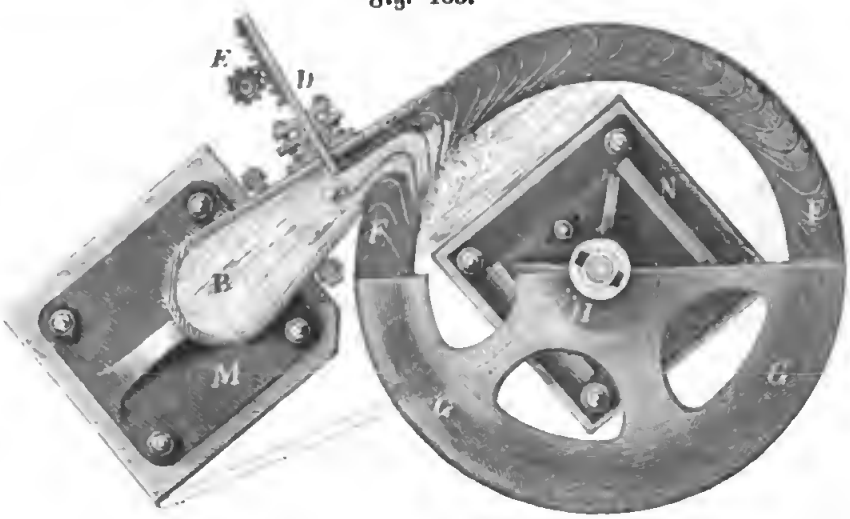
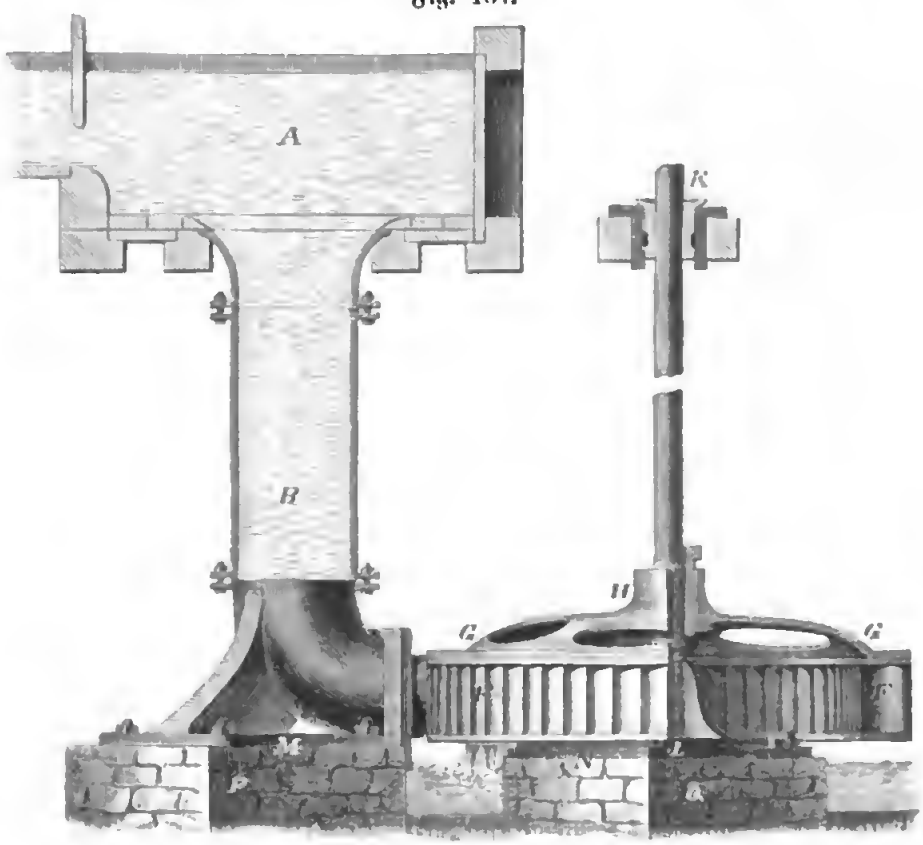
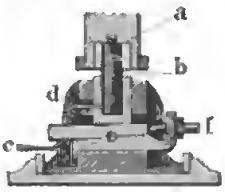


Fig. 464.



tes Rad *E* geſtellt werden kann. Bei der abgebildeten Schieberſtellung iſt ein Leitſchaufelcanal ganz abgeſchloſſen, es wird daher hier das Waſſer nur in zwei Canälen auf das Rad geführt. Das aus 60 Schaufeln beſtehende Rad *FF* iſt mittelſt eines Tellers *GG* und des Muffes *H* mit der ſtehenden Welle *KL* deſſelben feſt verbunden; die letztere läuft oben in einem Halslager *K* und unten mittels einer ſtählernen Pfanne auf einem ebenfalls ſtählernen Stifte, deſſen Geſtelle in Fig. 465 beſonders abgebildet iſt.

Fig. 465.



Es iſt hier *a* die in der ſtehenden Welle feſt eingeſchraubte Pfanne, *b* der im Geſtelle ſitzende Stift, *cd* ein Rohr, durch welches Oel nach den Reibungsflächen geführt wird, und *e* ein durch Schrauben *f* zu ſtellender Keil, womit ſich der Stift nach Bedürfniß heben oder ſenken läßt. Die Einfallröhre und das Radgeſtelle ruhen mittels eiſerner Lagerplatten *M* und *N* (Fig. 464) auf ſteinernen Pfeilern *P* und *Q*. Dieſe in $^1/_{30}$ der natürlichen Größe abgebildete Maſchine benutzt ein, (in der Figur verkürztes) Gefälle von 6,17 Meter, und ein Auffchlagquantum von 0,2 Cubikmeter pr. Secunde, und hat bei 65 Umdrehungen pr. Minute, einen Wirkungsgrad von 0,72.

Wir können hier aus dem polytechniſchen Centralblatte, Jahrgang 1847 und 1849, die Reſultate der Verſuche an zwei Paar ſolchen Rädern mittheilen.

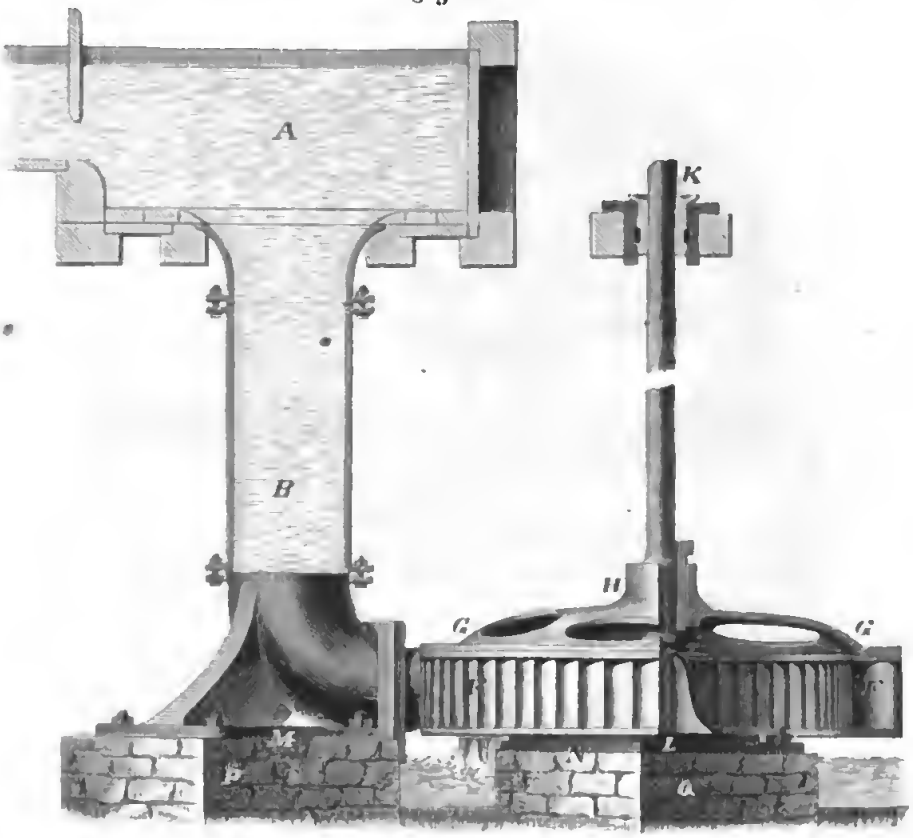
Das erſte Räderpaar befindet ſich in einer Spinnerei in Tanneberg bei Annaberg. Daſſelbe hat einen Auffchlag von 7 Cubikfuß pr. Secunde und ein Gefälle von 76 Fuß, der äußere Durchmeſſer eines jeden Rades iſt 24 und der innere 16 Zoll (engl.), die Weite beträgt ferner nur 3 Zoll, und die Anzahl Schaufeln iſt 48. Das Waſſer wird durch eine Röhre aus Keſſelblech von 76 Fuß Länge und 18 Zoll Weite zugeleitet. Dieſelbe hat einen horizontalen Auslauf, welcher auf der einen Seite nach dem einen und auf der anderen nach dem anderen Rade führt. Vor jeder Ausmündung befindet ſich eine durch eine Schraube ohne Ende ſtellbare Schieberſchütze und ein in Fig. 463 abgebildeter Leitſchaufelapparat, welcher das Waſſer in drei Canälen nahe tangential in das Rad einführt. Die an einem dieſer Räder von Herrn Profeſſor Hülße angeſtellten Verſuche gaben bei 270 Umdrehungen des Rades pr. Minute einen Wirkungsgrad von

0,75 bei ganz geöffneter Schütze,
0,60 bei drei Viertel geöffneter Schütze, und
0,46 bei halb geöffneter Schütze.

Während das Räderpaar in Tanneberg zum Betriebe einer Spinnerei dient, wird dagegen ein anderes Paar Tangentialräder in Birkigt bei Tetſchen zum Betriebe von Mahlgängen verwendet. Das Gefälle dieſer Turbine iſt nur $20^1/_4$ Fuß (engl.), jedes Rad hat 75 Schaufeln, 5 Fuß äuße-

ren Durchmeſſer, 5 Zoll Kranzbreite und 11½ Zoll Weite. Die Zuführung des Waſſers durch eine Einfallröhre und durch Leitſchaufelapparat iſt in der Hauptſache dieſelbe wie bei der Tanneberger Maſchine und wie Fig. 466 vor Augen führt. Die Schützen beſtehen jedoch hier aus Droſ-

Fig. 466.

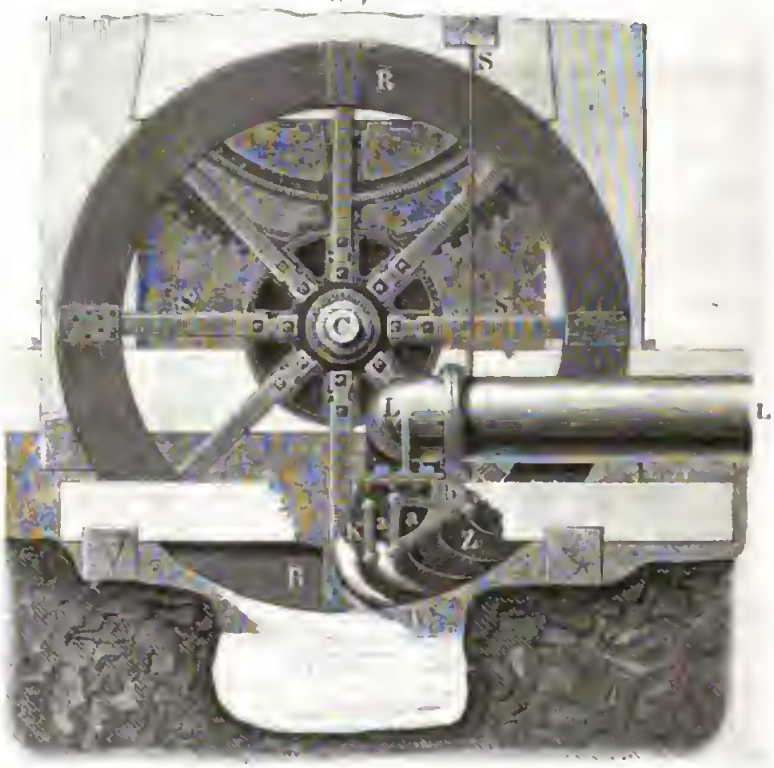


ſelventilen, auch ſind die Mündungen der von den zwei Leitſchaufeln gebildeten drei Eintrittscanäle mit beſonderen Schiebern verſehen, um einen oder zwei dieſer Canäle ganz verſchließen zu können. Aus den vom Herrn Prof. Brückmann an einem dieſer Räder angeſtellten Verſuchen geht hervor, daß dieſe Maſchine bei 61 Umdrehungen pr. Minute den Maximal-Wirkungsgrad 0,70 giebt, und daß der letztere nur auf 0,65 herabſinkt, wenn die Umdrehungszahl auf 50 herabgeht oder auf 70 ſteigt, oder wenn das Ausſchlagquantum durch Abſperren eines oder zweier Canäle auf die Hälfte herabgezogen wird.

Liegende Tangentialräder. Das Princip der Tangentialräder läßt §. 238
ſich auch bei verticalen Waſſerrädern in Anwendung bringen (ſ. §. 235). Solche Tangentialräder mit horizontaler Axe mit innerer Beaufſchlagung ſind zuerſt vom Herrn Kunſtmeiſter Schwamkrug conſtruirt worden

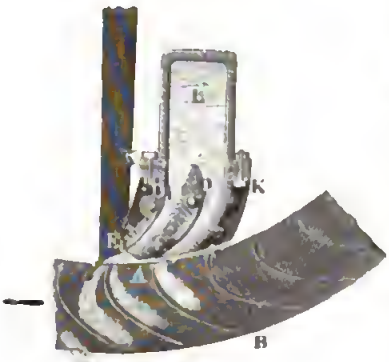
(s. das Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann auf das Jahr 1850 und 1853). Die Seitenansicht u. s. w. von einem solchen Tangentialrade führt Fig. 467 vor Augen. Das Rad *RR* ist durch ein einseitig ansitzendes Armsystem und mit Hülfe einer Rosette u. s. w. auf der horizontalen Welle *C*

Fig. 467.



befestigt, und letztere trägt ihre Umdrehungsbewegung mittels Zahnräder u. s. w. auf die arbeitende Welle über. Das Wasser tritt nahe am Radtiefsten in das Rad ein und wird durch eine Röhre *LL* zugeführt, welche um den freien Radkranz herumläuft und sich in einer Kammer endigt, worin ein Leitschaufelapparat angebracht ist. Der letztere ist in Fig. 468 besonders abgebildet. Man sieht hier den Durchschnitt eines Radstückes mit den Schaufeln *AB*, ferner in *L* das gekrümmte Ende der Einfallröhre, sowie in *KE* die Schützenkammer. Die Ausmündung der letzteren ist durch eine Zunge in zwei Theile getheilt, und mit zwei um die Axen *D*, D_1 drehbare Klappen *DE*, D_1E_1 ausgerüstet, wodurch die beiden Ausmündungen beliebig verengt werden können. Die Stellung dieser Klappen erfolgt durch die in Fig. 467

Fig. 468.



sichtbaren Arme a, a_1, welche außerhalb der Kammer auf den Axen D, D_1 der Stellklappen befestigt und mit einander so verbunden sind, daß sie mittels eines dritten Armes b und durch eine Zugstange ZS gemeinschaftlich sich bewegen lassen.

Die Turbinen mit liegender Welle haben vor den Turbinen mit verticaler Axe den Vorzug einer leichteren, sichereren und vor dem Zutritte des Wassers geschützteren Lagerung. Das Rad, an welchem von dem Erbauer dynamometrische Versuche angestellt worden sind, hat $7^2/_3$ Fuß (1 Fuß $= {}^3/_7$ Meter) äußeren und 6 Fuß inneren Durchmesser, ferner 4 Zoll Weite und 45 Schaufeln. Das Gefälle desselben betrug $103^1/_2$ Fuß; das durch einen Ueberfall gemessene Aufschlagquantum 38,7 bis 133,6 Cubikfuß, und der Wirkungsgrad desselben war, bei 112 bis 148 Umdrehungen pr. Minute, $\eta = 0{,}58$ bis $0{,}79$.

Näheres über diese Turbine im polytechn. Centralblatt. Jahrgang 1849, Nr. 8 und 9, so wie im Jahrbuch für den sächs. Berg- und Hüttenmann. Eine andere Turbine dieser Art, welche zum Umtriebe des Kunstgezeuges auf der Grube „Churprinz Friedrich August Erbstolln" bei Freiberg dient, und bei einem Gefälle von 145 Fuß, 550 Cubikfuß p. m. Aufschlag hat, und bei einer Kranzbreite von 13 Zoll einen inneren Durchmesser von 8 Fuß besitzt, beschreibt der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug im Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann auf 1853.

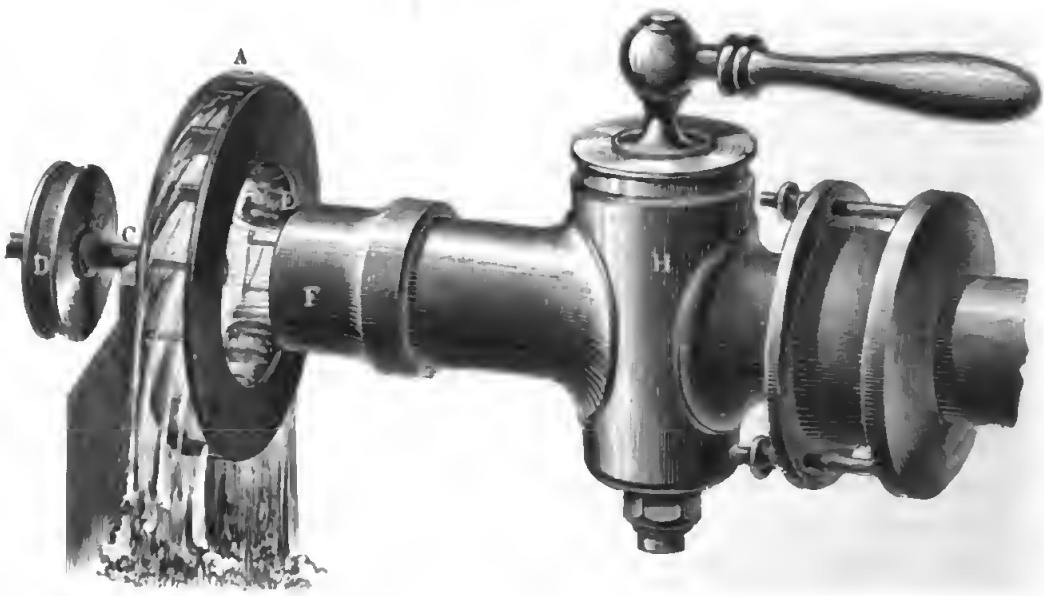
Anmerkung. Auch in Frankreich werden in neueren Zeiten Tangentialturbinen mit innerer Beaufschlagung construirt; bei der Industrieausstellung 1855 in Paris waren mehrere solcher Räder, ganz aus Eisenblech construirt, ausgestellt.

Da auch diese Turbinen bei ihrer mäßigen Größe und selbst bei einem mittleren Gefälle, sehr viele Umdrehungen machen, so erfordern sie in der Regel noch ein oder mehrere Vorgelegsräder, wodurch ihre Umdrehungszahl auf die zur gewöhnlichen Arbeitsverrichtung nöthige Größe herabgezogen wird.

Strahlturbine. Anstatt den Wasserstrahl nur einseitig in das Rad zu führen, kann man denselben auch in der Axenrichtung auf den Radteller auffallen und in radialen Richtungen in die Radcanäle einführen lassen. Da eine solche Turbine durch einen isolirten Wasserstrahl (s. Bd. I, §. 497) in Umdrehung gesetzt wird, so möchte sie nicht mit Unrecht eine Strahlturbine genannt werden. Man kann diese Turbine sowohl in horizontalen als auch verticalen Ebenen umlaufen lassen. In Fig. 469 (a. f. S.) ist ein solches Rad mit horizontaler Axe CD oder verticaler Umdrehungsebene AB gebildet. Der Wasserstrahl, welcher durch eine Oeffnung E in das Rad eintritt, wird durch eine mit einem Stellhahne H versehene Röhre FH zugeführt. Durch Stellung dieses Hahnes kann diese Turbine nicht nur in und außer Gang gesetzt, sondern auch die Bewegung derselben nach Bedürfniß regulirt werden. Diese Maschine eignet sich §. 239

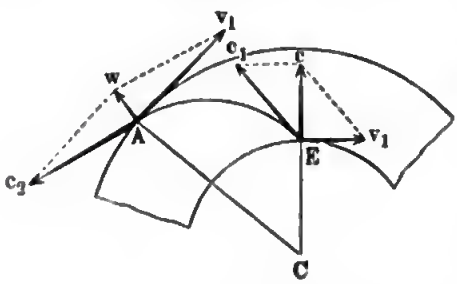
beſonders zur Verrichtung kleiner Arbeiten, z. B. zum Erſatz von Menſchenkräften, bei Benutzung des Waſſers aus einer großen ſtädtiſchen Waſſerleitung. Die im Vorſtehenden entwickelte Theorie der Tangentialturbinen

Fig. 469.



findet hier nur zum Theil ihre Anwendung. Da hier das Waſſer radial in die Radcanäle eintritt, alſo $\alpha = 90$ Grad iſt, ſo giebt hier die $v_1 = \frac{c}{2\cos.\alpha}$ die vortheilhafteſte Umdrehungsgeſchwindigkeit $v_1 = \frac{c}{0} = \infty$. Es iſt hiernach bei dieſer Turbine die Austrittsgeſchwindigkeit w, ſelbſt wenn auch der Austrittswinkel δ = Null wäre, nicht Null, und daher auch ein Maximum der theoretiſchen Leiſtung nicht zu erlangen. Wenn man aber die Umfangsgeſchwindigkeit v des Rades mindeſtens ebenſo groß macht als die Eintrittsgeſchwindigkeit des Waſſers, ſo fällt die lebendige Kraft des abfließenden Waſſers ſo klein aus, daß der Wirkungsgrad der Maſchine noch eine anſehnliche Größe behält. Es iſt hier für die relative Eintrittsgeſchwindigkeit c_1,

Fig. 470.



$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 \text{ (ſ. Fig. 470)}$$

und für die relative Austrittsgeſchwindigkeit c_2,

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2 - v_1^2 = c^2 + v^2;$$

macht man daher $v = c$, ſo erhält man $c_2^2 = 2\,v^2$, und

$$c_2 = \sqrt{2} \cdot v = 1{,}414\,v;$$

und nimmt man noch $\delta = 0$ an, ſo iſt die abſolute Austrittsgeſchwindigkeit

$$w = c_2 - v = 0{,}414\,v,$$

und daher der entſprechende Verluſt an Gefälle:

$$\frac{w^2}{2g} = 0{,}171\,\frac{v^2}{2g} = 0{,}171\,h,$$

wenn $h = \frac{c^2}{2g}$ das zur Erzeugung der Eintrittsgeſchwindigkeit c des Waſſers nöthige Gefälle bezeichnet. Macht man v noch größer als c, ſo fällt dieſer Verluſt noch kleiner aus; z. B. für $v = {}^3/_2\,c$ iſt

$$\frac{w^2}{2g} = (1{,}803 - 1{,}500)^2\,\frac{c^2}{2g} = (0{,}303)^2\,\frac{c^2}{2g} = 0{,}092\,h.$$

Wenn nun auch noch in Folge der Abweichung δ zwiſchen den Richtungen der Geſchwindigkeiten c_2 und v dieſer Verluſt noch etwas größer ausfällt, und auch die Reibungen noch einen Theil der Arbeit des Rades verzehren, ſo iſt doch noch immer ein leidlicher Wirkungsgrad deſſelben zu erwarten.

Für den Austrittswinkel δ iſt, da jedenfalls $2\,\pi\,r_1\,c = 2\,\pi\,r\,c_2\,sin.\,\delta$ ſein muß,

$sin.\,\delta = \frac{r_1}{r}\,\frac{c}{c_2}$, z. B. für $\frac{r_1}{r} = {}^1/_2$ und $v = c$, alſo $c_2 = c\,\sqrt{2}$,

$sin.\,\delta = 0{,}5\,.\,0{,}707 = 0{,}354$, wonach $\delta = 20^3/_4$ Grad, und

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2 + c_2^2 - 2\,v\,c_2\,cos.\,\delta}{2g} = \frac{(1 + 2 - 2\,\sqrt{2}\,cos.\,\delta)\,c^2}{2g}$$

$$= (3 - 2{,}828\,cos.\,20^3/_4)\,h = 0{,}356\,h \text{ ausfällt.}$$

Dieſe Turbinen geben zwar keinen großen Wirkungsgrad, haben aber den Vorzug der Einfachheit und Kleinheit. Sie ſind bei hohen Gefällen wahre Liliputräder und haben eine ſo große Umdrehungszahl u, daß es in den meiſten Fällen der Anwendung nöthig iſt, dieſe Umdrehungszahl durch Räderwerke bedeutend herabzuziehen.

Beiſpiel. Es wird die Anlage einer Strahlturbine verlangt, welche bei dem Gefälle $h = 100$ Fuß die Nutzleiſtung $L = 4$ Pferdekräfte $= 1920$ Fußpfund p. s. liefert. Laſſen wir das Rad mit der Geſchwindigkeit

$$c = v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{6250} = 79 \text{ Fuß umgehen,}$$

ſo können wir den Gefällverluſt $\frac{w^2}{2g} = 0{,}365\,h = 35{,}6$ Fuß ſetzen; nehmen wir aber noch an, daß die Reibungen noch $0{,}144\,h = 14{,}4$ Fuß verzehren, ſo bleibt

die ganze Nutzleiſtung der Turbine $L = (1 - 0{,}356 - 0{,}144)\, Q h \gamma = 0{,}5\, Q h \gamma = 50 . 61{,}75\, Q = 3087{,}5\, Q$, und es iſt daher das nöthige Aufſchlagquantum

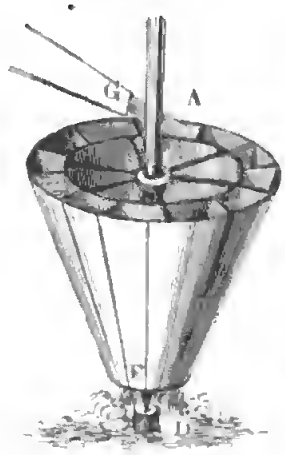
$$Q = \frac{1920}{3087{,}5} = 0{,}622 \text{ Cubikfuß, d. i. p. m. } 60\, Q = 37\tfrac{1}{3} \text{ Cubikfuß.}$$

Bei der Ausflußgeſchwindigkeit $c = v = 79$ Fuß, iſt daher der Querſchnitt des aufſchlagenden Waſſerſtrahles: $F = \frac{Q}{v} = 0{,}007873$ Quadratfuß $= 1{,}133$ Quadratzoll. Da eine Kreisfläche von dieſem Inhalte den Durchmeſſer $d = 1{,}2$ Zoll hat, ſo möchte es genügen, den inneren Radhalbmeſſer $r_1 = 1$ und den äußeren, $r = 2\, r_1 = 2$ Zoll zu machen. Bei dem Durchmeſſer von 4 Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, welchen hiernach dieſe Strahlturbine erhält, folgt die Umdrehungszahl derſelben p. m.

$$u = \frac{30\, v}{\pi r} = \frac{30 . 79}{\frac{1}{3} . 3{,}141} = \frac{2370}{1{,}047} = 2263.$$

§. 240 **Danaiden.** An die Tangentialräder-Turbinen ſchließen ſich zunächſt diejenigen horizontalen Waſſerräder an, welche mehr oder weniger die Form eines umgeſtürzten Kegels haben, die man in Frankreich roues à poires oder Danaides nennt, und deren ſchon Belidor in ſeiner Architect. hydr. erwähnt. Von der Einrichtung eines ſolchen Rades wird Fig. 471 eine Vorſtellung verſchaffen. Es beſteht dieſes Rad im Weſentlichen aus einer ſtehenden Welle CD, und aus zwei kegelförmigen Mänteln mit Scheidewänden, welche den hohlen Raum zwiſchen beiden Mänteln in von oben nach unten laufende Canäle zerſchneiden. Das Aufſchlagwaſſer wird durch ein Gerinne G oben zu-, und durch das Loch F unten nahe an der Axe, nachdem es die erwähnten Radcanäle durchlaufen hat, abgeführt. Bei dem einfachen Rade dieſer Art ſind die Scheidewände durch verticale Ebenen, bei anderen aber durch ſchiefe oder Schraubenflächen gebildet. Bei den Rädern, welche Belidor beſchreibt, fehlt endlich der äußere Mantel ganz, und es iſt dafür das Rad in eine coniſche, ziemlich genau an die Schaufeln oder Scheidewände anſchließende Radſtube geſtellt. Wir beſchäftigen uns nur mit dem Rade der erſten Art.

Fig. 471.

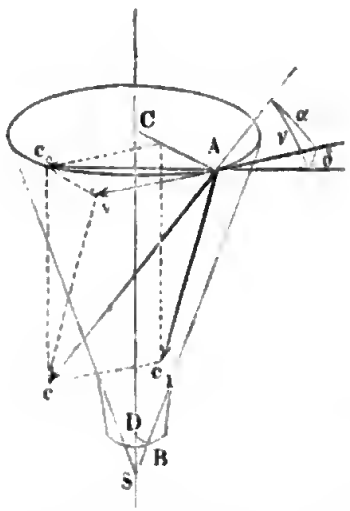


Bei dieſen Rädern haben Schwerkraft und Centrifugalkraft zugleich Antheil an der Bewegung des Waſſers. Tritt das Waſſer mit der abſoluten Geſchwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 472, zu, und weicht die Richtung deſſelben um den Winkel $cAv = \alpha$ von der Richtung der Umfangsgeſchwindigkeit $\overline{Av} = v$ ab, ſo iſt für die Größe der relativen Geſchwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$, mit welcher das Waſſer im Rade an der verticalen Schaufel AB niederzugehen anfängt,

$$c_1^2 = c^2 - v^2.$$

Da es aber im Rade von der Höhe $\overline{CD} = h_1$ desselben herabsinkt und dabei nahe an die Radaxe gelangt, deren Umfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ gesetzt werden kann, so folgt für die relative Geschwindigkeit c_2 des unten bei F abfließenden Wassers:

Fig. 472.



$$c_2^2 = c_1^2 + 2gh_1 - v^2$$
$$= c^2 + 2gh_1 - 2v^2$$

oder, wenn das ganze Gefälle $c^2 + 2gh_1$ durch h bezeichnet wird,

$$c_2^2 = 2gh - 2v^2.$$

Damit nun das Wasser möglichst todt abfließe, muß $c_2 =$ Null und folglich die obere Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = \sqrt{gh}$$

sein.

Die theoretische Leistung des Rades ist dann wie bekannt:

$$L = Qh\gamma.$$

Da natürlich die mittleren Werthe von c_2 und v_1 nicht ganz Null sein können, so fließt das Wasser noch mit der absoluten Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{c_2^2 + v_1^2}$$

ab, und es wird dadurch dem Rade von dem Arbeitsvermögen $Qh\gamma$ noch die Leistung

$$\frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{c_2^2 + v_1^2}{2g} Q\gamma$$

entzogen.

Ist der halbe Convergenzwinkel des vom Radmantel gebildeten Körpers, $ASC = \theta$, also die Neigung dieser Fläche gegen den Horizont, $= 90° - \theta$, und der Winkel cAv, um welchen die Richtung Ac des eintretenden Strahles von der Richtung Av der Umdrehungsgeschwindigkeit beim Eintritt A abweicht, $= \alpha$, so hat man für den Neigungswinkel $cAc_0 = \nu$ des Strahles gegen den Horizont, der Gleichung

$$c \sin.\nu = c_1 \cos.\theta = c \sin.\alpha \cos.\theta \text{ zu Folge,}$$

$$1) \quad \sin.\nu = \sin.\alpha \cos.\theta$$

und dagegen für den Winkel $vAc_0 = \delta$, um welchen die Horizontalprojection Ac_0 der Strahlrichtung von der Bewegungsrichtung Av des Rades abweicht, da

$$v \tang.\delta = v \tang.\alpha \sin.\theta,$$

$$2)\quad tang.\,\delta = tang.\,\alpha\ sin.\,\theta.$$

Wenn man dem Rade die Form einer ebenen Kreisfläche giebt, ſo erhält man ein Tangentialrad mit ebenen Schaufeln, und hat in den obigen Formeln $\theta = 90^0$, alſo

$$sin.\,\theta = 1 \quad \text{und} \quad cos.\,\theta = 0^0$$

einzuſetzen, ſo daß $v = 0$ und $\delta = \alpha$ folgt, und daher der Waſſerſtrahl in horizontaler Richtung an den Radumfang zu führen iſt.

Wenn dagegen der obere Theil des Rades cylindriſch geformt iſt, ſo hat man $\theta = 0$ Grad, daher

$$cos.\,\theta = 1 \quad \text{und} \quad sin.\,\theta = 0,$$

ſo daß dann

$$v = \alpha \quad \text{und} \quad \delta = 0$$

folgt, und daher der Waſſerſtrahl tangential an das Rad geführt werden muß.

Anmerkung. Das im Vorſtehenden unterſuchte Rad iſt auch unter dem Namen der Danaide von Burdin bekannt. Die ältere Danaide von Manouri d'Ectot hatte eine hiervon abweichende Conſtruction, wiewohl ſie im Principe mit dieſer ziemlich übereinſtimmte. Dieſes Rad beſtand in einem Blechcylinder mit vertical und radial geſtellten Scheidewänden und einem Ausflußloche in der Nähe der verticalen Drehungsaxe. Das Waſſer wurde oben ziemlich tangential eingeführt, ging durch den Zwiſchenraum von 4 bis 5 Centimeter zwiſchen der cylindriſchen Trommel und den Scheidewänden hindurch, und traf zunächſt die Innenfläche dieſer Trommel, wodurch es dieſelbe ſammt dem ganzen, damit feſt verbundenen Apparat in Umdrehung ſetzte. Hierbei floß es allmälig auf den Boden herab und gelangte von da bis zum Ausflußloche. S. Dictionnaire des Sciences mathémat. par Montferrier, Art. Danaide.

§. 241 Man kann auch einer Danaide die Form eines durch eine verticale Scheidewand in zwei gleiche Theile getheilten Gefäßes EKM, Fig. 473 geben. Damit beim Eintritt des aus dem Aufſchlagbehälter AB fließenden Waſſers kein Stoß eintrete, muß die Geſchwindigkeit c deſſelben der Umdrehungsgeſchwindigkeit v_1 des Waſſers im Rade an der Eintrittsſtelle B gleich ſein. Bezeichnet h_1 den Theil des ganzen Radgefälles, welcher auf die Erzeugung der Eintrittsgeſchwindigkeit verwendet wird, ſo iſt

$$c = v_1 = \sqrt{2\,g h_1}.$$

Bezeichnet ebenſo h_2 die Druckhöhe des Waſſers im Rade, und v die Umdrehungsgeſchwindigkeit deſſelben im Umfange der Mündung M, ſo hat man für die relative Austrittsgeſchwindigkeit c_2 des Waſſers

$$c_2^2 = 2\,g h_2 - v_1^2 + v^2,$$

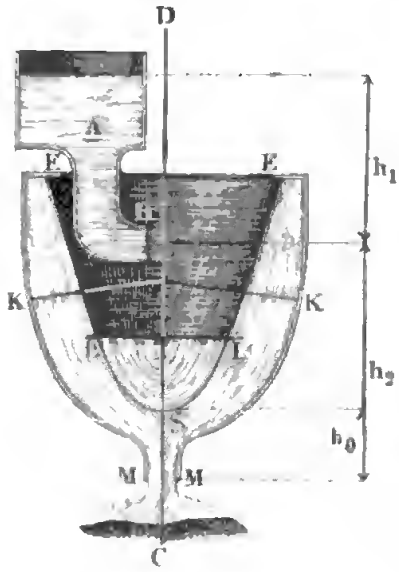
oder, wenn die Mündung, und folglich auch v ſehr klein iſt,

$$c_2^2 = 2\,g h_2 - v_1^2.$$

Damit die Geschwindigkeit c_2 möglichst klein, und folglich dem Wasser die größte Arbeitsfähigkeit entzogen werde, muß $v_1^2 = 2gh_2$, und daher

$$v_1 = \sqrt{2gh_2} \text{ sein.}$$

Fig. 473.



Hiernach folgt

$$h_1 = h_2 = {}^1/_2 h;$$

es ist also die eine Hälfte des ganzen Maschinengefälles auf die Druckhöhe zur Einführung des Wassers und die andere auf die Höhe des Rades zu verwenden.

Natürlich kann hier, damit das Wasser in gehöriger Menge abfließe, die Geschwindigkeit c_2 nicht $=$ Null, sondern nur sehr klein (4 bis 6 Fuß) sein, und es ist der Ausmündung MM der Inhalt $F = \frac{Q}{c_2}$ zu geben, welchem der Halbmesser

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi c_2}} \text{ entspricht.}$$

Da dann das Wasser nicht allein die Geschwindigkeit c_2 in verticaler Richtung, sondern auch eine Umdrehungsgeschwindigkeit hat, deren mittleres Quadrat der Theorie der Trägheitsmomente zufolge (s. Bd. I, §. 288), $= {}^1/_2 v^2$ ist, so ergiebt sich das Arbeitsvermögen des abfließenden Wassers:

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2 + {}^1/_2 v^2}{2g}\right) Q\gamma$$

und der Wirkungsgrad des Rades

$$\eta = 1 - \frac{c_2^2}{2gh} - {}^1/_2 \frac{v^2}{2gh}.$$

Da sich

$$v_1 = \sqrt{{}^1/_2 . 2gh} = \sqrt{gh} \text{ und}$$

$$v = \frac{r}{r_1} v_1 = \frac{r}{r_1}\sqrt{gh}$$

setzen läßt, so hat man auch

$$\eta = 1 - \frac{c_2^2}{2g} - {}^1/_4 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2.$$

Der Scheitel S des Rotationsparaboloides ESE, welches von der freien Oberfläche des Wassers im Rade gebildet wird, steht um die das verlorene Gefälle bildende Höhe $\overline{SM} = h_0 = \frac{c_2^2}{2g}$ von der Mündung MM ab.

Um die Bildung des Trichters ESE unmittelbar über der Mündung MM zu verhindern, kann man eine Querwand LL einziehen.

In Fig. 474 iſt das Modell einer nach den obigen Principien conſtruirten

Fig. 474.

Danaide abgebildet. Das Waſſer wird hier durch eine gekröpfte Hahnröhre HE zu- und mittels zweier Mundſtücke F, F tangential in das Rad ABC eingeführt, ſowie durch das Mundſtück C ausgetragen. Durch ein auf den unteren cylindriſchen Theil BB des Rades aufzuſetzendes Vorgelegsrad läßt ſich die Umdrehungskraft deſſelben auf die Arbeitsmaſchine übertragen.

§. 242 **Reactionsräder.** Setzt man ein Ausflußgefäß HRF, Fig. 475, auf einen Wagen, ſo treibt die Reaction des Waſſers denſelben mit dem

Gefäße in einer der Ausflußbewegung entgegengeſetzten Richtung fort; und verbindet man ein Ausflußgefäß ABF, Fig. 476, mit einer ſtehenden Welle CD, ſo wird dieſes durch die Reaction P des ausfließenden Waſſers

Fig. 475.

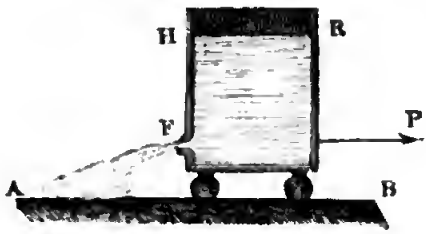
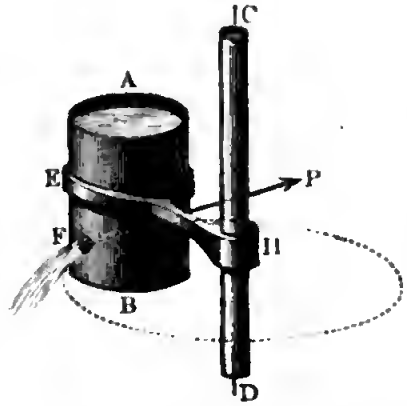


Fig. 476.



ebenfalls in einer der Ausflußbewegung entgegengeſetzten Bewegung umgedreht. Erſetzt man nun das unten abfließende Waſſer von oben durch anderes, ſo wird auf dieſe Weiſe eine ſtetige Umdrehung erzeugt. Die Vorrichtung, welche auf dieſe Weiſe in Umdrehung geſetzt wird, heißt ein Reactionsrad (franz. roue à réaction; engl. wheel of reaction, wheel of recoil), in Deutſchland gewöhnlich ein Segner'ſches Waſſerrad und in England Barkers mill.

Das einfachſte Rad dieſer Art iſt in Fig. 477 abgebildet. Daſſelbe beſteht aus einer Röhre BC, deren Axe durch eine feſtſtehende Welle AX gebildet wird, und aus zwei Röhren (Schwungröhren) CF und CG mit Seitenmündungen F und G. Das durch dieſe Mündungen abfließende Waſſer wird durch anderes, oben durch ein Gerinne K zugeführtes Waſſer erſetzt. Bei Anwendung an Mahlmühlen wird der Läufer oder obere Mühlſtein auf AX unmittelbar aufgeſetzt; bei anderen Anwendungen kann aber die Bewegung mittels eines auf AX aufzuſetzenden Zahn- oder Riemenrades fortgepflanzt werden.

Fig 477.

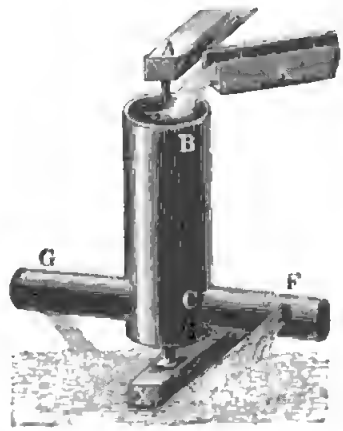
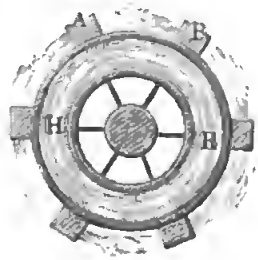


Fig. 478.

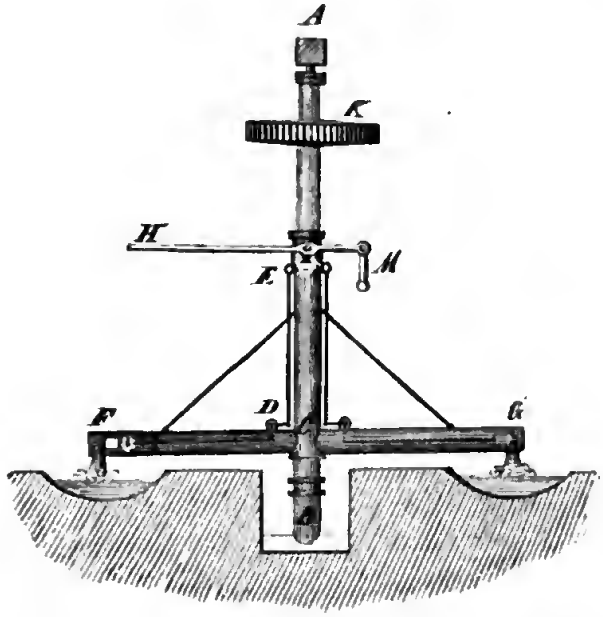


Man hat auch Reactionsräder mit mehreren Schwungröhren oder Schwungkammern angewendet, wie z. B. Fig. 478 im Grundriſſe vor Augen führt. Das Ge-

fäß HR ist entweder cylindrisch oder conisch. Um das Wasser ohne Stoß einzuführen, hat Euler ein gleichgeformtes Zuflußgefäß unmittelbar über das Rad gesetzt, und statt des Bodens in demselben ringsum geneigte Leitschaufeln eingesetzt, ähnlich wie später Burdin bei seinen Turbinen (s. Bd. II, §. 234); auch hat Burdin ähnliche Reactionsräder ausgeführt. Hierher gehört auch das Versuchsrad in Band I, §. 504.

Ein einfaches Reactionsrad hat der Verfasser in Vallendar unweit Ehrenbreitenstein im Gange gesehen. Es war vom Herrn Maschineninspector Althans construirt, und diente als Umtriebsmaschine für zwei Lohmahlgänge. Die übrigens sehr zweckmäßige Einrichtung dieses Rades ist aus Fig. 479 zu ersehen. Das Wasser wird durch eine Einfallröhre zugeführt, welche bei B unterhalb des Rades vertical aufwärts gebogen ist. Die stehende Welle AC mit ihren beiden Schwungröhren CF und CG ist von unten herauf hohl und paßt mit ihrem Ende B in das eine Schnauze bildende Ende der Einfallröhre. Damit sich aber diese Welle drehen könne, ohne Wasser bei B durchzulassen, ist in B eine Stopfbüchse, eine Vorrichtung, welche wir erst später näher kennen lernen werden, angebracht. Die rectangulären Seitenmündungen F und G sind durch Schieber zu verschließen und letztere wieder sind durch Stangen und Winkelhebel (D) mit einer die Welle umfassenden Hülse E verbunden, welche durch einen Hebel HM gehoben oder gesenkt werden kann. Oben sitzt das Rad K zur Transmission der Bewegung. Das durch die 9 Zoll weite Einfallröhre zugeführte Wasser tritt bei B in die Steigröhre und bei C in die Schwungröhren, und kommt nun bei F und G zum Ausflusse. Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, daß das ganze Gewicht der umlaufenden Maschine vom Wasser getragen werden und folglich zu einer Reibung an der Basis keine Gelegenheit geben kann. Ist G das Gewicht der Maschine, h die Druckhöhe und $2r$ die Weite der Steigröhre, so hat man für diesen Fall:

Fig. 479.



$$\pi r^2 h \gamma = G,$$

und hiernach den erforderlichen Röhrenhalbmesser

$$r = \sqrt{\frac{G}{\pi h \gamma}}$$

anzuwenden, um diesen Gleichgewichtszustand herbeizuführen.

Das Aufschlagquantum betrug 18 Cubikfuß pr. Minute und das Gefälle 94 Fuß, folglich die disponible Leistung = 1861 Fußpfund. Die Länge einer Schwungröhre maß $12\frac{1}{2}$ Fuß, und die Umdrehungszahl pr. Minute war beim Arbeiten, = 30, folglich die Umfangsgeschwindigkeit = 39,3 Fuß.

Anmerkung 1. Die erste Beschreibung eines Reactionsrades, als eine Erfindung Barkers, findet man in Desaguliers Course of expérimental-philosophy, Vol. II, London 1745. Ausführlich über die Theorie und vortheilhafteste Construction dieser Räder handelt Euler in den Memoiren der Berliner Akademie, 1750, 1754.

Anmerkung 2. Die Wirkungsgrade der älteren Reactionsräder waren außerordentlich klein. Schon Nordwall findet einen solchen nur $\frac{1}{3}$ von dem eines oberschlägigen Rades. Schitko (s. dessen Beiträge zur Bergbaukunde u. s. w. Wien 1833) fand an einem solchen Rade den höchsten Wirkungsgrad 0,15, also ebenfalls sehr gering.

Theorie der Reactionsräder. Die Wirkungen der Reactionsräder lassen sich theoretisch auf folgende Weise ermitteln. Ist h das Gefälle oder die Tiefe der Mitte der Mündungen unter dem Wasserspiegel in der Einfallröhre, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit derselben, so hat man nach dem Früheren, die den Druck des vor der Mündung befindlichen Wassers messende Höhe: §. 243

$$h_1 = h + \frac{v^2}{2g},$$

und daher die theoretische Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh + v^2}.$$

Bezeichnet noch φ den Geschwindigkeitscoefficienten, so läßt sich die effective Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \varphi \sqrt{2gh + v^2} \text{ setzen.}$$

Diese Geschwindigkeit ist aber nicht die absolute Geschwindigkeit des Wassers beim Austritte aus dem Rade, denn dasselbe hat noch die in entgegengesetzter Richtung vor sich gehende Umdrehungsgeschwindigkeit v mit dem Rade gemeinschaftlich. Es ist demnach die absolute Geschwindigkeit des austretenden Wassers:

$$w = c - v = \varphi \sqrt{2gh + v^2} - v,$$

und der entsprechende Arbeitsverlust:

$$L_1 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{(\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v)^2}{2g} Q\gamma.$$

Den Geſchwindigkeitscoefficienten $\varphi = 1$ angenommen, erhält man:

$$L_1 = \frac{(\sqrt{2gh+v^2}-v)^2}{2g} Q\gamma = \left(h - \frac{v(\sqrt{2gh+v^2}-v)}{g}\right) Q\gamma,$$

und zieht man dieſe von der disponiblen Leiſtung ab, ſo bleibt die Nutzleiſtung:

$$L = \left(h - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{v(\sqrt{2gh+v^2}-v)}{g} Q\gamma.$$

Dieſelbe fällt um ſo größer aus, je größer v iſt, denn ſetzt man

$$\sqrt{v^2+2gh} = v + \frac{gh}{v} - \frac{g^2h^2}{2v^3} + \cdots,$$

ſo erhält man:

$$L = v\left(\frac{gh}{v} - \frac{g^2h^2}{2v^3} + \cdots\right)\cdot\frac{Q\gamma}{g},$$

alſo für $v = \infty$,

$$L = Qh\gamma,$$

die ganze disponible Leiſtung.

Dieſer Umſtand, daß die Maximalleiſtung durch eine unendlich große Umfangsgeſchwindigkeit bedingt wird, iſt aber ein ungünſtiger, weil bei einer großen Umfangsgeſchwindigkeit die Nebenhinderniſſe ſehr anwachſen, wie leicht zu ermeſſen iſt, da das unbelaſtete Rad noch lange nicht unendlich ſchnell umläuft, und alſo ſchon die Nebenhinderniſſe bei einer zwar großen aber keineswegs beinahe unendlichen Geſchwindigkeit alle Wirkung aufzehren. Uebrigens kann auch die Geſchwindigkeit des Rades deshalb nicht unendlich groß werden, weil das Waſſer durch die $(33 + h)$ Fuß hohe Luft- und Waſſerſäule, der Schwungröhre höchſtens mit der Geſchwindigkeit $\sqrt{2g(33+h)}$ Fuß zugeführt werden kann, und folglich bei einem ſchnelleren Abfluſſe deſſelben, der ſtetige Ausfluß aufhört. Von Rädern, deren theoretiſche Maximalleiſtung bei einer unendlich kleinen oder auch nur bei einer mittleren Geſchwindigkeit eintritt, iſt aus dem erſteren Grunde ein größerer Wirkungsgrad zu erlangen, als bei den eine unendlich große Umdrehungszahl fordernden Maſchinen.

Es iſt allerdings noch die Frage, ob die Leiſtungen bei mittleren oder nicht ſehr hohen Umlaufsgeſchwindigkeiten bedeutend von der Maximal- oder disponiblen Leiſtung $Qh\gamma$ abweichen, zu beantworten. Belaſtet man die Maſchine ſo ſtark, daß die Geſchwindigkeitshöhe, welche der Umfangsgeſchwindigkeit entſpricht, dem Gefälle gleich, alſo

$$\frac{v^2}{2g} = h \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gh}$$

iſt, ſo hat man nach der obigen Formel, die Leiſtung:

$$L = \frac{\sqrt{2gh}(\sqrt{4gh} - \sqrt{2gh})}{g} Q\gamma = 2(\sqrt{2} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}828\, Qh\gamma \text{ zu erwarten,}$$

macht man aber $\frac{v^2}{2g} = 2h$, ſo erhält man:

$$L = \frac{\sqrt{4gh}(\sqrt{6gh} - \sqrt{4gh})}{g} Q\gamma = 4(\sqrt{1{,}5} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}899\, Qh\gamma,$$

macht man endlich $\frac{v^2}{2g} = 4h$, ſo ſtellt ſich

$$L = \frac{\sqrt{8gh}(\sqrt{10gh} - \sqrt{8gh})}{g} Q\gamma = 8(\sqrt{1{,}25} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}944\, Qh\gamma$$

heraus; man verliert alſo im erſten Falle ungefähr 17, im zweiten 10 und im dritten nur 6 Procent von der disponiblen Leiſtung und erſieht hieraus, daß bei mäßigen Gefällen und bei Anwendung einer Umfangsgeſchwindigkeit, welche der dem Gefälle entſprechenden Endgeſchwindigkeit nahe kommt, noch immer eine große Wirkung zu erwarten iſt. Uebrigens wird auch durch die große Einfachheit dieſer Maſchine ein großes Gewicht in die Wagſchale der Reactionsräder bei Vergleichung derſelben mit anderen Rädern gelegt.

Anmerkung. Die Umdrehungs- oder Reactionskraft iſt:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{2gh + v^2} - v}{g} Q\gamma,$$

und für $v = 0$,

$$P = \frac{\sqrt{2gh}}{g} Q\gamma = \frac{c}{g} Q\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma,$$

wie wir ſchon in Band I, §. 495 gefunden haben.

Effective Leistung der Reactionsräder. Die im vorigen Paragraphen gefundene Formel §. 244

$$L = \frac{(\sqrt{2gh + v^2} - v)\, v}{g} Q\gamma$$

für die Leiſtung eines Reactionsrades ändert ſich, wenn man den Ausflußwiderſtand berückſichtigt, die Ausflußgeſchwindigkeit:

$$c = \varphi \sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{\frac{2gh + v^2}{1 + \zeta}}$$

und die Ausflußmenge $Q = Fc = \varphi F \sqrt{2gh + v^2}$ ſetzt, in folgende um:

$$L = (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \frac{vQ\gamma}{g}$$

$$= (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \cdot \frac{\varphi F v \gamma}{g} \sqrt{2gh + v^2},$$

worin φ der Geſchwindigkeits- oder Ausflußcoefficient und F die Summe der Inhalte der Ausmündungen bezeichnen. Iſt Q gegeben, ſo läßt ſich auch

$$L = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{v Q \gamma}{g}$$

und hiernach der Wirkungsgrad des Rades:

$$\eta = \frac{L}{Q h \gamma} = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{v}{g h} \text{ ſetzen.}$$

Dieſer Wirkungsgrad $\eta = (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \frac{v}{gh}$ iſt mit $\varphi v \sqrt{2gh + v^2} - v^2$ zugleich ein Maximum, und zwar für

$$\sqrt{2gh + v^2} + \frac{v^2}{\sqrt{2gh + v^2}} = \frac{2v}{\varphi},$$

wie durch Differenziiren u. ſ. w. nach Band 1, Einleitung Art. XIII gefunden werden kann. Durch Umformungen dieſer Gleichung ſtößt man auf die biquadratiſche Gleichung

$$v^4 + 2ghv^2 = \frac{\varphi^2 g^2 h^2}{1 - \varphi^2},$$

deren Auflöſung die Geſchwindigkeit:

$$v = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1}$$

giebt, bei welcher der Wirkungsgrad ein Maximum, und zwar da

$$c = \sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1}$$

ausfällt:

$$\eta = \varphi \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1$$

$= 1 - \sqrt{1 - \varphi^2}$ wird.

Die effective Leiſtung iſt hiernach:

$$L = \eta\, Q h \gamma = (1 - \sqrt{1 - \varphi^2})\, Q h \gamma$$

$$= \varphi^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} \cdot F \sqrt{gh^3} \cdot \gamma,$$

da das Ausflußquantum

$$Q = \varphi F c = \varphi F \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1}$$

geſetzt werden kann.

Dividiren wir die Leistung durch die Geschwindigkeit v der Röhre im Mittelpunkte der Ausmündungen, so erhalten wir die Reactionskraft:

$$P = (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \frac{Q\gamma}{g}$$
$$= (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \sqrt{2gh + v^2} \cdot \frac{\varphi F\gamma}{g},$$

und daher beim stillstehenden Rade:

$$P = \varphi^2 . 2Fh\gamma.$$

Die Richtigkeit der vorstehenden Theorie des Reactionsrades hat der Verfasser durch Versuche bestätigt gefunden. Diese Versuche wurden an einem Modellrade von 1 Meter Durchmesser und $7^1/_2$ Quadratcentimeter Mündungsquerschnitt bei 4 Decimeter Druckhöhe angestellt, und es sind die Ergebnisse derselben in einer kleinen Schrift, welche in Freiberg unter dem Titel „Versuche über die Leistung eines einfachen Reactionsrades“ erschienen ist, enthalten.

Durch Vergleichung der effectiven Ausflußmenge Q mit dem theoretischen Ausflußquantum:

$$Fc = F\sqrt{2gh + v^2},$$

wurde der Ausflußcoefficient dieses Rades $\varphi = 0{,}9425$ gefunden, und wird nun dieser Werth in die Formel $\eta = 1 - \sqrt{1 - \varphi^2}$ eingesetzt, so erhält man den Maximalwirkungsgrad des Rades:

$$\eta = 1 - \sqrt{1 - 0{,}9425^2} = 1 - \sqrt{0{,}1117} = 0{,}666,$$

was auch die Versuche gaben. Die Umdrehungsgeschwindigkeit, bei welcher dieser Wirkungsgrad eintritt, ist theoretisch

$$v = \sqrt{gh}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}334}{0{,}334}} \cdot \sqrt{gh} = \sqrt{2gh},$$

also gleich der Fallgeschwindigkeit, welche der Druckhöhe h entspricht; und auf diesen Werth haben auch die Versuche geführt.

Setzen wir endlich den Werth $\varphi = 0{,}9425$ in die Formel

$$P = \varphi^2 . 2Fh\gamma,$$

so erhalten wir die Reactionskraft des Wassers $= 0{,}888 . 2Fh\gamma$, was ebenfalls durch die Versuche bestätigt wurde.

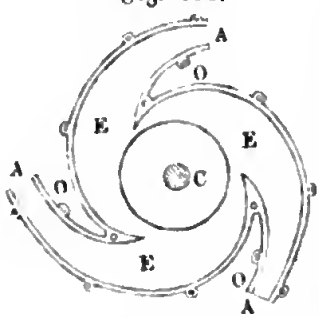
War die Radgeschwindigkeit v über $\sqrt{2gh}$, so machte sich der mit dem Quadrate von v wachsende Luftwiderstand bemerklich, so daß von da an die Abweichung zwischen dem theoretischen und effectiven Wirkungsgrade nahe mit v^3 wuchs, und zuletzt das Rad mit der Maximalgeschwindigkeit $v = 2 . \sqrt{2gh}$ leer umging.

Anmerkung. In der Schrift des Herrn Professors Schubert, „Beitrag zur Berichtigung der Theorie der Turbinen“, stellt der Herr Verfasser über die

Theorie des Reactionsrades mehrere fingirte, einer wiſſenſchaftlichen und naturgemäßen Grundlage entbehrende Behauptungen auf. Ich halte es daher für meine Schuldigkeit, meine Leſer vor dem ernſthaften Gebrauche dieſer Schrift zu warnen, und deshalb auf meine oben citirte Schrift zu verweiſen.

§. 245 **Schottiſche Turbinen.** In der neueren Zeit giebt man den Reactionsrädern krumme Schwungröhren, und nennt ſie gewöhnlich Whitelaw'ſche oder Schottiſche Turbinen. Manouri d'Ectot hat jedoch ſchon vor längerer Zeit ſolche Räder in Frankreich ausgeführt. (S. Journal des Mines, 1813, Tom. XXXIII.) Die ſchottiſchen, von Whitelaw und Stirrat conſtruirten Turbinen weichen von dem Reactionsrade Manouri's im Weſentlichen nicht ab. (S. Dingler's polytechn. Journal, Band 88, und polytechn. Centralblatt, Band II. 1843, vorzüglich aber die Schrift: Description of Whitelaw's and Stirrat's Patent Watermill, 2 Edit. London and Birmingham, 1843.) Eine beſondere Einrichtung der Whitelaw'ſchen Turbinen beſteht darin, daß man die Ausflußmündungen des Waſſers durch eine bewegliche Seitenwand erweitern oder verengern und dadurch den Ausfluß ſelbſt reguliren kann. Ein horizontaler Durchſchnitt einer ſolchen Turbine iſt in Fig. 480 abgebildet. Dieſe Turbine beſteht aus drei Schwungröhren, das Waſſer tritt bei *E* in dieſe ein und bei *A* aus denſelben aus. *OA* iſt die um *O* drehbare, einen Theil der inneren Seitenwand bildende Klappe zum Reguliren des Ausfluſſes. Die Stellung dieſer Klappe während des Ganges läßt ſich durch einen ähnlichen Apparat, wie bei dem in Fig. 479 abgebildeten Rade, bewirken.

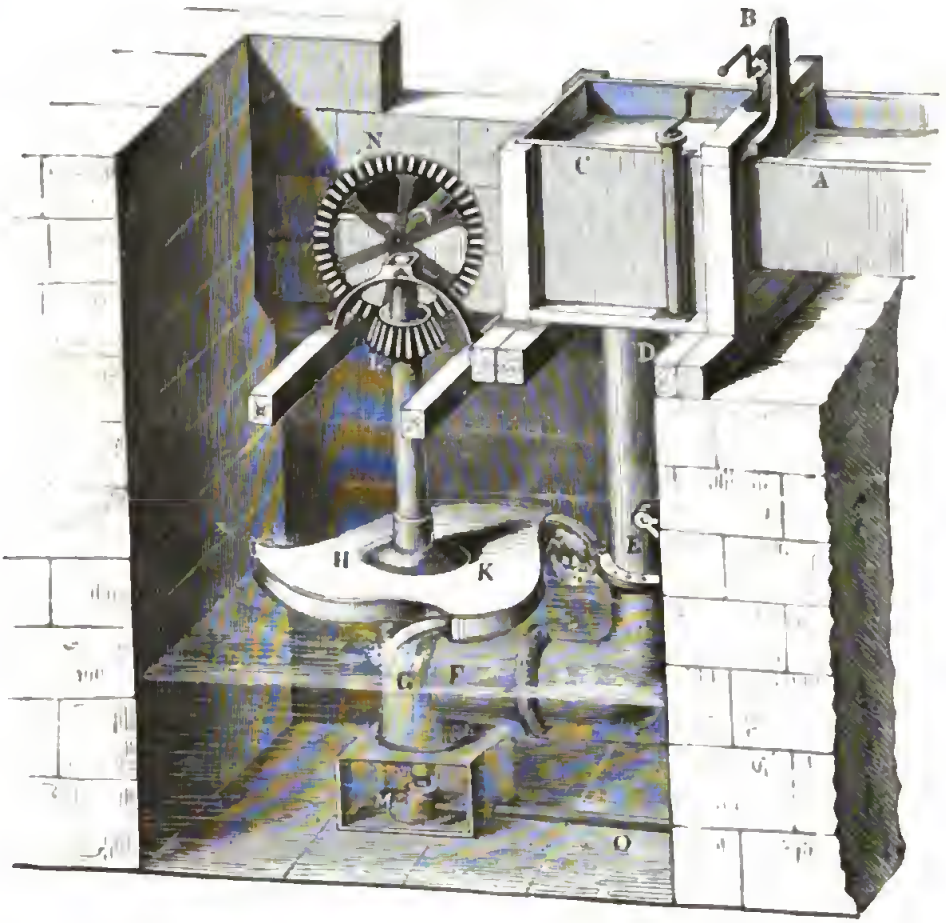
Fig. 480.



Die ganze Zuſammenſtellung einer Whitelaw'ſchen Turbine iſt aus Fig. 481 zu erſehen. *A* iſt das Waſſerzuleitungsgerinne, *B* ein Schutzbret und *C* das Einfallreſervoir, aus welchem das Waſſer in die Einfallröhre *DEF* läuft. *E* iſt eine Drehklappe, durch welche der Waſſerdruck regulirt werden kann. Bei *F* tritt das Waſſer in den feſtſtehenden Cylinder *G* und von da in das darüber befindliche Rad *HK*, das auf der ſtehenden Welle *LM* feſtſitzt. Die Reaction des durch drei Radmündungen ausſtrömenden Waſſers treibt das Rad mit der Welle in umgekehrter Richtung um, und dieſe Bewegung wird durch die Zahnräder *L* und *N* zunächſt auf eine horizontale Welle übergetragen u. ſ. w. Das Rad, die Welle, die Einfallröhren u. ſ. w. ſind von Gußeiſen; die Pfanne des Stiftes *M* aber erhält ein Futter von Meſſing. Das Oel zum Schmieren des Zapfens läuft durch ein bis über den Waſſerſpiegel im Einfallkaſten emporſteigendes Rohr *O* zu. Nach Redtenbacher (ſ. deſſen Theorie und Bau der

Turbinen und Ventilatoren) kann man die Welle mit ihrem Zapfen ganz vom Waſſer abſperren, wenn man beide mit einem bis an die obere Deck-

Fig. 481.

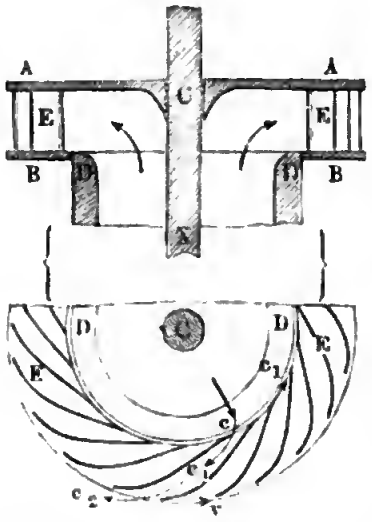


platte des Rades reichenden Gehäuſe umgiebt. Von der Theorie und von der geometriſchen Conſtruction dieſer Maſchinen wird erſt weiter unten gehandelt.

Reactionsrad von Combes. An die Whitelaw'ſchen Turbinen §. 246
ſchließt ſich zunächſt das Combes'ſche Reactionsrad an. Auch bei dieſem fließt das Waſſer von unten zu; doch unterſcheidet es ſich dadurch weſentlich von den erſteren Rädern, daß ſeine in größerer Anzahl vorhandenen umlaufenden Canäle oder Schwungröhren unmittelbar aneinanderſtoßen, und durch krumme, zwiſchen zwei ringförmige Kränze eingeſetzte Schaufeln gebildet werden. Die weſentlichſte Einrichtung eines Combes'ſchen Reactionsrades iſt aus Fig. 482 (a. f. S.), welche einen Auf- und einen Grundriß deſſelben darſtellt, erſichtlich. AA iſt eine den oberen Radkranz bildende, mit der ſtehenden Welle CX feſt verbundene Scheibe, BB iſt der untere, durch die

zwischen befindlichen Schaufeln E, E... mit der Scheibe AA fest verbundene Radkranz; DD ist der den unteren Theil der Welle umgebende Cylinder, durch welchen das Wasser zugeführt wird, welches am ganzen inneren Radumfange ein- und, nachdem es die Canäle zwischen den krummen Schaufeln durchlaufen hat, am ganzen äußeren Radumfange ausströmt.

Fig. 482.



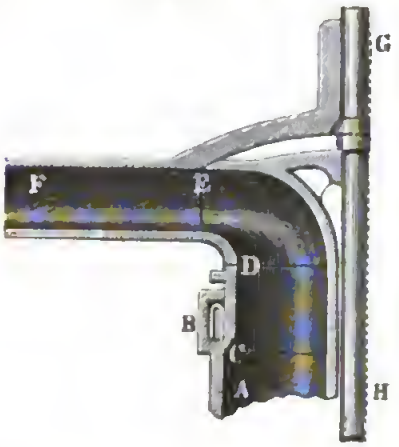
Eine andere wesentliche Abweichung der Combes'schen Reactionsräder von den Whitelaw'schen Turbinen besteht noch darin, daß dieselben keinen wasser- und luftdichten Abschluß zwischen dem Rade B und dem Zuflußreservoir D haben, der bei den Whitelaw'schen Rädern kaum entbehrt werden kann. Der Grund dieser Vereinfachung ist aber folgender. Der Druck des Wassers in einem Ausflußreservoir ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden; da wo das Wasser beinahe still steht, drückt es am stärksten, und da wo es am schnellsten läuft, am schwächsten (s. Bd. I, §. 400). Die Geschwindigkeit des Wassers hängt aber wieder von dem Querschnitte des Reservoirs ab, sie steht im umgekehrten Verhältnisse zu diesem Querschnitte; daher kann man dem Wasserdrucke durch Veränderung des Querschnittes eine beliebige Größe ertheilen, und ihn auch gleich Null oder vielmehr dem Atmosphärendrucke gleich machen. Bohrt man nun an der Stelle, wo das Wasser nur mit der Atmosphäre drückt, ein Loch in das Gefäß, so wird durch dasselbe weder Wasser heraus-, noch Luft hineinströmen. Damit aber umgekehrt durch den ringförmigen, übrigens möglichst eng zu machenden Raum zwischen B und D weder Wasser aus-, noch Luft einströme, hat man daher nur nöthig, dem Querschnitte an der Uebergangsstelle eine gewisse Größe zu geben.

Anmerkungen. 1. Die Combes'schen Reactionsräder werden auch oft mit Leitschaufeln versehen, welche das Wasser in bestimmter Richtung in das Rad einführen. Die in Deutschland von Wedding und Nagel ausgeführten Turbinen (erstere in Sagan, letztere in Schwerin) sind insofern den Combes'schen Rädern ähnlich, als sie von unten beaufschlagt werden, in der Construction aber ähneln sie mehr den Fournevron'schen Turbinen. Es gehört hierher auch die Turbine von Laurent und Deckherr, s. Armengaud's Publication industrielle, vol. 6.

2. Redtenbacher bewirkt den wasserdichten Abschluß zwischen dem Zuflußreservoir AB, Fig. 483, und dem Rade DEF durch einen beweglichen Messingring CD, der vom Wasser durch seinen Druck so stark an die untere

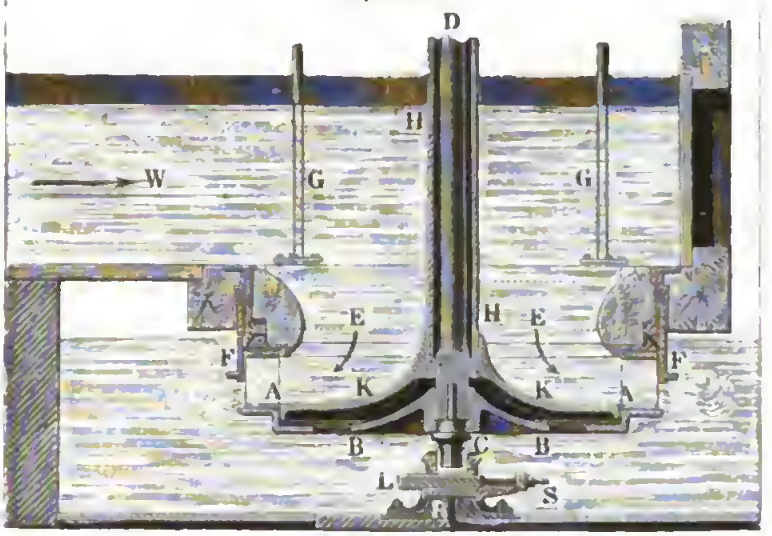
Ringfläche D des Rades angedrückt wird, daß das Wasser an dieser Stelle nicht durchdringen kann. Die Berührungsflächen bei D sind natürlich ganz eben abzuschleifen. Auch ist der Ring selbst durch eine aus ringförmigen, mit Metallringen ausgesteiften Lederriemen bestehende Dichtung B mit dem Zuflußreservoir AB verbunden.

Fig. 483.



Turbine von Cadiat. An die §. 247 bis jetzt beschriebenen horizontalen Wasserräder reihen sich zunächst die Cadiat'schen Turbinen an. Sie sind ohne Leitschaufeln wie die Whitelaw'schen und Combes'schen Räder, und werden, wie die Fourneyron'schen Turbinen, von oben beaufschlagt. Eigenthümlich ist diesen Rädern noch eine das Rad von außen umschließende kreisförmige Schütze. Einen vertiealen Durchschnitt von diesem Rade führt Fig. 484

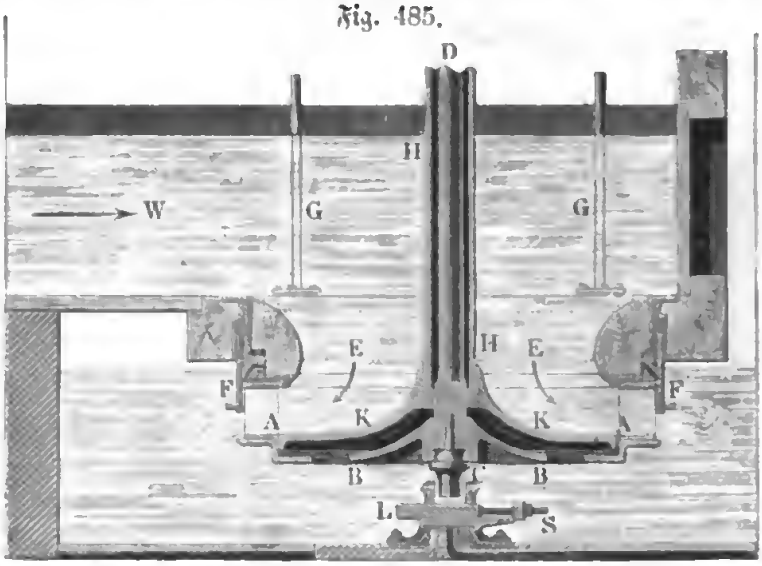
Fig. 484.



vor Augen. AA ist das eigentliche Rad, und BB die Schale, welche dasselbe mit der stehenden Welle CD verbindet. Der Stift C dieser Welle ruht in einer Pfanne, welche wir weiter unten näher kennen lernen werden. EE ist das Reservoir mit kreisförmigem Querschnitte, das oben mit dem Zuleitungscanale W in fester Verbindung ist und unten unmittelbar über dem oberen Radkranze ausmündet. Damit das bei W zufließende, im Reservoir niedersinkende und auf dem Wege EA dem Rade zufließende Wasser so wenig wie möglich in dieser Bewegung gestört werde und keine Contrac-

tion erleide, erweitert ſich das Reſervoir *EE* ſowohl auf- als auch abwärts allmälig, wie aus der Figur deutlich zu erſehen iſt. Der Ausfluß des

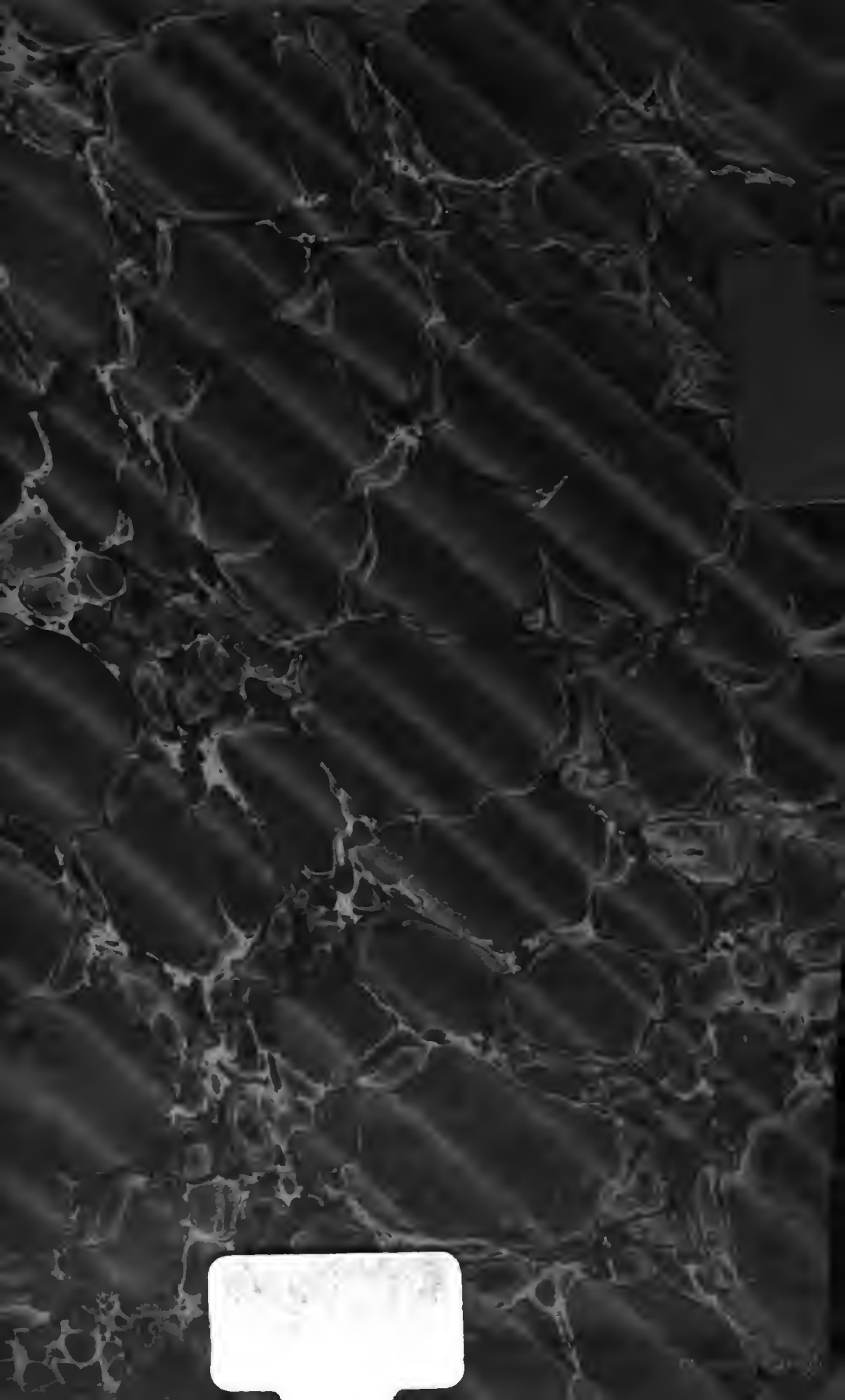
Fig. 485.



Waſſers wird durch eine das Rad von außen umgebende kreisförmige Schütze *FF* regulirt. Das Ziehen oder Senken derſelben erfolgt durch vier Stangen mittels eines beſonderen Mechanismus, deſſen nähere Einrichtung aus der Figur nicht zu erſehen iſt. Damit das Waſſer nicht zwiſchen dem Schutzbrete und der Gefäßwand durchdringen kann, iſt ein die innere Fläche des Schutzbretes berührender Lederring eingeſetzt.

Die ſtehende Welle *CD* iſt noch mit einer Röhre *HH* umgeben, welche den Teller *KK* trägt, der von dem inneren Umfange des unteren Radkranzes umgeben wird, ſo daß das Waſſer nach unten abgeſperrt iſt und nicht auf die Schale des Rades drückt. Dieſe Einrichtung (nach Redtenbacher) weicht von der, welche Cadiat angewendet hat, ab, iſt aber genau dieſelbe wie bei den Fourneyron'ſchen Turbinen. Cadiat läßt den Teller mit der Röhre ganz weg, und hebt den Druck des Waſſers auf die Schale *B* durch einen Gegendruck von unten auf, indem er noch ein zweites Reſervoir anbringt, welches die untere Fläche des Rades *A* faſt berührt, und mit dem Druckwaſſer *GH* in Communication geſetzt wird. Jedenfalls iſt dieſe Einrichtung weniger zweckmäßig als die Fourneyron'ſche, um ſo mehr, da es nicht möglich iſt, den Austritt des in dieſem Reſervoir völlig hydroſtatiſch drückenden Waſſers durch den wenn auch noch ſo engen ringförmigen Spalt zwiſchen dem Rade und dem Reſervoir zu verhindern. Die hier abgebildete Turbine geht, wie man ſieht, unter Waſſer.

Anmerkung. Eine vollſtändige und genaue Beſchreibung einer Cadiat'ſchen Turbine ohne Bodenteller und mit Druckwaſſer unter dem Radteller liefert M. Armengaud d. Aelt. im zweiten Bande ſeiner Publication industrielle.



3 2044 081 576 894

Digitized by Google